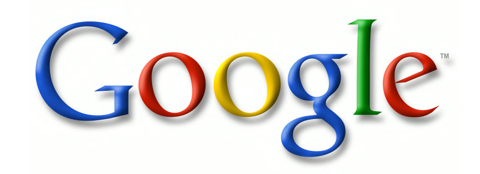
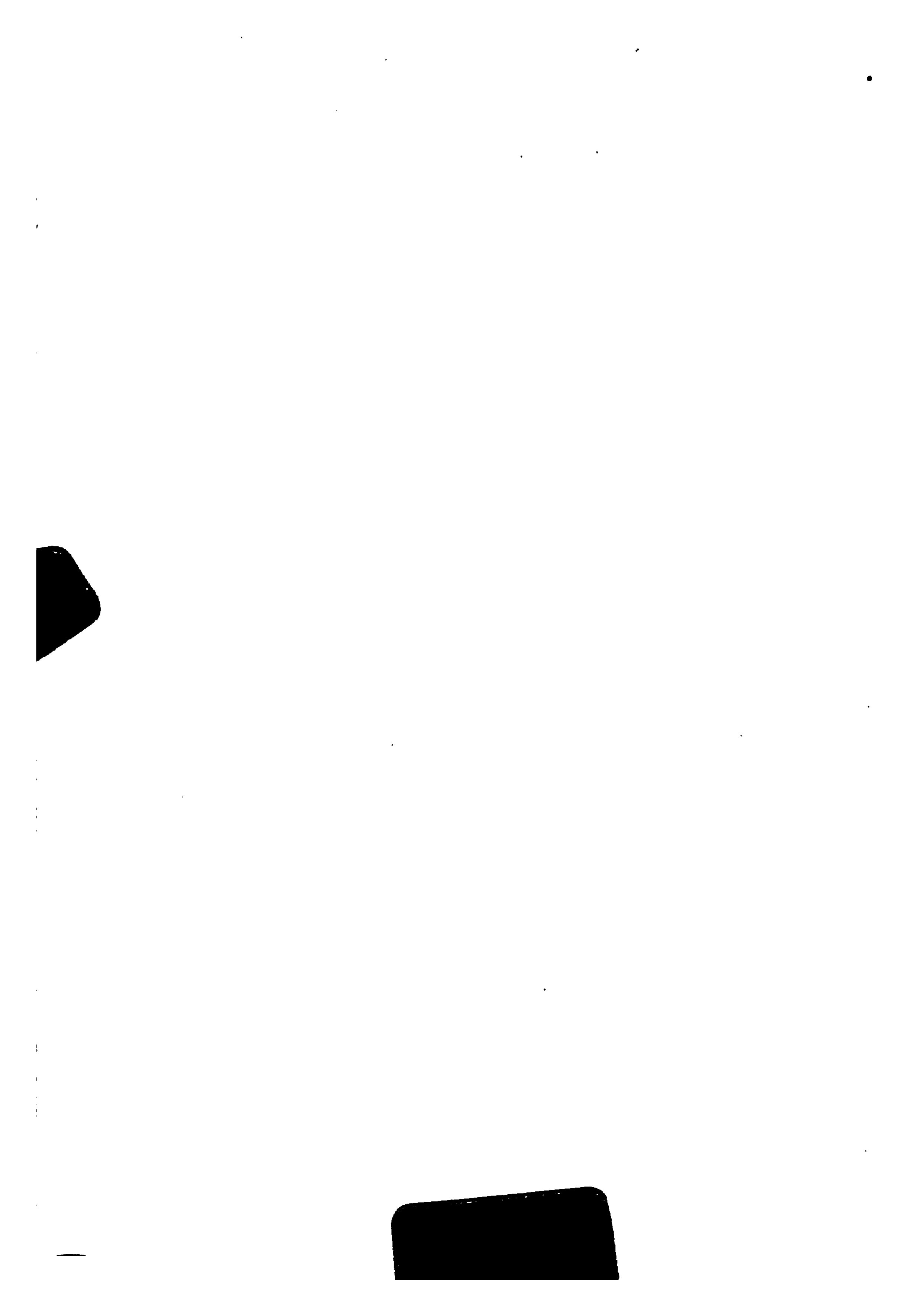




VORLESUNGEN

ÜBER

STATIK DER BAUKONSTRUKTIONEN UND FESTIGKEITSLEHRE

IN DREI BÄNDEN

VON

GEORG CHRISTOPH MEHRTENS

GEH. HOFRAT UND PROFESSOR DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN AN DER KÖNIGLICHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN DRESDEN

DRITTER BAND

FORMÄNDERUNGEN UND STATISCH UNBESTIMMTE TRÄGER

NEBST SACH- UND NAMENVERZEICHNIS ÜBER DAS GANZE WERK

MIT 330 ZUM TEIL FARBIGEN FIGUREN

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1905

VORWORT

zum dritten Bande.

Der dritte Band — mit dessen Erscheinen ich das Versprechen einlöse, wonach meine Vorlesungen im Jahre 1905 in drei Bänden fertig vorliegen sollten — umfaßt drei Abschnitte. Sie tragen die Überschriften: Formänderungen und Formänderungsarbeit; Statisch unbestimmte Systeme; Verschiedenes.

Der erste Abschnitt beginnt mit der Betrachtung der Formänderungsarbeit als Grundlage von Elastizitätsberechnungen (§ 1), wobei an Zahlenbeispielen gezeigt wird, wie man die Arbeitsgleichungen zur Lösung wichtiger statischer und dynamischer Festigkeitsaufgaben verwendet. Es folgen (§ 2—§ 4) ausführliche Abhandlungen über die Darstellung der elastischen Linien der Vollwandträger; über Berechnung und Darstellung von Punktverschiebungen, sowie auch über Darstellung von Biegelinien und Verschiebungsplänen statisch bestimmter Fachwerke. Dabei wird gezeigt, wie mit Hilfe der aus dem Satze der gedachten Verschiebungen hergeleiteten Arbeitsgleichungen Mohrs wichtige bestimmte oder unbestimmte Aufgaben der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen in der einfachsten Weise zu lösen sind. Auch wird an Zahlenbeispielen nachgewiesen, wie Biegelinien (nach dem Verfahren von Mohr), sowohl für die Formänderungen der Gurtstäbe, als auch der Wandstäbe gleich einfach gezeichnet werden können und daß solche Linien, wenn es sich um die Erzielung großer Genauigkeit handelt, den Verschiebungsplänen unbedingt vorzuziehen sind. Bei der Darstellung der Biegelinien von Stabzügen wird das Verfahren von Land verwendet. In § 5 wird unter der Überschrift: »Formänderungen, Tragkraft und Spannungen beim Knicken gerader Stäbe« die Theorie der Knickfestigkeit gegeben. Dabei werden sowohl die Euler-Formeln, als auch ältere Knickformeln des 19. Jahrhunderts berücksichtigt und in ihrer

Anwendung mit neueren, aus den Ergebnissen von Knickversuchen hergeleiteten Formeln verglichen. Übungsaufgaben und Tabellen zur Knickfestigkeit schließen den ersten Abschnitt.

Der zweite Abschnitt handelt von den statisch unbestimmten Systemen. Er beginnt (im § 6) mit der Entwicklung der allgemeinen Berechnungsarten der überzähligen Größen, und schließt mit Beispielen, die erläutern, wie in besondern Fällen das (statisch bestimmte) Hauptsystem zu bilden ist. § 7—§ 9 bringen Anwendungen der entwickelten allgemeinen Sätze und Gleichungen auf die Theorie der Bogenträger und der durchgehenden Träger. Der vollwandige und der gegliederte Bogen mit Kämpfergelenken (§ 7) sind gemeinschaftlich behandelt, unter Berücksichtigung verschiedener Formen von Parabelträgern, für welche Näherungsrechnungen angegeben werden. Auch die Theorie der Bogenträger ohne Gelenk wird für Vollwand und Fachwerk gemeinsam dargelegt. Ein Unterschied in der Behandlung beider ist nur insofern zu beachten, als für die Darstellung der Biegelinien des Hauptsystemes der Vollwandträger jede elastische Kraft aus einer Integration gewonnen werden muß, während sie für Fachwerksknoten unmittelbar gegeben ist. Die Berechnung der Vollwandträger wird vorangestellt, wobei die im zweiten Bande (unter **43**) bereits abgeleiteten Grundlagen der Elastizitätstheorie den Ausgang bilden. Ausführliche Zahlenbeispiele unterstützen die allgemeinen Darlegungen. Für die Berechnung der Steingewölbe wird sowohl das Momentenverfahren als auch das Kämpferkraftverfahren (Winkler-Landsberg) angewendet. Bei der Berechnung des gelenklosen Fachwerkbogens wird ein ausführliches Zahlenbeispiel gegeben, worin die erforderliche Ermittelung der elastischen Kräfte für Gurte und Wand getrennt gehalten sind, um danach den Einfluß der elastischen Formänderungen der Wandstäbe auf die Größe der Stabkräfte beurteilen zu können. In § 9 ist die Berechnung der durchgehenden Träger auf unverschiebbaren Stützen graphisch durchgeführt, sowohl für vereinfachte als auch für genaue Biegelinien.

Im Schußabschnitt wird »Verschiedenes« behandelt. Zuerst kommen die Nebenspannungen der Fachwerke. Dann folgen ähnliche schwierige theoretische Aufgaben, wie Berechnung durchgehender Träger auf verschiebbaren und auf elastisch drehbaren Stützen, sowie auch von Konstruktionen, die auf ihrer ganzen Länge

elastisch unterstützt sind*). Die vorhandenen Lösungen dieser Aufgaben erscheinen heute noch in einer für den Praktiker zu wenig verlockenden Hülle, als daß dieser geneigt wäre, sich darin bis auf den Kern zu verbeißen. Sie werden deshalb in dem vorliegenden, praktischen Zwecken gewidmeten Buche auch nur kurz gegeben, mehr als Vorbereitung für ein tieferes Studium, nicht aber als erschöpfende Wiedergabe aller darüber veröffentlichten besondern Abhandlungen. Eine ausführlichere Behandlung behalte ich mir für meine demnächst erscheinenden »Vorlesungen über Eisenbrückenbau« vor. In § 12 folgen geschichtliche Rückblicke auf die Lehre von der Elastizität und Festigkeit und die Statik der Baukonstruktionen. Dabei unterlasse ich nicht hervorzuheben, daß die von mir mit den Rückblicken verbundene Übersicht der wichtigsten Literaturquellen keinen Anspruch auf Vollständigkeit macht. Die größte Zahl der darin aufgenommenen Werke und Schriften sind solche, deren Verfasser die Grundsteine gelegt haben, auf denen das Gebäude der bezeichneten theoretischen Gebiete heute ruht. Daneben waren nur noch einzelne Namen zu nennen, deren Träger rühmlich mit geholfen haben, das Gebäude hoch und unter Dach zu bringen.

Auf diejenigen Stellen der Rückblicke, die von dem Versuche Müller-Breslaus handeln, die Bedeutung Mohrs zugunsten von Ausländern, wie Maxwell, Castigliano und Williot herabzusetzen, weise ich hier besonders hin**).

Herr Müller-Breslau wendet sich gelegentlich auch gegen mich. Dabei bringt er seine Auslassungen immer in versteckten Anmerkungen unter, die über verschiedene Bände seiner Schriften so zerstreut liegen, daß ich manche davon erst gelesen habe, nachdem Freunde mich darauf aufmerksam gemacht hatten. Ich mache aber Herrn Müller-Breslau meine Erwiderungen zugänglicher, als er mir seine Angriffe, und gebe deshalb unten die Stellen an, wo er sie und »noch manches andere« finden kann***).

---

*) Die hervorragende Abhandlung von ZIMMERMANN, die unter dem Titel: »*Der gerade Stab mit stetiger elastischer Stützung und beliebig gerichteten Einzellasten*« am 9. Nov. 1905 der K. Preuß. Akademie der Wissenschaften vorgelegt worden ist, konnte dabei leider nicht mehr berücksichtigt werden.

**) Vgl. S. 435, 441, 442, 445, 446.

***) Vgl. S. 262, 438, 439, 448.

Außer der Literaturübersicht enthält der Anhang zu allen drei Bänden (§ 13) auch noch eine alphabetische Inhaltsübersicht mit Sach- und Namenverzeichnis.

Somit übergebe ich denn meine Vorlesungen der Öffentlichkeit und empfehle sie wiederholt dem Wohlwollen meiner Fachgenossen. Meinem Assistenten, Herrn Regierungsbaumeister Hasse, der diesmal bei den Korrekturen und den Nachprüfungen der vielen schwierigen Rechnungen und graphischen Darstellungen viel Zeit und Mühe hat aufwenden müssen, danke ich an dieser Stelle nochmals herzlich für seine treue Mithilfe.

Auch der Verlagsbuchhandlung von Wilhelm Engelmann in Leipzig bin ich für ihre stete liebenswürdige und einsichtsvolle Bereitwilligkeit, meinen vielen Wünschen entgegenzukommen, viel Dank schuldig. Am Schlusse meiner Arbeit spreche ich daher der hochverehrten Firma meine aufrichtige Anerkennung aus, in der Hoffnung, noch lange mit ihr in angenehmer Verbindung zu bleiben.

Dresden, Anfang November 1905.

Mehrtens.

INHALT.

§ 3. Die Berechnung und Darstellung von Punktverschiebungen.

§ 4. Biegelinien und Verschiebungspläne statisch bestimmter Fachwerke.

Zweiter Abschnitt. Statisch unbestimmte Systeme.

§ 6. Die überzähligen Größen.

§ 7. Bogenträger mit zwei Kämpfergelenken.

Schlußabschnitt. Verschiedenes.

§ 10. Die Nebenspannungen der Fachwerke.

§ 11. Besondere Aufgaben.

Nachträgliche Berichtigungen zum II. Bande.

Seite	Zeile von oben	Zeile von unten	Figur	Steht falsch	Heißt richtig
66	—	—	58	Bezeichnung der Abzissen x_2 und x_3	Die Abzissenlänge darf nur bis zur Stützenlotrechten a gerechnet werden
81	16	—	—	max D	max $-D$
114	—	—	111	oben links bei der roten Linie: D	D'
304	—	1	—	In der linken Seite der Formel: G	G_1
305	2	—	—	Rechte Seite der Formel: λ_e	λ
313	—	9	—	$\Delta o i_1' k_1$	$\Delta o i_1 n$

Berichtigungen zum III. Bande.

Seite	Zeile von oben	Zeile von unten	Figur	Steht falsch	Heißt richtig
17	—	1	—	In der Formel: b^2	b
17	—	9	—	- - - : $\frac{h^2}{2}$	$\frac{h^2}{4}$
18	—	5	—	- - - : b^3	b^2
73	—	7	—	a	b
106	6	—	—	2 und 3	1 und 2
107	12	—	—	Rechte Seite der Gl. (88): $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$	$\pm \frac{1}{r_1} \mp \frac{1}{r_2}$
148	—	—	115	Scheibe III: zwei Stäbe a	1 Stab b
148	—	—	115	Scheibe VI: ein Stab b	2 Stäbe a
176	1	—	—	Querschnittszahl	Querschnittsform
241	1	—	—	Bogenkraftfläche	Biegefläche
288	—	—	227 228	Vorzeichen der Einflußflächen $+ -$ $- +$	$- +$ $+ -$
310	—	2	—	η_3	η_2
315	—	2	—	$\sum_a^b$	$\sum_a^c$

Erster Abschnitt.

Formänderungen und Formänderungsarbeit.

---

§ 1. Die Formänderungsarbeit als Grundlage von Elastizitätsberechnungen.

1. **Einleitung.** Die Bestimmung von Formänderungen und der während ihrer Dauer von den elastischen Widerständen geleisteten Arbeit — der Formänderungsarbeit — bildet nicht allein die theoretische Grundlage aller Berechnungen statisch unbestimmter Systeme (I. **2** und **35**), sie bietet für viele Konstruktionszwecke auch unmittelbar großen Nutzen. Namentlich können die beim Entwurfe bereits festgestellten Formänderungen einer Konstruktion durch einen Vergleich mit den im Laufe ihres Betriebes von Zeit zu Zeit zu messenden wirklichen Formänderungen, einen wertvollen Anhalt dafür bieten, ob und inwieweit die Konstruktion noch für ausreichend *elastisch* oder tragfähig gelten darf und anderseits auch, in welchen ihrer Punkte etwa die Verbindungen nicht mehr die erforderliche Sicherheit zeigen.

Bei der Berechnung der Formänderungen stehen in erster Linie die *Verschiebungen* von Angriffspunkten äußerer Kräfte — in Oberflächen- oder Knotenpunkten — in Frage. Ihre Darstellung erfolgt entweder in *elastischen Linien* (*Biegelinien*) oder in *Verschiebungsplänen* (§ 2—4). Vorher sollen aber allgemein gehaltene Betrachtungen über Formänderungen angestellt werden.

a. Erklärungen und Voraussetzungen.

1. Jeder physikalisch-feste Körper, und so auch der Baustoff, ändert unter der Einwirkung von äußern Kräften mehr oder weniger seine Form (I. **2**, a). In gleicher Art wirken auf den Körper dauernd die Massenkraft der Schwere, sowie vorübergehend und wechselnd auch die ihn umgebende Luftwärme (I. **8**). Der Körper nimmt unter dem Einflusse der bezeichneten Kräfte eine *Formänderung* an, die (je nach

dem Sinne der Kraftrichtungen) eine Verkleinerung oder Vergrößerung seines Rauminhaltes zur Folge hat.

Ist der Körper unter dem Einflusse von äußern Kräften außen und innen zur Ruhe gekommen, so befindet er sich im sog. *elastischen Gleichgewichte* (I. **2**, b). Dabei hat sich die (vor der Belastung vorhandene) gegenseitige, unendlich kleine Entfernung seiner Moleküle geändert, wodurch in jeder Schnittfläche des Körpers elastische Widerstände entstehen, die wir *Spannungen* nennen. Diese Spannungen — Normal- und Schubspannungen (I. **3**) — leisten während der Formänderung eine Arbeit, weil jede der äußern Kräfte, durch welche wir sie in der Schnittfläche ersetzt gedacht haben (I. **2**, b), dabei längs eines Weges wirkt, der durch eine *Dehnung* oder *Gleitung* (I. **5**) bestimmt ist. Auf solche Weise häuft sich in jedem Körperpunkte eine gewisse Energiemenge an, die, sobald die Belastung des Körpers aufhört, wieder frei wird und die in der Physik als *potentielle Energie* oder als das *Potential der elastischen Kräfte* bezeichnet wird. Dafür ist in der Technik der Name »*Formänderungsarbeit*« gebräuchlich.

2. Wenn ein Stab innerhalb seiner Elastizitätsgrenze gespannt wird, so setzt sich die dabei aufgewendete äußere Arbeit in potentielle Energie um. Wird aber die Elastizitätsgrenze überschritten, so wandelt sich ein Teil jener äußern Arbeit *in Wärme* um. Deshalb muß sich z. B. ein in der Festigkeitsmaschine eingespannter Stab, etwa von der Fließ- oder Streckgrenze ab (I. **4**, d), allmählich erwärmen. Im Augenblicke des Bruches fühlt er sich fast heiß an. Dagegen muß ein Stab, der während seiner Dehnung *bis zur Elastizitätsgrenze* von außen her keinerlei Zufuhr oder Ableitung von Wärme erfährt, sich abkühlen, wenn seine Temperaturabnahme auch nur wenige Tausendstel eines Grades beträgt. Aus gleichen Gründen muß auch die *kubische* (auf die Raumeinheit eines Stabes bezogene) Wärme verschieden groß sein, je nachdem der Stab sich im Spannungszustande befindet oder spannungslos ist. Solche geringe Wärmeunterschiede sind aber für die Statik der Baukonstruktionen von keiner Bedeutung (I. S. 15).

Wie im I. Bande (unter **8**) näher beschrieben ist, vergrößert oder verkleinert sich der Rauminhalt eines Körpers auch unter Temperatureinflüssen. Solange die dergestalt herbeigeführten Formänderungen im Körper sich *ungehindert* vollziehen, solange leisten die Molekularkräfte behufs Herstellung neuer Gleichgewichtslagen nur *innere Arbeit*. Sobald hierbei aber ein äußeres Hindernis eintritt, müssen die Molekularkräfte auch *äußere* Arbeit leisten und infolge dessen entstehen *Temperaturspannungen* im Körper. Deren Größe berechnet sich nach dem

Elastizitätsgesetze aus den Formänderungen, die der Körper durch den Widerstand erleidet, der sich seiner Raumveränderung infolge des Temperatureinflusses entgegensetzt (I. S. 15 u. Beispiele unter **4**).

Inwieweit der Einfluß der Luftwärme bei statischen Berechnungen berücksichtigt werden muß, ist im I. Bande (unter **36**) dargelegt worden. Ausführlicheres darüber folgt im 2. Abschnitt unter **33**.

3. Bei den folgenden Betrachtungen und Rechnungen ist — wenn nicht in Sonderfällen anders bestimmt wird — vorausgesetzt, daß alle äußern Kräfte (die an der Oberfläche eines Körpers angreifen) während der Belastung *von Null ab stetig solange wachsen*, bis das elastische Gleichgewicht zwischen ihnen und den innern Kräften (Spannungen) eingetreten ist. Dann muß auch jede innere Kraft stetig von Null ab bis zu einer gewissen Größe wachsen.

Auch setzen wir im allgemeinen voraus, daß die betrachteten Körper oder Konstruktionen in allen ihren Teilen und nach jeder Richtung hin, gleiche physikalische Eigenschaften besitzen, also *isotrop* sind. Dann ist für jede Längsrichtung das *Dehnungsmaß* E und für jede Querrichtung das *Gleitungs-* oder *Schiebungsmaß* G *unveränderlich* (I. **4**, **5**). Sind ferner E und G gegeben, oder aus Versuchen bestimmt worden, so ist die Aufgabe, für irgend einen Spannungszustand den zugehörigen Formänderungszustand eindeutig zu beschreiben, oder umgekehrt, *theoretisch* in jedem Falle zu lösen. Vom praktischen Standpunkte aus betrachtet fehlt es aber in vielen Fällen noch an zuverlässigen Zahlen für jene Erfahrungsmaße E und G, namentlich für Holz und Stein. Deshalb erscheinen die sich darauf stützenden Elastizitätsberechnungen für Holz und Stein, sowie auch für Stein-Eisenbauten, nicht immer zuverlässig. Mindestens aber sollten deren Ergebnisse mit großer Vorsicht aufgenommen werden. Das wird im einzelnen weiterhin noch näher darzulegen sein.

b. Der Formänderungszustand in einem Körperpunkte. Sobald der *Spannungszustand* eines Körperpunktes (I. **99**, b) eindeutig beschrieben werden kann — was bekanntlich möglich ist, *wenn für drei durch den Punkt gelegte, beliebige unendlich kleine Schnittflächen die Spannungen vorbestimmt worden sind* — so ist damit auch der Formänderungszustand des belasteten Körpers gegeben.

Wenn man danach durch einen Körperpunkt m drei rechtwinklige Koordinatenachsen X, Y, Z legt (Fig. 1) und den Punkt als Eckpunkt eines unendlich kleinen Parallelopipedes auffaßt, dessen Kanten dx, dy, dz in die betreffenden Achsenrichtungen fallen, so ist die in m wirkende Spannung ihrer Größe und Richtung nach durch *neun* Seitenspannungen bestimmt. Das sind

1) die *Normal*spannungen σ_x, σ_y, σ_z nach den Richtungen X, Y, Z;

2) die *Schub*spannungen τ_{xy} und τ_{xz}, τ_{yx} und τ_{yz}, τ_{zx} und τ_{zy}, von denen je zwei immer in derjenigen Ebene liegen, auf welcher die zugehörige Normalspannung senkrecht steht. Zur Normalspannung σ_x der YZ-Ebene gehören z. B. die Schubspannungen τ_{xy} und τ_{xz}. Der erste Buchstabe x ihres Zeigers gibt an, zu welcher Normalspannung sie gehören, während der zweite Buchstabe (y oder z) ihre Richtung festlegt.

Je zwei, sich in einer der Achsen X, Y, Z schneidende Schubspannungen sind einander gleich, weshalb sie als *zugeordnete* Schubspannungen bezeichnet werden. Deren Gleichheit folgt aus den drei

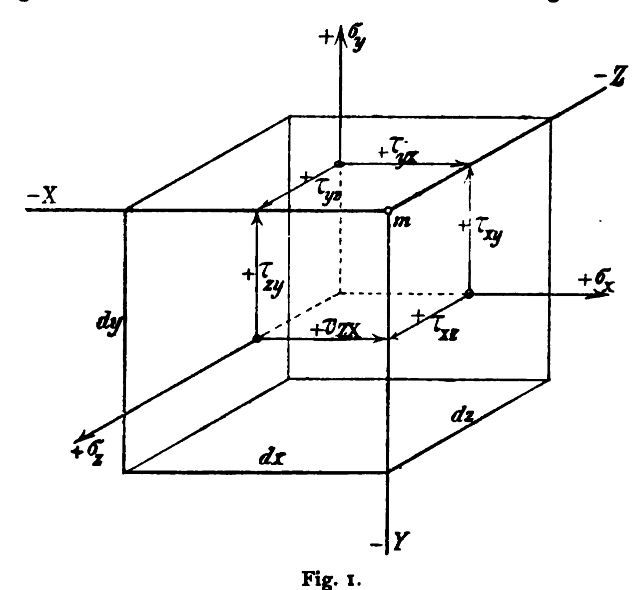


Fig. 1.

Gleichgewichts-Bedingungen gegen Drehung des Parallelopipedes um eine durch seinen Schwerpunkt verlaufende, einer Koordinatenachse parallele Achse (Fig. 1). Denn die Normalspannungen σ_x, σ_y, σ_z und ebenso auch immer *vier* der Schubspannungen haben kein Moment auf eine solche Achse, weil diese von den bezeichneten Spannungsrichtungen geschnitten wird. Das Moment der übrigbleibenden beiden Schubspannungen muß deshalb Null sein. Diese haben aber gleiche Hebelarme. Daraus folgen die drei Bedingungen

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \tau_x \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \tau_y \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \tau_z . \end{aligned} \qquad (1)$$

Die Spannung im Punkte m ist also durch die Normalspannungen σ_x, σ_y, σ_z und die Schubspannungen τ_x, τ_y und τ_z der Gl. (1) bestimmt. Damit sind auch die *Formänderungen* des Parallelopipedes gegeben. Denn nach I. **5** und I. **120** ist, unter der gemachten Voraussetzung isotroper Elastizität, ohne weiteres anzuschreiben:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right) \\ \alpha_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m}\right) \\ \alpha_z &= \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

wenn der Buchstabe α die betreffenden *Dehnungen* bezeichnet, sowie E das *Dehnungsmaß* und m die POISSONsche *Zahl* vorstellen (I. S. 8).

Die *Gleitungen* γ folgen aus der Gl. (5) auf S. 9 des I. Bandes mit

$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}; \quad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G}; \quad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G}, \tag{3}$$

wobei das *Gleitungsmaß* G aus dem Dehnungsmaße zu berechnen ist. Das geschieht mit Hilfe der Formel

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E, \tag{4}$$

die unter I. **101**, c (S. 321) abgeleitet worden ist und weiterhin (unter **3**, b) auf anderem Wege nochmals gefunden werden wird.

2. Dehnungsmaße und Gleitungsmaße.

a. Ihre Zuverlässigkeit für Elastizitätsberechnungen.

1. Unter den Konstruktionsstoffen zeigt allein das heute im Bauwesen bevorzugte *Flußeisen* nach allen Richtungen hin nahezu gleiche physikalische Eigenschaften. *Schweißeisen* besitzt niemals gleiche Festigkeitseigenschaften in der Länge und Quere seiner Walzrichtung. *Gußeisen* kommt als eigentlicher Konstruktionsstoff heute nicht mehr in Betracht, weil es im Vergleich zu seiner hohen Druckfestigkeit nur eine sehr kleine Zugfestigkeit besitzt.

Das Dehnungsmaß des Flußeisens ist durch zahlreiche Versuche festgestellt (II. **71**, a). Wenn es auch, wie das ja selbstverständlich erscheinen muß, nicht in allen Stäben eine Konstruktion völlig gleich groß ausfallen kann, so genügt es doch für alle technischen Rechnungen *ein unveränderliches* E vorauszusetzen, falls die Konstruktion nicht aus verschiedenen Baustoffen zusammengesetzt ist.

Auch das Gleitungsmaß liegt beim Flußeisen innerhalb enger Grenzen, wie das im I. Bande (unter **5**, a) angegeben ist. Danach empfiehlt es sich für die POISSONsche *Verhältniszahl* m zu setzen

bei *weichem* Flußeisen[1] (von höchstens etwa $44\,\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ Zugfestigkeit): $m = 3$

- *härterem* - - - - $60\,\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ - $m = \frac{10}{3}$.

Wählt man dazu

bei *weichem* Flußeisen . . . . . $E = 2000\,\frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$

- *härterem* - . . . . . $E = 2200\,\frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$,

so liegen die *Grenzen des Gleitungsmaßes* (I. **101**, c)

$$G = \frac{m}{2(m+1)}\,E$$

für *weiches* Flußeisen zwischen 750 und $770\,\frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$

- *härteres* - - 825 - $846\,\frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$.

2. *Stein*konstruktionen treten in der Neuzeit mit *Eisen*konstruktionen stark in Wettbewerb, besonders seit die Stein-Eisenbauten mehr und mehr in Aufnahme kommen (I. § 18). Dessenungeachtet stehen die Größen der Dehnungsmaße und Gleitungsmaße für die wichtigsten Steinsorten, so namentlich auch für die verschiedenen Betonmischungen, nicht so genau fest wie beim Eisen. Daher leiden besonders die Berechnungen von Stein-Eisenbauten immer noch an Unsicherheiten und deshalb sollte man diese *hinsichtlich der Sicherheit und unter sonst gleichen Umständen* verständigerweise niemals einer Eisenkonstruktion vorziehen.

Dehnungs- und Gleitungsmaße für *natürliche* Steine sind noch weniger genau anzugeben als für Gußeisen, das in seinem elastischen Verhalten den Steinen ähnlich ist (II. **71**). Für *Zementmörtel* und *Beton* gibt es zwar zahlreiche Versuchsergebnisse, diese weichen aber für gleiche Sorten häufig stark voneinander ab, worüber die im Anhange des II. Bandes (unter **71**) gemachten Angaben zu vergleichen sind. Die dort gegebenen wenigen *Dehnungs*zahlen (nach MÖRSCH) lassen deutlich erkennen, daß weder Zementmörtel noch Beton für beliebige Spannungszustände (wie das Flußeisen) als isotrop angesehen werden darf, denn

[1] Diese Flußeisensorte kommt für Eisenkonstruktionen fast allein in Betracht.

die Dehnungsmaße für Zug und für Druck sind sehr verschieden voneinander. Dazu kommt noch die sehr kleine Zugfestigkeit dieser Steinstoffe und die Tatsache, daß ihre Spannungen nicht im gleichen Verhältnisse mit den Dehnungen wachsen (I. **122**, a). Alles dies läßt erkennen, auf welchem unsicheren Boden die Elastizitätsberechnungen der Steinkonstruktionen sich heute noch bewegen und mit welcher Vorsicht ihre Ergebnisse benutzt werden sollten. Auch sollte im Hinblick darauf *der Sicherheitsgrad* (I. **7**, **12** und II. **45**, b) einer *Stein-* oder *Stein-Eisen*konstruktion immer entsprechend höher angesetzt werden, als dies bei gut ausgeführten Eisenkonstruktionen heute geschieht.

3. Was im vorigen über die Unsicherheit von Elastizitätsberechnungen der Stein- und Stein-Eisenbauten gesagt worden ist, gilt in noch höherem Maße für alle *Holz*konstruktionen. Das elastische Verhalten des Holzes ist viel unsicherer in Formeln zu fassen, als dasjenige der natürlichen und künstlichen Steine. Denn zufällige Umstände, wie der Einfluß des Bodens, des Standortes, der Lage des betreffenden Stückes im Baume, eingewachsene Äste u. dgl. mehr, lassen alle Elastizitätsberechnungen einer Holzkonstruktion als unzuverlässig und Versuche, deren Ergebnisse praktisch zu verwenden, als wertlos erscheinen.

Aus obigen Gründen beschränkt sich Verfasser darauf, in den Übungsaufgaben und Zahlenbeispielen des vorliegenden Bandes hauptsächlich nur Eisenbauten vorzuführen, und daneben unter besonderen Voraussetzungen nur noch einige der wichtigsten Stein- und Stein-Eisenbauten, wie Decken und Gewölbe.

b. Kubische Dehnung und Grenzen der POISSONschen Zahl. Nach **1**, a. hat die Formänderung eines Körpers eine Verkleinerung oder eine Vergrößerung seines Rauminhaltes zur Folge. Je nach dem Sinne der Belastung wird das eine oder das andere eintreten. Gilt dies für Baustoffe als richtig, so kann z. B. der Rauminhalt eines Stabes durch eine *positiv* wirkende Achsenkraft in keinem Falle verkleinert werden, ebensowenig wie er durch eine *negative* Achsenkraft vergrößert werden kann. Dieser Erfahrungssatz gibt ein Mittel an die Hand, um die untere Grenze der POISSONschen *Zahl* m zu berechnen. Zu dem Zwecke betrachten wir die Formänderung eines unendlich kleinen Parallelopipedes, auf welches nach der X-Richtung eine Achsenkraft wirkt. Sein ursprünglicher Rauminhalt $dV = dx\,dy\,dz$ geht über in

$$dV + \Delta dV = dx(1 + \alpha_x)\,dy(1 + \alpha_y)\,dz(1 + \alpha_z).$$

Die Produkte aus den Dehnungen α als unendlich kleine Größen höherer Ordnung verschwinden gegenüber denjenigen 1. Ordnung. Man erhält dann

$$dV + \varDelta\, dV = dx\, dy\, dz(1 + \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z)$$

oder

$$dV + \varDelta\, dV = dV + dV(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z),$$

in welchem Ausdrucke der zweite Summand der rechten Seite *die Änderung von dV* angibt. Bezieht man diese *auf die Einheit des ursprünglichen Rauminhaltes*, so erhält man dadurch die sog. *kubische Dehnung* α_k, die darnach mit

$$\alpha_k = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z \qquad (5)$$

anzuschreiben ist. Die Gl. (5), auf den linearen Spannungszustand angewendet, gibt nach Gl. (2), und weil hier $\sigma_y = \sigma_z = 0$ ist,

$$\alpha_x = \pm \frac{\sigma_x}{E}; \quad \alpha_y = \alpha_z = \mp \frac{1}{m}\frac{\sigma_x}{E}$$

oder

$$\alpha_k = \pm \frac{\sigma_x}{E}\left(\frac{m-2}{m}\right), \qquad (6)$$

wobei das obere Zeichen für eine positive, das untere für eine negative, in der X-Achse wirkende, Achsenkraft gilt.

Aus der Gl. (6) folgt für $\alpha_k = 0$ die *untere Grenze* der Poissonschen Zahl mit $m = 2$. Für die Baustoffe ist der Erfahrung nach m größer als 2. Für *Holz und Stein* sind sichere Werte nicht anzugeben. Für *Gußeisen* sind Angaben (II. **71**) mit Vorsicht zu gebrauchen. Für schmiedbares Eisen vgl. die Angaben unter I. **5**, a.

Weil die Größe der *Querdehnung* des Eisens heute in vielen Fällen als ein Maß für dessen Zähigkeit gilt, so wird *mit zunehmender Härte und abnehmender Zähigkeit des Metalls m größer* zu wählen sein. Für Konstruktionsflußeisen wählt man, je nach seiner Härte, wie (unter a.) bereits angegeben, $m = 3$ bis $3\frac{1}{3}$. Auch die *Zugfestigkeit* des Eisens kann bei der Wahl von m als Anhalt dienen, weil im allgemeinen Zugfestigkeit und Härte des Metalls gemeinsam wachsen, wobei die Zähigkeit abnimmt, also m größer wird.

Die *obere Grenze* von m, für die härtesten Stoffe, wird heute gewöhnlich zu 4 angenommen. *Konstruktions*stoffe, bei denen derartige geringe Querdehnungen vorkommen könnten, werden nur selten verwendet. Trotzdem kann man in Einzelfällen in die Lage kommen, von der Zahl $m = 4$ Gebrauch zu machen und zwar namentlich dann, wenn man mit *maßgebenden Spannungen* zu rechnen hat und diese der Sicherheit wegen *hoch genug* greifen möchte. Denn (nach I. **120**, c) wächst die Spannung σ_{ma} mit der Poissonschen Zahl und wird für $m = 4$ am größten. Dagegen beachte man, daß Dehnungen und Gleitungen, also auch die zugehörigen Formänderungsarbeiten, mit dem Wachsen

von E und G kleiner werden, daß es also unter Umständen (wenn man Grund hat, hoch zu greifen) auch geraten sein kann, die POISSONsche Zahl *möglichst klein* zu wählen.

3. Die Formänderungsarbeit eines Körpers.

a. Allgemeiner Ausdruck der Formänderungsarbeit. Wenn irgend eine äußere oder innere Kraft, wie vorausgesetzt, *von Null ab bis auf eine bestimmte Größe P* wächst und dabei in ihrer Richtung den beliebig großen Weg δ zurücklegt, so bildet das zugehörige *Schaubild ihrer Arbeit* ein Dreieck (Fig. 2), wenn in jedem Augenblicke der Formänderung Kraft und Weg einander proportional sind. Die Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}$ ist in solchem Falle gleich dem Inhalte des Dreiecks, d. h. es ist

$$\mathfrak{A} \doteq \tfrac{1}{2} P \cdot \delta \,. \tag{7}$$

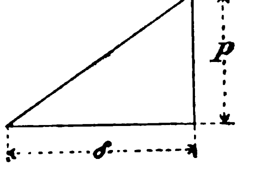


Fig. 2.

In Worten: *Die Formänderungsarbeit ist gleich dem halben Produkte aus der Kraft mal dem in ihrer Richtung zurückgelegten Wege.* An Stelle einer Einzelkraft P kann natürlich auch ein Kräftepaar treten. Ist dessen Moment M und der zugehörige Verdrehungswinkel φ, so geht Gl. (7) über in

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} M\varphi \,. \tag{8}$$

Über *dynamische Arbeit* vgl. die Beispiele unter **4**, b.

Darnach findet man die differentiale Arbeit einer Normalspannung σ_x in einem Körperpunkte wie folgt: Die Spannkraft in der betreffenden Parallelopipedfläche (Fig. 1) ist gleich $\sigma_x \cdot dy \cdot dz$ und der von ihr zurückzulegende Weg ist gleich der Längenänderung jeder der Kanten dx, also ist

$$d\mathfrak{A}_{\sigma x} = \tfrac{1}{2}(\sigma_x \, dy \, dz)(\alpha_x \, dx)$$

und in Verbindung mit den Gleichungen (2)

$$d\mathfrak{A}_{\sigma x} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 - \left(\frac{\sigma_y \sigma_x + \sigma_z \sigma_x}{m}\right)\right](dx \, dy \, dz) \,.$$

Die Formänderungsarbeit *einer* der Schubspannungen findet man in ähnlicher Weise. Die Gleitung des Punktes m in der Richtung der X-Achse wird durch die Schubkraft

$$\tau_x \, dx \, dz$$

bewirkt. Sie ist in Winkelbogenmaß ausgedrückt gleich $\gamma_x dy$, worin γ_x die Änderung der rechten Winkel der $dx\,dy$-Flächen des Parallelopipeds und dy den Halbmesser der Winkelverdrehung bedeutet (I. **3**, b),

wobei man die untere, der $dx\,dz$-Fläche parallele Fläche festliegend zu denken hat. Die zugeordneten Schubspannungen τ_x in der $dy\,dz$-Fläche stehen *senkrecht* zur Gleitungsebene, verrichten also keine Arbeit. Die Gesamtarbeit der beiden zugeordneten Schubkräfte beträgt demnach

$$d\mathfrak{A}_{\tau x} = \tfrac{1}{2}(\tau_x \cdot dx\,dz)\gamma_x dy,$$

also mit Bezug auf die Gleichungen (3)

$$d\mathfrak{A}_{\tau x} = \frac{\tau_x^2}{2G}(dx\,dy\,dz).$$

Berechnet man auf solche Weise auch noch die Arbeiten von τ_y, τ_z, σ_y, σ_z und addiert sie zu derjenigen von σ_x und τ_x, so erhält man für die Formänderungsarbeit eines Körperpunktes:

$$d\mathfrak{A} = \frac{1}{2E}\left[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{2}{m}(\sigma_y\sigma_x + \sigma_z\sigma_y + \sigma_x\sigma_z)\right] dx\,dy\,dz$$
$$+ \frac{1}{2G}(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)(dx\,dy\,dz).$$

Die gesamte *Formänderungsarbeit des Körpers* findet man durch dreifache Integration innerhalb gegebener Grenzen. Der allgemeine Ausdruck dafür lautet:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2E}\int\left[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{2}{m}(\sigma_y\sigma_x + \sigma_z\sigma_y + \sigma_x\sigma_z)\right] dV$$
$$+ \frac{1}{2G}\int(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)\,dV. \qquad (9)$$

Darin wurde an Stelle von $dx\;dy\;dz$ der Inhalt dV des Parallelopipedes gesetzt. Hätte man dessen Kantenlängen von vornherein gleich der Einheit angenommen, so würde der Faktor dV in Gl. (5) verschwinden und die Gleichung dann die *Formänderung für die Kubikeinheit des Körpers darstellen.*

b. Die Formänderungsarbeit in besondern Fällen.

1. Hat man es nicht mit einem räumlichen, sondern nur mit einem *ebenen* Formänderungszustande zu tun (I. **120**), so verschwindet in der Fig. 1 die Z-Achse, und somit verschwinden in den Gleichungen (1) und (9) auch alle Glieder, deren Zeiger das z enthält, d. h.

$$\sigma_z = 0\,; \quad \sigma_z\sigma_y = 0\,; \quad \sigma_x\sigma_z = 0$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_y = 0$$
$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_z = 0.$$

Die Gl. (9) geht dann über in

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2E}\int\left[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{2}{m}(\sigma_y\sigma_x)\right] dV + \frac{1}{2G}\int\tau_x^2\,dV. \qquad (10)$$

In praktischen Fällen, namentlich bei der Berechnung von geraden oder krummen Stäben auf Biegungs- oder Verdrehungsfestigkeit, kann — wie es schon im I. Bande (unter **116**) geschehen ist — auch die Normalspannung σ_y als verschwindend vernachlässigt werden. Für alle solche *ebene* Formänderungsfälle darf man dann anschreiben

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G}\right) dV, \tag{11}$$

worin σ und τ die bekannte Bedeutung haben (vgl. Fig. 347 des I. Bandes). In derartigen Fällen darf man sogar meist auch die Schubspannung τ vernachlässigen, weil sie im Vergleich mit der Normalspannung σ — wie weiterhin (unter **4**, **5** und **8**) nachgewiesen werden soll — *zur Formänderung im allgemeinen nur einen verschwindend kleinen Beitrag liefert.*

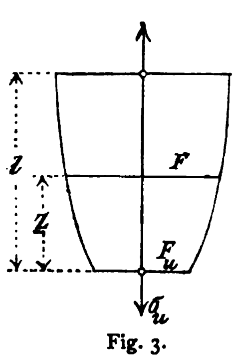


Fig. 3.

2. Beim *linearen* Formänderungszustande, wie er bei einem nur durch eine *Achsenkraft* belasteten Stabe vorkommt, ist $\tau = 0$.

Gl. (11) geht also über in

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\int\frac{\sigma^2}{E} dV. \tag{12}$$

Ist dabei der Querschnitt F des Stabes *veränderlich* (Fig. 3) und z. B. die über den kleineren Endquerschnitt F_u gleichmäßig verteilte Normalspannung gleich σ_u, so muß für jeden Querschnitt

$$\sigma_u F_u = \sigma F$$

sein. Das gibt für einen Stab der Länge l (nach Gl. 12)

$$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_u^2 F_u^2}{2E}\int_0^l \frac{dV}{F^2} = \frac{\sigma_u^2 F_u^2}{2E}\int_0^l \frac{dz}{F}.$$

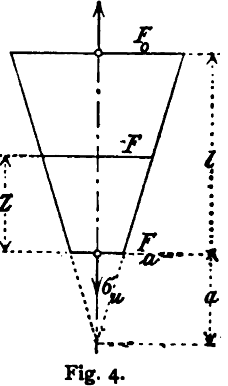


Fig. 4.

Für *pyramidenförmige* Stäbe (Fig. 4), deren Endflächen F_u und F_o sind, erhält man aus Gl. (12), weil

$$F = F_o\left(\frac{z + a}{l + a}\right)^2$$

und wenn zwischen a und $(l + a)$ integriert wird:

$$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_u^2 F_u l}{2E}\sqrt{\frac{F_u}{F_o}}. \tag{13}$$

Das gibt für *überall gleichen Querschnitt* F und die Stablänge l

$$\mathfrak{A} = \frac{\sigma^2 l F}{2 E} = \frac{\sigma^2}{2E} V, \tag{14}$$

was auch unmittelbar aus der Gl. (12) folgt, wenn darin σ *unveränderlich* gesetzt wird.

c. Der ebene Formänderungszustand bei reiner Schubbeanspruchung. Wenn in vier Flächen des in Fig. 5 dargestellten Würfels Schubspannungen auftreten, die senkrecht zur Z-Achse gerichtet sind, während die übrigen beiden (zur Z-Achse senkrechten) Würfelflächen spannungsfrei bleiben, so liegt der Fall einer reinen Schubbeanspruchung vor. Die Schubspannungen sind dann *Hauptschubspannungen* τ, für welche die Normalspannungen verschwinden (I. **119**, **120**). Sie erzeugen in den beiden zur Z-Achse parallelen Diagonalebenen (nach I. **101**) Normalspannungen, die ihnen an Größe gleich sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben.

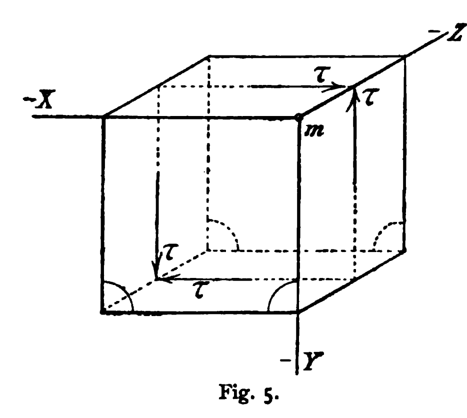


Fig. 5.

Denkt man sich in Fig. 5 — wie es auch in Fig. 302, S. 319 des ersten Bandes dargestellt ist — die Formänderung dadurch herbeigeführt, daß die rechten Winkel der beiden spannungsfreien Würfelflächen sich um γ ändern, so leistet allein die Schubspannung der oberen Würfelfläche eine Arbeit. Denn die untere Würfelfläche darf festliegend gedacht werden und die *senkrecht* zur Gleitungsrichtung wirkenden beiden Schubspannungen verrichten keine Arbeit.

Die Gleitungsarbeit ist demnach

$$\tfrac{1}{2}(\tau\, dx\, dz)\, \gamma\, dy$$

oder

$$\partial \mathfrak{A}_s = \tfrac{1}{2} \tau \gamma\, dV.$$

Das gibt

$$\partial \mathfrak{A}_s = \frac{\tau^2}{2G} dV,$$

was auch (für $\sigma = 0$) unmittelbar aus der Gl. (11) folgt. Die Arbeit der Schubspannungen τ ist aber gleich der Arbeit der von ihnen erzeugten Normalspannungen der Diagonalebenen des Würfels. Mit andern

Worten: die beiden Summanden der Gl. (9) müssen einander gleich sein, wenn darin

$$\tau_x = \tau$$

$$\sigma_x = +\tau \quad \text{und} \quad \sigma_y = -\tau$$

gesetzt wird. Man erhält dann

$$\frac{1}{2E}\left[(\tau^2 + \tau^2) + \frac{2}{m}(\tau^2)\right] dV = \frac{\tau^2}{2G} dV$$

und daraus

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E.$$

Das ist die bekannte *Beziehung zwischen den Maßen der Gleitung und der Dehnung*, die im I. Bande (unter **101**, c) auf anderem Wege abgeleitet worden ist.

4. Übungsaufgaben.

a. Normal-Biegungs- und Drehungselastizität.

Aufgabe 1. *Ein 20 cm langer, zylindrischer Eisenstab von 5 cm² Querschnitt wird in der Festigkeitsmaschine durch eine Achsenkraft $P = 8^t$ um $\frac{1}{1250}$ seiner Länge gedehnt. Wieviel Sekunden beträgt dabei die größte Winkeländerung γ, wenn die Poissonsche Zahl zu $3\frac{1}{3}$ angenommen wird?*

Es handelt sich um einen linearen Belastungsfall. Die Normalspannung σ berechnet sich aus

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{8000}{5}$$

mit

$$\sigma = 1600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Diese Spannung liegt noch *innerhalb* der Elastizitätsgrenze des Schweißeisens (I. **7**, a). Das Elastizitätsgesetz (I. **4**) darf also hier als noch gültig angesehen werden. Daraus folgt:

$$E = \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{1600}{\frac{1}{1250}} = 2000 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}.$$

Nach Gl. (4) ist ferner

$$G = \frac{10}{3 \cdot 2(\frac{10}{3} + 1)} 2000 = 769 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}.$$

Daraus folgt die Winkeländerung

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\tau}{769}.$$

Die größte Schubspannung τ ist aber (nach I. **100**, b) gleich der Hälfte der Normalspannung σ. Das gibt

$$\gamma = \frac{800}{769000} = \frac{1}{961} .$$

Der zu einer Sekunde gehörige Bogen ist gleich

$$\frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} = 4{,}85 \cdot 10^{-6} ,$$

woraus

$$\gamma = \frac{1\,000\,000}{4{,}85 \cdot 961} = 214 \text{ Sekunden}$$

oder

$$\gamma = 3' \, 34'' .$$

Wenn man also auf dem Umfange des Stabes, unter einer Neigung von 45° zur Stabachse, zwei aufeinander senkrechte Linien zöge, so müßten sich in deren Schnittpunkte die rechten Winkel um die oben berechnete Größe ändern.

Aufgabe 2. *Ein lotrecht gestellter Eisenstab, in Gestalt eines abgestumpften Kegels erfährt eine Achsenkraft* $P = 10$ t. *Die Kegelhöhe beträgt* 24 cm, *der Inhalt seiner Endflächen berechnet sich oben auf* 20 cm², *unten auf* 11,25 cm². *Das Eigengewicht des Stabes ist mit* $\gamma_e = 7{,}8 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$ *anzurechnen. Wie groß ist die durch die Belastung hervorgerufene Formänderungsarbeit, wenn die Achsenkraft über die Endflächen gleichmäßig verteilt angenommen werden darf?*

Fig. 6.

Die allein aus der *Achsenkraft* herrührende Arbeit berechnet sich nach der Gl. (13) mit

$$\mathfrak{A}_p = \frac{\left(\frac{P}{F_u}\right)^2 F_u \cdot l}{2E} \sqrt{\frac{F_u}{F_o}}$$

oder

$$\mathfrak{A}_p = \frac{P^2}{2E} \frac{l}{\sqrt{F_o F_u}} .$$

Das gibt

$$\mathfrak{A}_p = \frac{10 \cdot 10 \cdot 24}{2 \cdot 2000 \sqrt{225}} = \frac{1}{25} \text{ cmt} = 40 \text{ cmkg.}$$

Um die durch das *Eigengewicht* hervorgebrachte Arbeit zu berechnen, ist zu bedenken, daß hier die *Achsenkraft veränderlich* ist. Sie nimmt von Null in der Fläche F_o bis zur Fläche F_u stetig zu. Allgemein ist

$$P = \gamma_e \int_0^z F\,dz\,. \tag{15}$$

Die Arbeit für eine Scheibe von der Höhe dz berechnet sich (nach Gl. 14) mit

$$d\mathfrak{A}_e = \frac{\sigma^2}{2E} F\,dz = \frac{P^2}{2EF}\,dz\,.$$

Daraus

$$\mathfrak{A}_e = \frac{1}{2E}\int_0^l \frac{P^2}{F}\,dz\,.$$

Aus geometrischen Beziehungen findet man

$$F = \left[\sqrt{F_u} + \frac{z}{l}\left(\sqrt{F_o} - \sqrt{F_u}\right)\right]^2.$$

Setzt man

$$\sqrt{F_o} - \sqrt{F_u} = C\,,$$

so erhält man

$$P = \gamma_e \int_0^z \left[F_u + C^2\frac{z^2}{l^2} + \frac{2zC}{l}\sqrt{F_u}\right] dz$$

oder

$$P = \gamma_e\left(F_u z + \frac{C^2 z^3}{3l^2} + \frac{C\sqrt{F_u}\,z^2}{l}\right).$$

Dies mit der Arbeitsgleichung verbunden gibt

$$\mathfrak{A}_e = \frac{\gamma_e^2}{2E}\int_l^0 \frac{\left(F_u z + \frac{C\sqrt{F_u}\,z_2}{l} + \frac{C^2 z^3}{3l^2}\right)}{\left(\sqrt{F_u} + \frac{Cz}{l}\right)^2}\,dz\,.$$

Unter Anwendung des Summationsverfahrens erhält man schließlich

$$\mathfrak{A}_e = \frac{\gamma_e^2 l^3}{18E}\left[\frac{F_u^2}{C^2} + \frac{F_u^3}{C^3 F_o^{1/2}} - \frac{C^2}{5} - CF_u^{1/2} - 2F_u - \frac{F_u^{3/2}}{C}\right]$$

und für die gegebenen Zahlenwerte

$$\mathfrak{A}_e = 0{,}00000628 \text{ cmkg},$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_p + \mathfrak{A}_e = 40 + 0{,}00000628 = 40{,}00000628 \text{ cmkg}.$$

Aufgabe 3. *Ein weicher Flußeisenstab von überall gleichem rechteckigen Querschnitte F (der Breite b und Höhe h) liegt wagerecht, und an seinen Enden auf die Länge l frei gestützt. Er trägt (einschließlich seines Eigengewichtes) eine gleichmäßig verteilte Vollast von* $p\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}$. *Wie groß ist seine Formänderungsarbeit: 1) ohne, 2) mit Berücksichtigung der Schubspannungen und wie groß ist seine kubische Arbeit?*

1) Hier würde die Gl. (11) maßgebend sein. Die *Arbeit der Normalspannungen* ist danach

$$\mathfrak{A}_n = \frac{1}{2}\int \frac{\sigma^2}{E}\, dV.$$

Die Spannung σ in einem Punkte der Koordinaten x, y des Querschnittes (Fig. 7) ist nach der Gl. (97) des I. Bandes (unter **104**, a) anzuschreiben mit

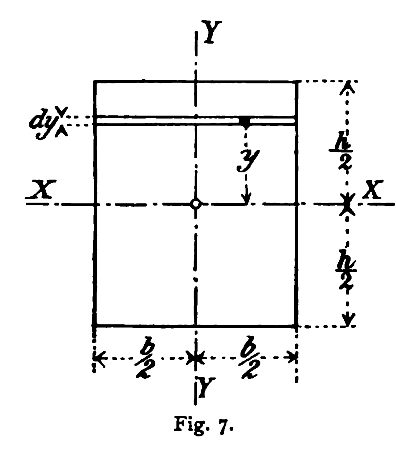


Fig. 7.

$$\sigma = \frac{My}{J_x}.$$

Fassen wir dV als eine Faser von der Breite b, der Höhe dy und der Stärke dz auf, so gilt

$$dV = b \cdot dy \cdot dz.$$

Das gibt

$$\mathfrak{A}_n = \frac{b}{2\,EJ_x^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2\, dy \int_0^l M^2\, dz$$

oder

$$\mathfrak{A}_n = \frac{bh^3}{24\,EJ_x^2}\int_0^l M^2\, dz = \frac{1}{2\,EJ_x}\int_0^l M^2\, dz. \qquad (16)$$

Es ist aber für einen beliebigen Querschnitt in der Entfernung z von einer Stütze

$$M = \frac{p}{2}(lz - z^2).$$

Dies eingesetzt gibt

$$\mathfrak{A}_n = \frac{p^2}{8\,EJ_x}\int_0^l (lz - z^2)^2\, dz$$

oder

$$\mathfrak{A}_n = \frac{p^2\, l^5}{240 \cdot E \cdot b \cdot h^3} \text{ in cmkg.} \qquad (17)$$

Es sei nun

$$p = 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}},$$

$$l = 8\text{ m},$$

$$b = 10\text{ cm} \quad \text{und} \quad h = 20\text{ cm},$$

$$E = 2000\,\frac{\text{t}}{\text{cm}^2}.$$

Das gäbe

$$\mathfrak{A}_n = \frac{10^2 \cdot 800^5}{240 \cdot 2000\,000 \cdot 10 \cdot 20^3} = 853\tfrac{1}{3} \text{ cmkg.}$$

Die Rechnung gilt aber nur für den Fall, daß bei der Belastung des Stabes die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird. Um dies nachzuprüfen ist die *Randspannung* σ zu berechnen (I. **104**, c). Es ist

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6 \cdot p\, l^2}{8 \cdot b \cdot h^2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 800^2}{8 \cdot 10 \cdot 20^2} = 1200 \text{ atm,}$$

also etwa nur *halb so groß* als die Elastizitätsgrenze des weichen Flußeisens.

2) Die *Arbeit der Schubspannungen* ist nach Gl. (11)

$$\mathfrak{A}_s = \frac{1}{2}\int \frac{\tau^2}{G}\, dV$$

und nach Gl. (115) des I. Bandes (unter **114**, a) ist allgemein

$$\tau = \frac{QS}{b \cdot J}.$$

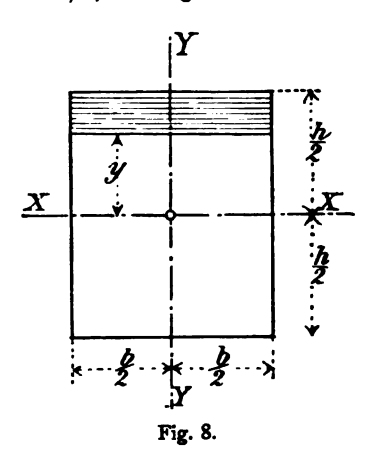


Fig. 8.

Im vorliegenden Falle ist anzuschreiben

$$Q = p\left(\frac{l}{2} - z\right)$$

und mit Bezug auf Fig. 8:

$$S = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{y + \frac{h}{2}}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{2} - y^2\right)$$

$$J = \frac{1}{12} b h^3.$$

Daraus berechnet sich

$$\tau = \frac{3Q}{2bh}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

und die Arbeit mit

$$\mathfrak{A}_s = \frac{9p^2}{8b^2h^2G}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)^2 dy \int_0^l \left(\frac{l}{2} - z\right)^2 dz.$$

Nach erfolgter Integration erhält man danach

$$\mathfrak{A}_s = \frac{p^2 l^3}{16 b^2 h G} \text{ in cmkg.} \tag{18}$$

Wir wählen für das Gleitungsmaß (nach **2**, a) den *kleinsten* Wert, um die *größte* Arbeit zu erhalten, also

$$G = 750\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\,.$$

Dann erhält man

$$\mathfrak{A}_s = \frac{10^2 \cdot 800^3}{16 \cdot 10^2 \cdot 20 \cdot 750\,000} = 2{,}0133 \text{ cmkg}$$

und daraus

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_n + \mathfrak{A}_s = 853{,}33 + 2{,}01 = 855{,}34 \text{ cmkg}.$$

Danach erscheint die Arbeit der Schubspannungen als *sehr klein* gegenüber der Arbeit der Normalspannungen. In vielen praktischen Fällen kann man deshalb den Einfluß der Schubspannungen vernachlässigen (vgl. unter **5**, d und **8**).

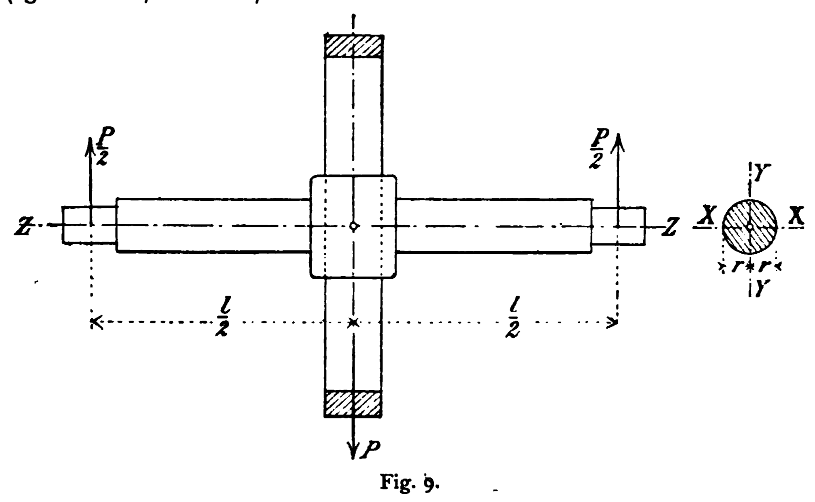


Fig. 9.

3. Unter der *kubischen Arbeit* verstehen wir (wie unter **2**, b bei der kubischen Dehnung) die auf *die Raumeinheit* bezogene Arbeit.

Also

$$\mathfrak{A}_{nk} = \frac{p^2 l^4}{240 E b^2 h^4}$$

und (19)

$$\mathfrak{A}_{sk} = \frac{p^2 l^2}{16 b^3 h^2 G}\,.$$

Aufgabe 4. *Eine in ihrer Mitte durch ein Schwungrad vom Gewichte P belastete zylindrische Stahlwelle vom Durchmesser $2r$* (Fig. 9) *erleidet* (*abgesehen von dynamischen Wirkungen*) *bei ihrem Antriebe eine Verdrehung infolge der Zapfenreibung in ihren Lagern. Wie groß ist*

die dadurch verursachte Formänderungsarbeit, wenn der Zapfendurchmesser gleich $\frac{3}{4}$ des Wellendurchmessers und die Zapfenreibungszahl gleich 0,2 gesetzt werden darf?

Die Verdrehungsarbeit für sich ist nach Gl. (11) mit

$$\mathfrak{A}_\tau = \frac{1}{2G}\int \tau^2 dV$$

anzuschreiben.

Darin ist (nach Gl. 92 des I. Bandes, unter **102**, a) und mit Bezug auf die Fig. 9 $\tau = \tau_r\left(\frac{\varrho}{r}\right)$, wenn ϱ den Abstand eines beliebigen Querschnittpunktes dF von der Wellenachse und τ_r die Randtorsionsspannung bedeutet. Das Differential der Arbeit *zwischen zwei Nachbarquerschnitten* im Abstande »Eins« beträgt danach

$$d\mathfrak{A}_\tau = \frac{\tau_r^2}{2r^2G}\int \varrho^2 dF,$$

worin das Integral gleichbedeutend mit dem *polaren* Trägheitsmoment J_p des Querschnittes ist. Man erhält also

$$d\mathfrak{A}_\tau = \frac{\tau_r^2 J_p}{2r^2G}$$

und ferner

$$\mathfrak{A}_\tau = \frac{\tau_r^2 J_p}{2r^2G}\int_0^l dz = \frac{\tau_r^2 J_p l}{2r^2G}.$$

Es ist aber

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2}$$

und

$$V = r^2 \pi l,$$

woraus

$$\mathfrak{A}_\tau = \frac{\tau_r^2 V}{4G} \tag{20}$$

und die *kubische* Arbeit

$$\mathfrak{A}_{\tau k} = \frac{\tau_r^2}{4G}$$

folgt.

Nach der Gl. (93) des I. Bandes (unter **102**, a) ist die *Rand*-Torsionsspannung

$$\tau_r = \frac{2M}{r^3\pi} = \frac{Mr}{J_p}.$$

Dies in Gl. (20) eingesetzt gibt

$$\mathfrak{A}_\tau = \frac{M^2 l}{\pi r^4 G} = \frac{M^2 l}{2J_pG}. \tag{21}$$

Es betrage nun

$$r = 10\ \text{cm};\quad P = 20\ \text{t};\quad l = 160\ \text{cm};\quad G = 825\ \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}.$$

Dann ist das Reibungsmoment

$$M = \frac{P}{2} \cdot 0{,}2 \cdot \frac{3}{4}\, r = \frac{3P}{4} = 15\,000\ \text{cmkg}$$

und

$$\mathfrak{A}_r = \frac{15\,000^2 \cdot 160}{3{,}14 \cdot 10^4 \cdot 825\,000} = 0{,}14\ \text{cmkg},$$

also eine sehr kleine Größe.

b. Temperatureinflüsse.

Aufgabe 5. *Ein an beiden Enden eingespannter gerader weicher Flußeisenstab ist bei einer Luftwärme von* + 10° C. *spannungslos und wird dann künstlich bis auf* — 60° C. *abgekühlt. Wie groß ist die dadurch in ihm hervorgebrachte kubische Formänderungsarbeit, wenn die Temperaturdehnung des Eisens für* 1° C. *gleich* 0,000012 *angenommen wird?*

Für 60 + 10 = 70° würde die Dehnung α_t des an einem Ende frei gemachten Stabes mit

$$\alpha_t = 70 \cdot 0{,}000012 = 0{,}00084$$

anzuschreiben sein. Das entspräche einer Spannung

$$\sigma_t = \alpha_t E = 0{,}00084 \cdot 2\,000\,000 = 1680\ \text{atm}.$$

Diese Spannung liegt innerhalb der Elastizitätsgrenze des Eisens, so daß die gesuchte *kubische* Arbeit nach der Gl. (14) berechnet werden kann. Das gibt

$$\mathfrak{A}_{tk} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1680^2}{2 \cdot 2\,000\,000} = 0{,}7056\ \frac{\text{cmkg}}{\text{cm}^3}$$

oder

$$\mathfrak{A}_{tk} = 0{,}7056\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Aufgabe 6. *Ein gerader prismatischer Stab (von der Länge l und der Höhe h) ist an seinem einen Ende lotrecht eingespannt* (Fig. 10) *und erfährt eine Temperaturerhöhung, die in seinem einen Rande t^0 und im entgegengesetzten Rande t'^0 beträgt. Wie groß ist die dadurch verursachte Formänderungsarbeit, wenn angenommen werden darf, daß der Stab beim Beginn des Temperatureinflusses spannungslos war und die Temperatur in jedem Stabquerschnitte von t bis auf t' in gerader Linie abnimmt?*

Die Temperatur verursacht im Stabe zwischen je zwei Nachbarquerschnitten im Abstande dz einerseits eine Verlängerung Δdz in der Achsenrichtung ZZ, anderseits eine Verdrehung $\Delta d\varphi$. Die Temperatur in der Stabachse sei t_z. Sie berechnet sich mit

$$t_z = \left(\frac{t+t'}{2}\right).$$

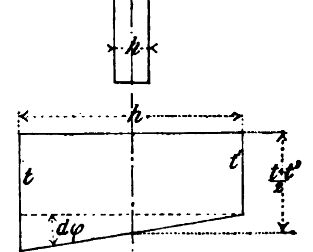


Fig. 10.

Die Dehnung in der Stabachse beträgt danach

$$\alpha_z = \alpha_t t_z\,,$$

wenn α_t die Temperaturdehnung für 1° C. angibt.

Die *mittlere* Normalspannung parallel der Stabachse folgt daraus mit

$$\sigma_z = \alpha_t t_z E$$

und die Arbeit dieser Spannungen mit

$$\mathfrak{A}_z = \frac{\sigma_z^2 F l}{2E} = \frac{(\alpha_t t_z)^2 E F l}{2}.$$

Der durch die Temperatur verursachte Verdrehungswinkel $\Delta d\varphi$ ist aus der Fig. 10 mit

$$\Delta d\varphi = \frac{\alpha_t t dz - \alpha_t t' dz}{h} = \frac{2\alpha_t (t-t') dz}{h}$$

zu entnehmen, wenn man ihn (seiner verschwindenden Kleinheit wegen) mit seiner trigonometrischen Tangente vertauscht. Er ist für alle Querschnitte derselbe, d. h. die Stabachse krümmt sich infolge des Temperatureinflusses nach einer *Kreislinie*, deren Halbmesser durch $\Delta\varphi$ bestimmt ist. Man erhält

$$\Delta\varphi = 2\int_0^l \frac{\alpha_t t_z dz}{h} = \frac{2\alpha_t t_z l}{h}.$$

Ein Moment M, das eine gleiche Krümmung herbeiführen kann, berechnet sich (nach Gl. 60 auf S. 163 des II. Bandes) aus

$$\frac{\Delta d\varphi}{dz} = \frac{M}{EJ}$$

mit

$$\Delta\varphi = \int_0^l \frac{M dz}{EJ} = \frac{Ml}{EJ}.$$

Setzt man den bereits gefundenen Wert von $\Delta\varphi$ ein und löst nach M auf, so ergibt sich

$$M = \frac{2\alpha_t t_z E J}{h}$$

und endlich nach Gl. (16) in Aufgabe 3 (unter a)

$$\mathfrak{A}_n = \frac{1}{2EJ}\int_0^l M^2 dz = \left(\frac{2\alpha_t t_z}{h}\right)^2 \frac{EJl}{2}.$$

Dasselbe hätte man auch aus der Gl. (8) gefunden, nämlich

$$\mathfrak{A}_n = \frac{1}{2} M \Delta\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha_t t_z E J}{h}\right)\left(\frac{2\alpha_t t_z l}{h}\right)$$

oder

$$\mathfrak{A}_n = \left(\frac{2\alpha_t t_z}{h}\right)^2 \frac{EJl}{2}.$$

Die gesamte Arbeit der Temperatur beträgt demnach

$$\mathfrak{A}_t = \frac{El}{2}\left[(\alpha_t t_z)^2 F + \left(\frac{2\alpha_t t_z}{h}\right)^2 J\right].$$

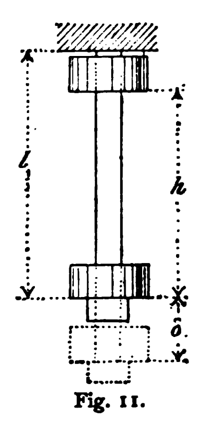


Fig. 11.

Für einen flußeisernen Stab von quadratischem Querschnitt sei z. B.

$$F = h^2 = 100 \text{ cm}; \quad l = 100 \text{ cm}; \quad t = 40^0;$$

$$t' = 20^0; \quad E = 2000 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}; \quad \alpha_t = 0{,}000012;$$

dann erhielte man

$$\Delta\varphi = \frac{2 \cdot 0000012 \cdot (40 - 20)\, 100}{10} = 0{,}0048$$

in Bogenmaß für $h = 1$. Das gibt in Winkelmaß $\Delta\varphi = 16'30''$.

Für A_t findet man

$$A_t = \frac{2000000 \cdot 100}{2}\left[(0{,}000012 \cdot 20)^2\, 100 + \left(\frac{2 \cdot 0{,}000012 \cdot 20}{10}\right)^2 \frac{10 \cdot 10^3}{12}\right]$$

$$= 768 \text{ cmkg}.$$

b. Dynamische Formänderungsarbeit.

Aufgabe 7. *Auf das freie Ende eines lotrecht hängenden, oben eingespannten prismatischen Flußeisenstabes der Länge l* (Fig. 11) *fällt, frei aus einer Höhe h, ein Gewicht P. Wie groß muß der Querschnitt des Stabes sein, wenn die Elastizitätsgrenze des Eisens durch die Wirkung des Fallgewichtes nicht überschritten werden soll und wenn dabei die geringfügige Masse des Stabes vernachlässigt wird?*

Die Arbeit der äußern Kräfte muß im Augenblicke des elastischen Gleichgewichtes gleich der Formänderungsarbeit des Stabes sein, die wegen des plötzlichen Angriffes von P doppelt zu nehmen ist. Die durch das Fallgewicht herbeigeführte Stabverlängerung sei δ. Dann ist, unter Berücksichtigung der Gl. (14):

$$P(h+\delta) = \frac{\sigma^2}{E} V = \frac{\sigma^2}{E} lF.$$

Nach dem Elastizitätsgesetze ist aber auch

$$\frac{\delta}{l} = \frac{\sigma}{E}.$$

Es sei nun

$$l = 100 \text{ cm}; \quad h = 50 \text{ cm}; \quad E = 2000 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}; \quad P = 1 \text{ t};$$

$$\sigma = \text{der Elastizitätsgrenze} = 2{,}5 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}.$$

Dann berechnet sich

$$\delta = \frac{l\sigma}{E} = \frac{100 \cdot \sigma}{2000} = \frac{\sigma}{20} \text{ cm}.$$

Ferner

$$P\left(50 + \frac{\sigma}{20}\right) = \frac{\sigma^2 \cdot 100 \cdot F}{2000}$$

oder

$$F = \frac{P(1000+\sigma)\,2000}{20 \cdot \sigma^2 \cdot 100} = \frac{P(1000+\sigma)}{\sigma^2}.$$

Das gibt

$$F = 160{,}5 \text{ cm}^2.$$

Wollte man δ gegenüber h verschwinden lassen, so erhielte man angenähert

$$P \cdot h = \frac{\sigma^2}{E} V$$

oder

$$V = \frac{P \cdot h \cdot E}{\sigma^2} = \frac{50 \cdot 2000}{2{,}5^2} = 16\,000 \text{ cm}^3$$

und

$$F = \frac{V}{l} = 160 \text{ cm}^2.$$

Aufgabe 8. *Ein quadratischer Flußeisenstab von* $a = 10$ cm *Seite liegt auf* $l = 200$ cm *wagerecht und an seinen Enden frei gestützt. Aus welcher Höhe* h *muß ein Gewicht* $P = 0{,}1$ t *auf die Stabmitte herabfallen, um im Stabe eine größte Normalspannung* σ *von* $2 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$ *zu erzeugen?*

Die Arbeit der *Normalspannungen* ist nach Gl. (16)

$$\mathfrak{A}_n = \frac{1}{2EJ}\int_0^l M^2 dz .$$

Es sei nun R dasjenige Gewicht, das in der Stabmitte, auf *statischem* Wege, die gleiche Wirkung hervorbringt, wie das dort dynamisch wirkende Gewicht P. Dann ist

$$M = \frac{R}{2} \cdot z$$

zu setzen. Das gibt für den vorliegenden symmetrischen Belastungsfall

$$\mathfrak{A}_n = \frac{1}{EJ}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{R^2}{4} z^2 dz = \frac{R^2 l^3}{96EJ} .$$

Ferner findet sich die größte Normalspannung σ im Rande des mittleren Querschnittes. Daraus folgt

$$\sigma = \frac{\frac{Rl}{4}\,\frac{a}{2}}{J}$$

oder

$$R = \frac{8 \cdot \sigma \cdot J}{al} = \frac{8 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 10^4}{10 \cdot 200} = \frac{20}{3}\ \text{t}.$$

Setzt man jetzt die Arbeit der äußern Kraft P gleich der Formänderungsarbeit der Normalspannungen, wobei vorläufig die Arbeit der Schubspannungen vernachlässigt werden soll, so erhält man

$$P \cdot h = \frac{R^2 l^3}{96 \cdot EJ} = \frac{400 \cdot 200^3}{9 \cdot 96 \cdot 2000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 10^4} = \frac{20}{9}\ \text{cmt},$$

$$h = \frac{20}{9 \cdot 0{,}1} = 22{,}22\ \text{cm}.$$

2. Unter *Berücksichtigung der Schubspannungen* erhält man das Folgende:

Die Arbeit der Schubspannungen ist nach Gl. (11)

$$\mathfrak{A}_s = \frac{1}{2}\int \frac{\tau^2}{G} dV .$$

Darin ist (nach Aufgabe 3, Fig. 8) für den vorliegenden Fall

$$\tau = \frac{QS}{aJ} = \frac{12 \cdot QS}{a^5},$$

$$S = a\left(\frac{a}{2} - y\right)\left(y + \frac{\frac{a}{2} - y}{2}\right),$$

woraus sich

$$\tau = \frac{3\,Q}{2\,a^2}\left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right)$$

berechnet. Die Querkraft Q ist bei Vernachlässigung des Stabgewichtes für beide Stabhälften unveränderlich, nämlich

$$Q = \frac{R}{2}\,.$$

Dies eingesetzt gibt

$$\mathfrak{A}_s = \frac{9\,R^2}{16\,a^4\,G}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right)^2 a\,dy\int_0^{\frac{l}{2}} dz\,.$$

Daraus findet man nach erfolgter Integration

$$\mathfrak{A}_s = \frac{3\cdot R^2 l}{20\,a^2\,G}\,, \tag{22}$$

worin R, wie vorher, gleich $\frac{20}{3}$ t anzurechnen ist. Die Arbeitsgleichung lautet also jetzt

$$Ph = \frac{R^2 l^3}{96\,EJ} + \frac{3\,R^2 l}{20\,a^2\,G} = R^2 l\left\{\frac{l^2}{96\,EJ} + \frac{3}{20\,a^2\,G}\right\}.$$

Für G (wie in Aufgabe 3) den kleinsten Wert mit $750\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2}$ eingesetzt, gibt

$$h = \frac{400\cdot 200}{9\cdot 0{,}1}\left\{\frac{200\cdot 200\cdot 12}{96\cdot 2000\cdot 10^4} + \frac{3}{20\cdot 10^2\cdot 750}\right\} = 22{,}40\ \text{cm}.$$

Danach ist also *der Einfluß der Schubspannungen verschwindend.*

Aufgabe 9. *Ein auf die Spitze einer flußstählernen Dreiecksfeder von rechteckigem Querschnitte* (Fig. 12) *fallendes Gewicht P kommt dort mit einer Geschwindigkeit von 2 Sekundenmeter an. Wie groß muß der kubische Inhalt der Feder sein, wenn in ihr durch das Fallgewicht die Elastizitätsgrenze des Stahles nicht überschritten werden soll?*

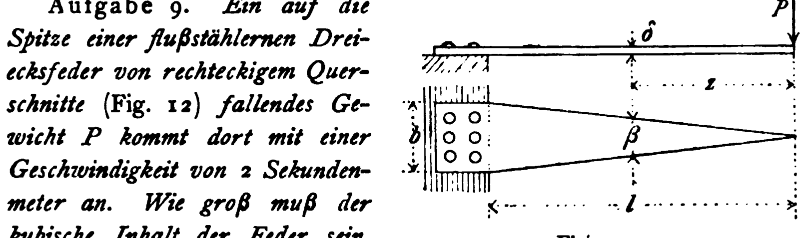


Fig. 12.

In der Entferuung z von der Spitze ist eine *Rand*spannung (nach I. **104**, c)

$$\sigma_r = \frac{M\delta}{2J} = \frac{R\delta}{2J}\,z,$$

wenn R (wie in früheren Beispielen) eine lotrechte Kraft vorstellt, die *statisch* die gleiche Wirkung übt, wie P dynamisch. Ferner ist allgemein

$$J = \frac{1}{12} \beta \delta^3 = \left(\frac{b\delta^3}{12\, l}\right) z$$

oder

$$\frac{M}{J} = \frac{12\, R l}{b \delta^3} = \frac{2\sigma_r}{\delta}.$$

Es sind danach sowohl $\frac{M}{J}$, als auch σ_r *unveränderlich, d. h. die Dreiecksfeder besitzt überall gleiche Biegungsfestigkeit.*

Nach Gl. (16) ist ferner die Arbeit der Normalspannungen

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M^2}{J}\, dz = \frac{\sigma_r}{\delta E} \int_0^l (Rz)\, dz.$$

Das gibt integriert

$$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_r R l^2}{2\delta E}.$$

R berechnet sich aus

$$\sigma_r = \frac{Rl}{W} = \frac{6 l R}{b \delta^2}$$

mit

$$R = \frac{\sigma_r b \delta^2}{6 l}.$$

Dies eingesetzt gibt

$$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_r^2 b \delta l}{12 E} = \frac{\sigma_r^2 V}{6 E}.$$

Die Fallhöhe der äußeren Kraft P ist gleich $\frac{v^2}{2g}$, wenn $g = 9{,}81$ m die Erdbeschleunigung bedeutet. Daraus folgt

$$\frac{P v^2}{2g} = \frac{\sigma_r^2 V}{6E}$$

oder

$$V = \frac{3 P E v^2}{g \sigma_r^2}. \qquad (23)$$

Für $P = 0{,}1$ t und die Elastizitätsgrenze des härteren Fußstahles $= 3{,}0 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$ erhält man schließlich als *Rauminhalt* der Feder

$$V = \frac{3 \cdot 0{,}1 \cdot 2000 \cdot 200^2}{981 \cdot 3{,}0^2} = 2718 \text{ cm}^3.$$

Dabei wurde die Arbeit der Schubspannungen und das Eigengewicht der Feder als verschwindend vernachlässigt. Die Stärke δ der Feder müßte aber groß genug werden, um in der Nähe der Federspitze *ein Abscheren* des Querschnittes $\beta\delta$ durch die Querkraft R mit Sicherheit zu verhüten.

Aufgabe 10. *Ein Schwungrad von* 0,5 t *dreht sich mit einer Umfangsgeschwindigkeit* $v = 2{,}8$ m *um eine flußeiserne Welle. Wie groß muß der Rauminhalt* V *der Welle sein, damit beim plötzlichen Stillstande der Drehbewegung die Schubspannungen der Wellenquerschnitte nicht größer als* $0{,}5\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2}$ *werden?*

Die *zulässige Verdrehungsarbeit* einer Welle berechnet sich nach Gl. (20) mit

$$\mathfrak{A}_\tau = \frac{\tau_r^2 V}{4G},$$

worin τ_r die *Rand*-Torsionsspannung bedeutet.

Ist m_u die auf *seinen Umfang* bezogene Masse des Schwungringes, so ist die kinetische Energie gleich $\frac{1}{2} m_u v^2$. Hierfür kann $P \cdot h$ gesetzt werden, wenn $P = m_u g$ das Gewicht der Masse und $h = \frac{v^2}{2g}$ die Fallhöhe vorstellt. Dann folgt

$$P \cdot h = \frac{1}{4} \frac{\tau_r^2 V}{G}$$

oder

$$V = \frac{4 \cdot P \cdot h \cdot G}{\tau_r^2}.$$

Im vorliegenden Falle ist

$$h = \frac{2{,}8^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}4 \text{ m}.$$

Setzt man (wie in Aufgabe 4)

$$G = 825\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2},$$

so gibt das

$$V = \frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot 40 \cdot 825}{0{,}5^2} = 264000 \text{ cm}^3.$$

§ 2. Elastische Linien gerader und krummer Stäbe.

5. Der senkrecht zu seiner Achse belastete gerade Stab.

a. Einfluß der Biegemomente.

1. Die Erklärung des Begriffs einer elastischen Linie wurde bereits im I. Bande gegeben (I. **103**, b). Dort wurden *ebene* Querschnitte und

das Vorhandensein einer *Kraftebene* vorausgesetzt. Denkt man deshalb die Angriffspunkte jeder äußern Kraft in deren Richtung bis in die Stabachse verschoben, wodurch im ursprünglichen Gleichgewichte nichts geändert wird, so liegen, nach erfolgter Formänderung, alle Angriffspunkte in einer krummen Linie, die man *elastische Linie* nennt. Sie verbleibt in der Kraftebene und jeder Stabquerschnitt steht zu ihr und der Kraftebene senkrecht, wenn man vorläufig etwaige, durch Schubspannungen erzeugte Unebenheiten der Querschnitte (Winkeländerungen, I. **3**, b) als verschwindend klein vernachlässigt.

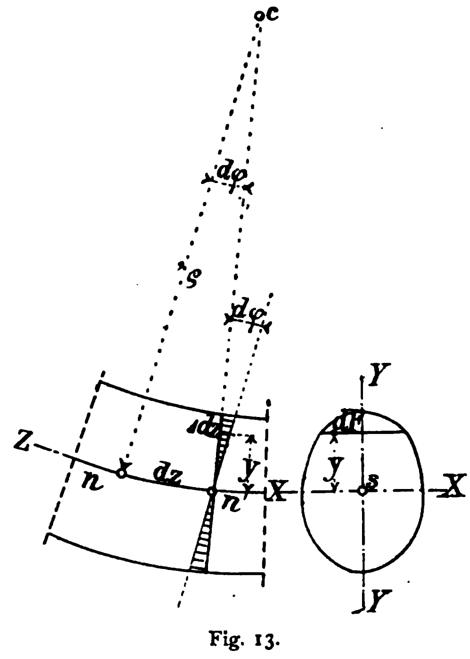


Fig. 13.

Für den vorliegenden Belastungsfall ist die Achsenkraft P gleich Null; die Nulllinie verläuft deshalb durch den Schwerpunkt (Achsenpunkt) jedes Querschnittes (I. **104**, b). Eine Biegungsspannung σ berechnet sich sonach aus der Gl. (97) (I. **104**, c), wobei der Querschnitt auf *Haupt*achsen oder (schiefwinklige) *zugeordnete* Achsen X, Y zu beziehen ist. Man erhält

$$\sigma = \frac{My}{J}. \qquad (24)$$

Nach dem Elastizitätsgesetze (und mit Bezug auf Fig. 13) ist für die *Dehnung* α_z einer zwischen zwei Nachbarquerschnitten liegenden Längsfaser

$$\alpha_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{\sigma}{E}$$

anzuschreiben. Anderseits besteht innerhalb der Nachbarquerschnitte zwischen der Ordinate y der Längsfaser im Querschnitte und dem Krümmungshalbmesser ϱ der elastischen Linie das Verhältnis

$$\frac{\Delta dz}{dz} = \frac{y}{\varrho},$$

woraus

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{y}{\varrho}$$

folgt. Dies in Gl. (24) eingesetzt, gibt

$$\frac{EJ}{\varrho} = M. \tag{25}$$

Bei gegebenen E, J und M würde Gl. (25) dazu dienen können, für irgend einen Punkt der elastischen Linie den Krümmungshalbmesser zu berechnen.

2. Der allgemeine Ausdruck für den Krümmungshalbmesser lautet

$$\varrho = \frac{\pm\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dz^2}}.$$

Weil $\left(\frac{dy}{dz}\right)$ immer die trigonometrische Tangente eines *sehr kleinen* Winkels ist, so darf man für praktische Aufgaben genau genug setzen

$$\varrho = \frac{\pm 1}{\frac{d^2y}{dz^2}}.$$

Durch Überführen des letzten Ausdruckes in die Gl. (25) erhält man die sog. *Differentialgleichung der elastischen Linie*:

$$\pm EJ\frac{d^2y}{dz^2} = M, \tag{26}$$

aus welcher für jeden besonderen Belastungsfall, durch zweimalige Integration, unter Bestimmung der vorkommenden Unveränderlichen, die *Gleichung der elastischen Linie* abzuleiten ist. Das gibt

$$\pm\frac{dy}{dz} = \int\frac{M}{EJ}dz + C_1$$

und

$$\pm y = \int dz\int\frac{M}{EJ}dz + C_1 z + C_2, \tag{27}$$

wenn C_1 und C_2 die Unveränderlichen vorstellen.

3. Das *Vorzeichen* von $\frac{d^2y}{dz^2}$ in der Gl. (26) bestimmt sich wie folgt: Es ist:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dz}\right)}{dz} = \frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{dz},$$

wenn φ der Winkel ist, den eine im Punkte y, z der elastischen Linie angelegte Berührungsgerade mit der Z-Achse (Stabachse) einschließt. Je nachdem also, im *positiven* Quadranten von YZ, mit wachsendem z der Wert von $\operatorname{tg}\varphi$ größer oder kleiner wird, ist $\frac{d^2y}{dz^2}$ *positiv* oder *negativ* einzustellen.

Wendepunkte der elastischen Linie liegen überall da, wo das Moment des betreffenden Querschnittes sein Vorzeichen wechselt, also gleich Null wird. In diesen Punkten wechselt auch der Krümmungshalbmesser sein Vorzeichen, wobei er (nach Gl. 25) unendlich groß wird.

Die allgemeine Gleichung der elastischen Linie (Gl. 27) läßt sich vereinfachen, wenn man die Integration des ersten Differentialquotienten wie folgt ausführt:

$$\frac{dy}{dz} = \int \frac{M}{EJ}\, dz,$$

$$\int \left(\frac{dy}{dz}\right) dz = z\left(\frac{dy}{dz}\right) - \int z\, \frac{d^2y}{dz^2}\, dz,$$

woraus folgt

$$y = z\int \frac{M}{EJ}\, dz - \int \frac{Mz}{EJ}\, dz. \tag{28}$$

Für unveränderliche Werte von E und J erhält man daraus

$$y = \frac{1}{EJ}\left[z\int M\,dz - \int Mz\,dz\right], \tag{29}$$

welcher Ausdruck dazu dienen kann, die *Durchbiegung* oder *Senkung* irgend eines Punktes der Stabachse ZZ unmittelbar zu berechnen.

Fig. 14.

Fig. 15.

4. Für *symmetrische Belastung* eines Trägers auf zwei Stützen (Fig. 14) ist in der *Trägermitte* die Tangente an die elastische Linie der Stabachse parallel. Dort ist deshalb $\frac{dy}{dz} = 0$. Die Durchbiegung δ in der Trägermitte berechnet sich danach aus obigen Gleichungen mit

$$\delta = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{Mz}{EJ}\, dz. \tag{30}$$

Ist der Stab an einem Ende eingespannt und *beliebig belastet* (Fig. 15) so fällt seine Durchbiegung δ am freien Ende ebenso groß aus, wie

diejenige in der Mitte eines doppelt so langen, symmetrisch belasteten Stabes auf zwei Stützen (Fig. 14). Man erhält danach

$$\delta = \int_0^l \frac{Mz}{EJ}\, dz\,. \tag{31}$$

Die Gl. (31) gilt für jede beliebige Länge von z, also auch für eine beliebig kleine »Längeneinheit«. Daraus folgt die Durchbiegung dy für die Längeneinheit mit

$$dy = \int_0^l \frac{M\,dz}{EJ} = \frac{M}{EJ}\,. \tag{32}$$

Weiterhin wird gezeigt werden, wie man alle Werte von dy mit Hilfe eines Kraftecks in einem Seileck *summieren und auf solche Weise die elastische Linie graphisch darstellen kann.*

Vgl. die Beispiele unter **6** und **7**.

b. Graphische Darstellung der elastischen Linie nach Mohr.

1. Im Jahre 1868 brachte Mohr die Lösung einer Aufgabe, die Culmann in seiner zwei Jahre früher erschienenen, grundlegenden »Graphischen Statik« noch für undurchführbar gehalten hatte, nämlich die graphische Darstellung der elastischen Linie[1]. Culmann sagt: »Die Bestimmung der auf einen durchgehenden Balken wirkenden Stützenkräfte durch die Biegung, deren Gesetze in der Theorie der elastischen Linie ihren Ausdruck finden, entgeht gänzlich der graphischen Statik; wenigstens soweit wir ihrer bis heute mächtig sind. Es wird gewöhnlich von dem Grundsatze ausgegangen, daß die Krümmungshalbmesser des gebogenen Balkens in jedem Querschnitte dem Momente der äußern Kräfte umgekehrt proportional seien. Nun sind aber diese Biegungen so unendlich klein und die Krümmungshalbmesser so unendlich groß, daß ihre Darstellung unmöglich ist und unmöglich sein wird, bis uns die Geometrie einfache Verhältnisse zwischen den entsprechenden Krümmungshalbmessern projektivischer Figuren liefert, die bezüglich des unendlich fernen Punktes in der Lotrechten als Projektionszentrum und bezüglich der geraden Achse des ungebogenen Balkens als Spurlinie perspektivisch liegen: denn dann könnten wir die Einbiegungen des Balkens so lange projektivisch verzerren, bis die Krümmungshalbmesser meßbar würden. Da wir jedoch heute noch nicht imstande sind, dies zu tun, *so müssen wir zur Rechnung greifen.*«

---

[1] Mohr. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-V. Hannover. 1868, S. 19.

MOHR hat gezeigt, daß es derartige geometrische Hilfsmittel nicht bedarf und die gestellte Aufgabe vielmehr in einfacher Weise *mit Hilfe von Kraft- und Seilecken* zu lösen ist. Zu dem Zwecke vergleicht er die elastische Linie mit einer *Seillinie* (I. **64** und **65**).

Die Differentialgleichung einer Seillinie für parallele stetige Lasten ist mit

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{q}{H} \tag{33}$$

anzuschreiben. Darin ist q die *veränderliche* stetige Last für die Einheit der Stablänge und H die *unveränderliche Polweite* (oder Bogenkraft) des Kraftecks, das zur Darstellung der Seillinie verwendet wurde.

Stellt man der Gl. (33) die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M}{EJ}$$

gegenüber, so ist deren Übereinstimmung offenbar. Danach kann man *die elastische Linie des geraden Stabes als eine Seillinie erhalten, wenn man jede Längeneinheit des Stabes entweder mit M $\left(\text{oder mit } \frac{M}{J}, \text{ oder mit } \frac{M}{EJ}\right)$ belastet denkt und je nachdem die Polweite des Kraftecks, mit dessen Hilfe die Seillinie zu zeichnen ist, gleich EJ (oder gleich E, oder gleich der »Einheit«) gemacht wird.*

2. Danach gestaltet sich das Verfahren der Darstellung der elastischen Linie wie folgt:

Die senkrecht zur Stabachse anzubringende Last für die Längeneinheit soll fortan mit w bezeichnet und *»elastische Kraft«* genannt werden. Wählt man die Polweite des Kraftecks der elastischen Kräfte gleich *»Eins«*, so ist für jedes w der Wert

$$w = \frac{M}{EJ}$$

einzusetzen. Durch die Summierung aller elastischen Kräfte erhält man die *Belastungsfläche $am'b$* (Fig. 16). Eine Seillinie wird nun — wie unter I. **64**—**65** ausführlich dargelegt ist — mit Hilfe eines umschriebenen Seil*ecks* gezeichnet. Zu dem Zwecke teilt man die Belastungsfläche in Streifen (1, 2 bis 10) von *endlicher* Breite, bestimmt deren Schwerpunkte und läßt dort je eine zugehörige elastische Kraft W angreifen, wobei

$$W = \int w\,dz$$

gleich der Summe aller den Streifen bildenden w ist (Fig. 16). Die Seillinie *berührt* das gezeichnete Seileck in den Teilpunkten 1', 2' bis 9', die senkrecht unter den Grenzlinien der Streifenflächen liegen (Fig. 18).

Wenn die elastische Linie in *natürlicher* Größe erscheinen soll, so ist die Polweite des Kraftecks (Fig. 17) gleich »*Eins*« zu machen und die Trägerlänge in natürlicher Größe darzustellen. Werden aber, wie es

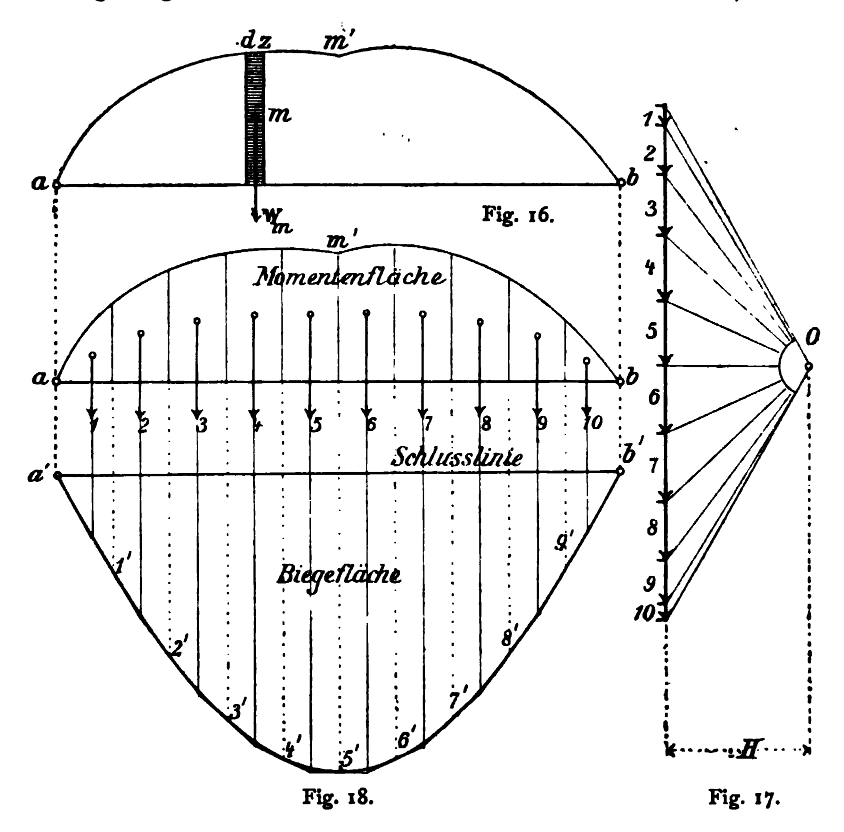


Fig. 18. Fig. 17.

in der Regel der Fall ist, die Längen der Zeichnung um $\frac{1}{n}$ verkleinert, so muß man die Polweite um das $n$fache verkleinern, um die Ordinaten y der elastischen Linie wieder in natürlicher Größe zu erhalten. Die Ordinaten fallen dann jedoch verschwindend klein aus. Deshalb ist es notwendig sie *stark vergrößert* darzustellen. Soll die Vergrößerung eine $m$fache sein, so ist die Polweite

$$H_w = \frac{1}{n \cdot m}$$

zu machen.

Dabei sind die elastischen Kräfte w oder W als unbenannte Zahlen (nach einem beliebigen Maßstabe) aufzutragen. Denn es ist

$$\frac{w}{\mathrm{cm}} = \frac{M}{EJ} = \frac{\mathrm{t} \cdot \mathrm{cm}}{\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2}\right) \mathrm{cm}^4} = \frac{1}{\mathrm{cm}}$$

d. h. eine »*w-Einheit*« besitzt die Dimension Null. Alle Strecken des Kraftecks stellen also unbenannte Zahlen vor und der Maßstab der Ordinaten y der elastischen Linie ist von dem Längenmaßstab der Zeichnung abhängig.

3. Will man die Polweite H nicht gleich »Eins«, sondern gleich E oder EJ wählen, so ändert das nichts an den Grundlagen der Darstellung.

Z. B. Man will die elastischen Kräfte

$$W = \int w\,dz = \int M\,dz$$

machen, bei einer Polweite gleich EJ. Ferner sei für einen Eisenstab $E = 2000 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2}$, J überall gleich $10000\ \mathrm{cm}^4$, der Maßstab der Stützweite gleich $\frac{1}{100}$. Soll die Vergrößerung der Ordinaten y der elastischen Linie dann das 50fache der natürlichen Größe betragen, so ist

$$H_w = \frac{EJ}{100 \cdot 50} = \frac{2000 \cdot 10000}{100 \cdot 50} = 4000\ \mathrm{tcm}^2$$

zu machen. Die Einheit einer elastischen Kraft W ist aus

$$W = \int M\,dz$$

ebenfalls in tcm^2 auszudrücken.

Die Einheiten der Ordinaten y sind dann aus

$$y = \frac{M}{H} = \frac{W \cdot z}{H} = \frac{\mathrm{tcm}^2 \cdot \mathrm{cm}}{\mathrm{t} \cdot \mathrm{cm}^2}$$

in cm abzumessen.

Weiteres ist bei den Übungsaufgaben unter **7** zu vergleichen.

c. Die Winkeländerungen der Stabachse. Aus der Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M}{EJ}$$

folgt

$$d\left(\frac{dy}{dz}\right) = \frac{M\,dz}{EJ} = d\varphi,$$

wenn φ der Winkel ist, den eine Berührungsgerade mt im Punkte m der elastischen Linie mit der Stabachse einschließt (Fig. 19):

Die Winkeländerung für die Längeneinheit ist danach gleich der Größe der zugehörigen elastischen Kraft w

$$w = d\varphi . \tag{34}$$

Es ist aber (nach Gl. 32) auch die Zunahme oder Abnahme dy der Ordinaten y der elastischen Linie gleich $\frac{M}{EJ}$ für die Längeneinheit. Daraus folgt die wichtige Beziehung:

$$w = d\varphi = dy , \tag{35}$$

aus welcher hervorgeht, daß man durch Integration aller $w = d\varphi$ unmittelbar die Ordinaten y erhält, was am einfachsten mit Hilfe eines

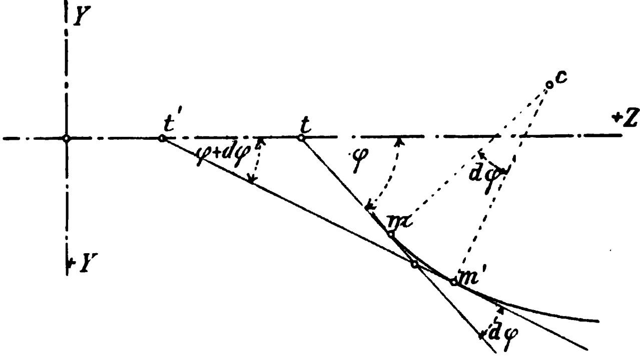


Fig. 19.

Kraftecks der elastischen Kräfte derart erfolgt, wie es MOHR zuerst gezeigt hat. Die Darstellung MOHRS ist also unmittelbar aus der Differentialgleichung der elastischen Linie abzuleiten, ohne diese dabei vorher mit einer Seillinie zu vergleichen. Danach läßt sich der Satz aussprechen:

Man erhält die elastische Linie mit Hilfe eines Kraftecks, in welchem jede elastische Kraft W gleich der Winkeländerung $\int d\varphi$ *des zugehörigen Laststreifens und die Polweite gleich »Eins« gemacht wird. Dabei sind alle Strecken des Kraftecks als unbenannte Zahlen nach einem beliebigen Maßstabe aufzutragen.*

Auch die *Biegelinien der Fachwerke* lassen sich auf gleicher Grundlage mit Hilfe von Winkeländerungen darstellen, wie Verfasser (unter **15—19**) zeigen wird.

d. Einfluß der Schubspannungen auf die Gestalt der elastischen Linie.

1. In den Übungsaufgaben 3, 4 und 8 (§ 1) wurde bereits gezeigt, wie die Formänderungsarbeit eines Stabes wesentlich nur von den Biegungsspannungen bewirkt wird, und wie verschwindend klein dabei der Anteil der Schubspannungen ist. Deshalb darf bei der Lösung praktischer Aufgaben der Einfluß der Schubspannungen auf die Gestalt der elastischen Linie im allgemeinen vernachlässigt werden. Im nachfolgenden soll jedoch die Größe dieses Einflusses rechnerisch und graphisch festgestellt werden, um damit in besondern Fällen rechnen zu können.

Die Schubspannungen werden von den Querkräften Q erzeugt (I. **101** und **115**) und sie verteilen sich über jeden Querschnitt ungleichmäßig. Die Art der Verteilung ist für die gebräuchlichen Trägerquerschnitte — wie diese im ersten Bande in der Fig. 346 dargestellt sind — durch die Gleichungen

$$\tau_y = \frac{QS}{bJ} \tag{36}$$

und

$$\tau_x = 0$$

gegeben. Darin bedeuten S das statische Moment des abgetrennt gedachten Teiles und J das Trägheitsmoment der ganzen Querschnittsfläche, bezogen auf die X-Achse. b ist die Breite der innern Faser des abgetrennt gedachten Teiles, für welche τ_y berechnet werden soll (I. **115**).

Auf der Strecke dz zwischen zwei Nachbarquerschnitten ist die Formänderungsarbeit der Schubspannungen nach Gl. (11) mit

$$d\mathfrak{A}_s = \frac{dz}{2G}\int \tau^2 \, dF$$

anzuschreiben, wobei τ gleich τ_y der Gl. (36) und die Integration über den ganzen betrachteten Querschnitt F zu erstrecken ist.

Die Formänderungsarbeit der die Schubspannungen τ erzeugenden Querkraft Q ist eben so groß. Daraus folgt die Beziehung

$$\frac{1}{2}\, Q(\gamma\, dz) = \frac{dz}{2G}\int \tau^2 \, dF, \tag{37}$$

worin γ die von der Querkraft Q bewirkte *Winkeländerung*, also $\gamma\, dz$ *die gegenseitige Verschiebung der Nachbarquerschnitte* vorstellt. Je nach der Gestalt des betrachteten Querschnittes wird hier γ einen andern Wert haben, als die für *gleichmäßige* Verteilung von τ berechnete Winkeländerung. Denn, wie die Gl. (36) angibt, werden die Schubspannungen τ mit abnehmenden S von der Schwerachse XX ab bis

zum Rande des Querschnitts kleiner. Bezeichnet man deshalb die durch ein *mittleres* τ erzeugte Winkeländerung mit γ_m, so wird

$$\gamma = \varkappa \gamma_m \tag{38}$$

gesetzt werden dürfen, wenn $\varkappa$ *eine Verhältniszahl bedeutet, die größer als* 1 *und für jeden Querschnittsumriß besonders zu berechnen ist.* Auf die Wichtigkeit dieser Zahl hat zuerst WINKLER[1] hingewiesen (1886).

Man erhält aus der Gl. (37)

$$Q(\varkappa \gamma_m) = \frac{1}{G}\int \tau^2 dF.$$

Es ist aber

$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G} = \frac{Q}{FG}.$$

Das gibt

$$\varkappa = \frac{F}{Q^2}\int \tau^2 dF, \tag{39}$$

wobei das Integral über die ganze betrachtete Querschnittsfläche F zu nehmen ist. $\varkappa$ soll fortan die *Schubverteilungszahl* und $\gamma = \varkappa\gamma_m$ die *mittlere Gleitung oder Schiebung* genannt werden.

2. Um die Anwendung der Gl. (39) zu zeigen, soll zuerst ein Stab von der Länge l mit *rechteckigem* Querschnitte behandelt werden (Fig. 20). Für einen solchen berechnet sich (nach I. **98**, Gl. (76) und I. **114**)

$$S = b(a^2 - y^2),$$

$$J = \frac{1}{12}2b\cdot(2a)^3 = \frac{4ba^3}{3},$$

$$F = 4ab$$

und

$$\tau = \frac{3Q}{2F}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right).$$

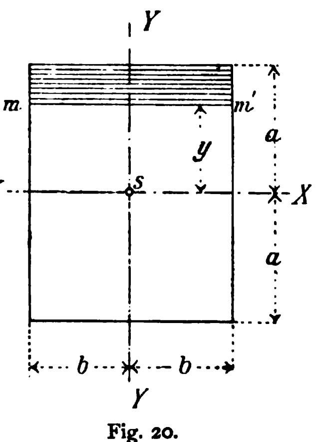


Fig. 20.

Dies in die Gl. (39) eingesetzt, gibt für die Verteilungszahl

$$\varkappa = \frac{9}{4F}\int\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 dF$$

oder

$$\varkappa = \frac{9}{4F}\int_{-b}^{+b} dx\int_{-a}^{+a}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 dy.$$

[1] WINKLER, Theorie der Brücken. 1. Heft. Äußere Kräfte der Balkenträger. 3. Aufl. 1886, S. 92.

Nach erfolgter Integration erhält man daraus

$$\varkappa = \tfrac{6}{5}. \tag{40}$$

Für einen rechteckigen Querschnitt ist danach die lotrechte mittlere Gleitung

$$\gamma\, dz = \frac{6 Q\, dz}{5 F G}. \tag{41}$$

Summiert man nun, von einer Stütze ab, alle Gleitungen (Verschiebungen) der in einer Strecke z aufeinander folgenden Querschnitte, so erhält man dadurch die von den Schubspannungen erzeugte *Durchbiegung* y_s der Stabachse im Punkte y, z (Fig. 21). Das gibt

$$y_s = \int_0^z \gamma\, dz = \frac{6}{5 G} \int_0^z \frac{Q\, dz}{F}.$$

Eine Einzellast P in der Stabmitte erzeugt dort die größte Verschiebung oder Durchbiegung

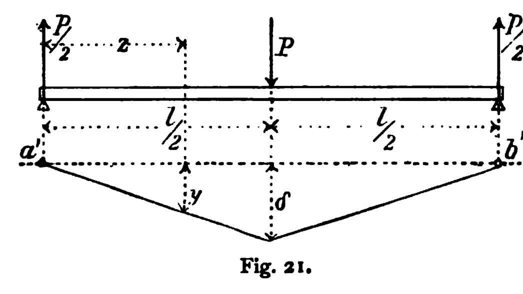


Fig. 21.

$$y_s = \frac{6}{5 G} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{P \cdot dz}{2 F}.$$

Bei *überall gleichem* Querschnitte F erhielte man also

$$y_s = \frac{3 P l}{10 F G}.$$

3. Für *nicht rechteckige*, aber in Rechtecke oder rechteckige Streifen zu zerlegende Umrisse, lassen sich die obigen für Rechteckquerschnitte abgeleiteten Formeln wieder verwenden. Bei der Berechnung der Zahl $\varkappa$ dürfen dann in praktischen Fällen, ohne Schaden für die Genauigkeit, kleine Ausrundungen von Ecken, wie sie z. B. bei den Walzeisenquerschnitten immer vorhanden sind, außer acht gelassen werden. Selbst Querschnitte, die *krumm*linige Umrisse haben, dürfen in Rechtecke von endlicher Höhe zerlegt werden. Näheres in den Aufgaben unter **8**, a.

6. Die elastische Linie des geraden Stabes als Berechnungsgrundlage statisch unbestimmter Vollwandträger.

a. Einerseits eingespannter, anderseits freigestützter Träger.

Aufgabe 11. *Ein Walzeisenträger* (Fig. 22) *ist mit einem Ende bei a wagerecht eingespannt, mit dem andern bei b auf eine Rollenstütze*

gelagert. Wie groß ist die Stützenkraft X im Stützpunkte b, wenn der Träger eine gleichmäßig verteilte Last ql aufzunehmen hat?

Der Fall ist einfach statisch unbestimmt, weil den $3 + 1 = 4$ Unbekannten nur drei Gleichgewichtsbedingungen gegenüber stehen. X ist die überzählige (statisch nicht bestimmbare) Größe.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet

$$- EJ \frac{d^2 y}{dz^2} = M = X \cdot z - \frac{q z^2}{2}.$$

Durch zweimalige Integration erhält man

$$- EJ \frac{dy}{dz} = \frac{X z^2}{2} - \frac{q z^3}{6} + U_1$$

$$- EJ y = \frac{X z^3}{6} - \frac{q z^4}{24} + U_1 z + U_2.$$

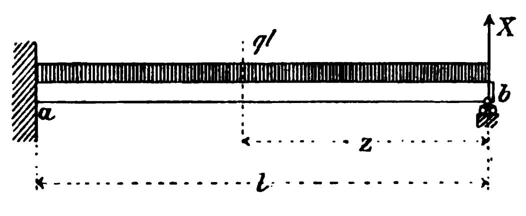


Fig. 22.

Für $z = l$ ist $-\frac{dy}{dz} = 0$, weil der Träger bei a eingespannt ist. Daraus folgt

$$U_1 = - \frac{X l^2}{2} + \frac{q l^3}{6}.$$

Für $z = 0$ ist $y = 0$, weil der Stützpunkt bei a in *lotrechter* Richtung als unverschiebbar angenommen wird. Daraus folgt

$$U_2 = 0$$

und

$$- EJ y = X\left(\frac{z^3}{6} - \frac{l^2 z}{2}\right) - q\left(\frac{z^4}{24} - \frac{l^3 z}{6}\right).$$

Aber auch für $z = l$ ist $y = 0$. Das gibt die Elastizitätsgleichung

$$0 = - \tfrac{1}{3} X l^3 + \tfrac{1}{8} q l^4$$

oder

$$X = + \tfrac{3}{8} q l. \tag{42}$$

Man vergleiche die anderweite Lösung dieser Aufgabe unter **11**, c.

Aufgabe 12. *Für die vorige Aufgabe ist die Lage und Größe der größten Durchbiegung zu berechnen.*

Aus der vorigen Aufgabe erhält man die Gleichung der elastischen Linie mit

$$+y = \frac{ql^4}{48EJ}\left(\frac{2z^4}{l^4} - \frac{3z^3}{l^3} + \frac{z}{l}\right).$$

Im gesuchten Punkte der elastischen Linie ist $+\frac{dy}{dz} = 0$. Daraus folgt

$$0 = \frac{ql^4}{48EJ}\left(\frac{8z^3}{l^4} - \frac{9z^2}{l^3} + \frac{1}{l}\right)$$

oder

$$0 = (8z^3 - 9lz^2 + l^3)$$

$$z = 0{,}4215\,l$$

und in die Gleichung der elastischen Linie eingesetzt

$$y_{\max} = \frac{ql^4}{185EJ}. \tag{43}$$

b. Durchgehender Träger auf drei Stützen.

Aufgabe 13. *Der Träger sei stetig gleichförmig belastet und von unveränderlichem Querschnitte. Seine Stützenkräfte sind zu berechnen* (Fig. 23).

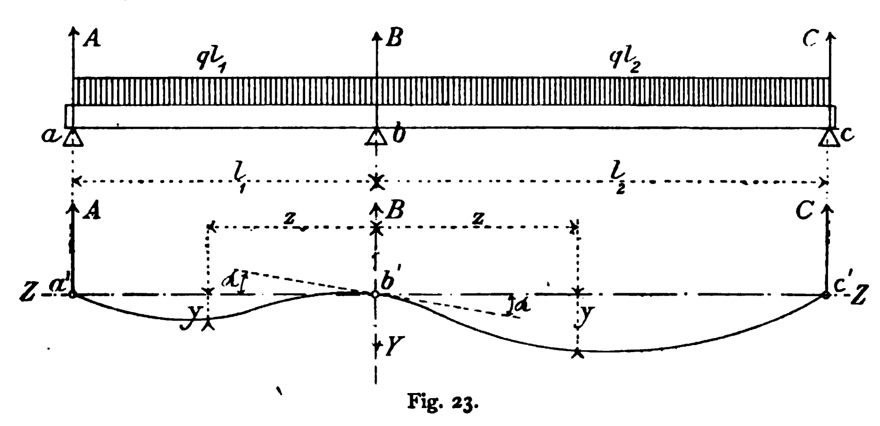


Fig. 23.

Die Statik liefert zur Berechnung der Stützenkräfte A, B und C nur die beiden Gleichungen

$$A + B + C = q(l_1 + l_2) \tag{I}$$

und

$$Al_1 - \frac{ql_1^2}{2} - Cl_2 + \frac{ql_2^2}{2} = 0. \tag{II}$$

Es fehlt noch eine dritte Gleichung. Diese liefert die elastische Linie.

Für das in der Fig. 23 gezeichnete Achsenkreuz Y, Z und für die Trägerstrecke ab erhält man:

$$EJ\frac{d^2y}{dz^2} = -M = \frac{q(l_1-x)^2}{2} - A(l_1-z),$$

$$EJ\frac{dy}{dz} = q\left(\frac{l_1^2 z}{2} + \frac{z^3}{6} - \frac{l_1 z^2}{2}\right) - A\left(l_1 z - \frac{z^2}{2}\right) + U_1.$$

Für $z = 0$ wird $\frac{dy}{dz} = \mp \operatorname{tg}\alpha$, wenn α den Winkel bedeutet, den die Tangente in b mit der Z-Achse bildet. Danach ist die Unveränderliche

$$U_1 = \mp EJ \operatorname{tg}\alpha.$$

Für die Strecke bc erhält man nach erfolgter einmaliger Integration unter Vertauschung von l_1 durch l_2 und A durch C:

$$EJ\frac{dy}{dz} = q\left(\frac{l_2^2 z}{2} + \frac{z^3}{6} - \frac{l_2 z^2}{2}\right) - C\left(l_2 z - \frac{z^2}{2}\right) + U_2.$$

Für $z = 0$ wird $\frac{dy}{dz} = \pm \operatorname{tg}\alpha$. Danach ist die Unveränderliche

$$U_2 = \pm EJ \operatorname{tg}\alpha.$$

Für den Sonderfall gleicher Stützweiten ($l_1 = l_2$) würde α *gleich Null* werden.

Es folgen die zweiten Integrationen für $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$:

$$EJy = q\left(\frac{l_1^2 z^2}{4} + \frac{z^4}{24} - \frac{l_1 z^3}{6}\right) - A\left(\frac{l_1 z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) \mp EJ(\operatorname{tg}\alpha)\, z + U_3,$$

$$EJy = q\left(\frac{l_2^2 z^2}{4} + \frac{z^4}{24} - \frac{l_2 z^3}{6}\right) - C\left(\frac{l_2 z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) \pm EJ(\operatorname{tg}\alpha)\, z + U_4.$$

Für $z = 0$ ist in beiden Gleichungen auch $y = 0$. Daraus

$$U_3 = U_4 = 0.$$

Für $z = l_1$ und $z = l_2$ ist ebenfalls $y = 0$. Das gibt

$$0 = q\left(\frac{l_1^4}{4} + \frac{l_1^4}{24} - \frac{l_1^4}{6}\right) - A\left(\frac{l_1^3}{2} - \frac{l_1^3}{6}\right) \mp EJ(\operatorname{tg}\alpha)\, l_1,$$

$$0 = q\left(\frac{l_2^4}{4} + \frac{l_2^4}{24} - \frac{l_2^4}{6}\right) - C\left(\frac{l_2^3}{2} - \frac{l_2^3}{6}\right) \pm EJ(\operatorname{tg}\alpha)\, l_2,$$

und durch Verbindung der letzten Gleichungen findet man die fehlende dritte Bedingung

$$\frac{q(l_1^3 + l_2^3)}{8} = \frac{A l_1^2 + C l_2^2)}{3}, \qquad \text{(III)}$$

wodurch A, B und C bestimmt sind. Für $l_1 = l_2 = l$ erhält man

$$A = C = \tfrac{3}{8} q l$$
$$B = \tfrac{10}{8} q l. \qquad (44)$$

c. Beiderseits eingespannter Träger.

Aufgabe 14. *Für den wagerecht eingespannten Walzeisenträger, der im Schnitte bei c eine senkrecht zur Stabachse gerichtete Einzellast P aufzunehmen hat, sind die äußern Kräfte zu berechnen* (Fig. 24—25).

Weil wagerechte Kräfte fehlen, so sind nur zwei Gleichgewichtsbedingungen gegeben, nämlich

$$1)\qquad P = A + B$$

und

$$2)\qquad M_b - M_a + Aa - Bb = 0\,.$$

Darin sind M_a und M_b die Einspannungsmomente und A und B die Stützenkräfte der *freigemacht* gedachten Trägerenden bei a und b (Fig. 24).

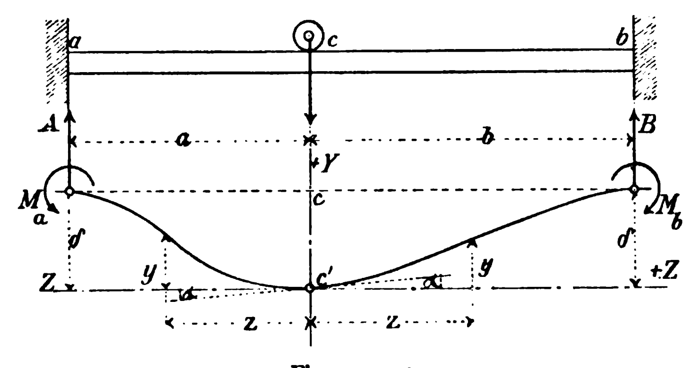


Fig. 24 u. 25.

Es empfiehlt sich die Y-Achse durch c und die Z-Achse durch den Punkt c' der elastischen Linie zu legen, um die Integrationen für die Strecken a und b bequem durchführen zu können. Man erhält

$$\text{für die Strecke } a\text{:}\quad EJ\frac{d^2y}{dz^2} = -M_a + A(a - z)\,,$$

$$\text{- - - } b\text{:}\quad EJ\frac{d^2y}{dz^2} = -M_b + B(b - z)\,.$$

Daraus

$$EJ\frac{dy}{dz} = -M_a z + A\left(az - \frac{z^2}{2}\right) + U_1\,,$$

$$EJ\frac{dy}{dz} = -M_b z + B\left(bz - \frac{z^2}{2}\right) + U_2\,.$$

Für $z = 0$ wird die Tangente im Punkte c' in den beiden Quadranten YZ Vorzeichen entgegengesetzten Sinnes haben. Das gibt

$$U_1 = \pm EJ\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

und

$$U_2 = \mp EJ\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Ferner ist für $z = a$ und $z = b$, wegen der vorausgesetzten *wagerechten* Einspannung, $\frac{dy}{dz} = 0$. Das gibt

$$0 = -M_a a + A\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right) \pm EJ \operatorname{tg} \alpha ,$$

$$0 = -M_b b + B\left(b^2 - \frac{b^2}{2}\right) \mp EJ \operatorname{tg} \alpha ,$$

und zusammengezogen

$$3) \qquad 2(M_a a + M_b b) = A a^2 + B b^2 .$$

Bei der zweiten Integration erhält man

$$EJy = -M_a \frac{z^2}{2} + A\left(\frac{a z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) \pm EJ(\operatorname{tg} \alpha)\, z + U_3 ,$$

$$EJy = -M_b \frac{z^2}{2} + B\left(\frac{b z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) \mp EJ(\operatorname{tg} \alpha)\, z + U_4 .$$

Für $z = 0$ ist in diesen beiden Ausdrücken auch $y = 0$, also auch

$$U_3 = U_4 = 0 .$$

Bezeichnet man die Durchbiegung $\overline{cc'}$ mit δ, so ist für $z = a$ und $z = b$ das zugehörige $y = \delta$. Daraus folgt

$$EJ\delta = -M_a \frac{a^2}{2} + A\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a_3}{6}\right) \pm EJ(\operatorname{tg} \alpha)\, a ,$$

$$EJ\delta = -M_b \frac{b^2}{2} + B\left(\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{6}\right) \mp EJ(\operatorname{tg} \alpha)\, b ,$$

worin die oben (aus der ersten Integration) erhaltenen Werte von $EJ \operatorname{tg} \alpha$ einzusetzen sind. Dann lassen sich die beiden letzten Ausdrücke in die Gleichung

$$4) \qquad A a^3 - B b^3 = 3 M_a a^2 - 3 M_b b^2$$

zusammenziehen. Somit sind, einschließlich der beiden Elastizitätsgleichungen 3) und 4), vier Gleichungen vorhanden, um die Unbekannten

$$M_a, \quad M_b, \quad A \text{ und } B$$

zu berechnen.

Für den Sonderfall

$$a = b = \frac{l}{2}$$

wird

$$A = B = \frac{P}{2}$$

und

$$M_a = M_b = M .$$

Aus der Gl. (3) folgt dann für das Einspannungsmoment

$$M = -\frac{Pl}{8}.$$

Das Moment M_c in der Trägermitte ist in diesem Falle mit

$$M_c = M + \frac{Pl}{2 \cdot 2} = +\frac{Pl}{8}$$

anzuschreiben.

7. Beispiele der Darstellung elastischer Linien.

a. Durchgehender Träger auf drei Stützen.

Aufgabe 15. *Für den in der Aufgabe* 13 *berechneten, über drei Stützen durchgehenden Walzeisenträger soll die elastische Linie gezeichnet werden, wobei*

$$l_1 = 12\text{ m};\quad l_2 = 18\text{ m} \quad \text{und} \quad q = 1{,}0\ \frac{\text{t}}{\text{m}}$$

einschl. Eigengewicht einzuführen sind. Dabei soll der Walzeisenquerschnitt für eine zulässige Spannung von etwa 1000 atm *berechnet werden.*

1. *Berechnung der Momente.* Die in der Aufgabe 13 abgeleiteten drei Gleichungen

$$A + B + C = q(l_1 + l_2),$$

$$A l_1 - \frac{q l_1^2}{2} - C l_2 + \frac{q l_2^2}{2} = 0,$$

$$\frac{q(l_1^3 + l_2^3)}{8} = \frac{A l_1^3 + C l_2^3}{3},$$

gehen nach erfolgter Einsetzung der Zahlenwerte über in:

$$A + B + C = 30,$$

$$\tfrac{2}{3}A - C = -5,$$

$$16A + 36C = 315.$$

Das gibt ausgerechnet

$$A = 3{,}375\text{ t};\quad B = 19{,}375\text{ t};\quad C = 7{,}25\text{ t}.$$

Es fragt sich nun, wo das größte Moment liegt. Zu dem Zwecke ist zuerst das *Stützenmoment* M_b zu berechnen. Es ist

$$M_b = C l_2 - q\frac{l_2^2}{2} = 7{,}25 \cdot 18 - \frac{324}{2}$$

oder

$$M_b = -31{,}5\text{ tm}.$$

Das Moment M_a in der Öffnung ab berechnet sich aus

$$M_a = Az - \frac{qz^2}{2}.$$

Die Abszisse des Größtwertes von M_a folgt aus

$$\frac{dM_a}{dz} = A - qz$$

mit
$$z_a = \frac{A}{q} = 3{,}375 \text{ m.}$$

Das gibt

$$\max. M_a = 3{,}375^2 - \frac{3{,}375^2}{2} = 5{,}6953 \text{ tm.}$$

Ebenso findet sich M_c. Es ist

$$M_c = Cz - \frac{qz^2}{2},$$

$$z_b = \frac{C}{q} = 7{,}25 \text{ m},$$

und

$$\max. M_c = 7{,}25^2 - \frac{7{,}25^2}{2} = 26{,}28125 \text{ tm.}$$

Der Walzeisenquerschnitt muß danach ein Widerstandsmoment

$$W = \frac{M_b}{\sigma} = \frac{3150 \text{ tcm}}{1 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}} = 3150 \text{ cm}^3$$

erhalten. Dazu genügt das deutsche Normalprofil eines I-Eisens Nr. 55 mit einem Widerstandsmoment von 3602, dessen Trägheitsmoment gleich 99054 cm^4 beträgt, bei $F = 212$ cm^2 Querschnitt.

Die Nullpunkte der Momente, die mit den entsprechenden Wendepunkten der elastischen Linie zusammenfallen, berechnen sich aus

$$M_a = Az_1 - \frac{qz_1^2}{2} = 0 \quad \text{mit} \quad z_1 = -6{,}75 \text{ m}$$

$$\text{und} \quad M_c = Cz_2 - \frac{qz_2^2}{2} = 0 \quad - \quad z_2 = 14{,}50 \text{ m.}$$

2. *Darstellung der Momentenfläche.* Die berechneten Werte sind in den beiden Fig. 26 und 27 übersichtlich aufgetragen worden. Dabei wurde der durchgehende Träger, unter Beseitigung der Stütze c, aber unter Belassung der Stützenkraft C, in einen *Auslegeträger* verwandelt gedacht. Für einen solchen Träger können die Momente (nach I. **62**) mit Hilfe des bekannten Stützenmomentes M_b ohne weiteres aufgetragen werden. Noch einfacher ist es, wenn man in der durch einen Momenten-Nullpunkt (n_1 oder n_2) verlaufenden Lotrechten ein *Gelenk* eingelegt denkt. Dadurch wird der durchgehende Träger statisch bestimmt und seine Momentenfläche kann dann ebenfalls mit Hilfe von M_b gezeichnet

werden. Zu dem Zwecke betrachtet man jede der beiden Öffnungen zunächst als durch einfache Träger überdeckt und zeichnet für diese die Momentenfläche. Man erhält somit zuerst zwei Parabelflächen an_1b und bn_2c, deren größte Ordinaten gleich

$$\frac{ql_1^2}{8} \quad \text{und} \quad \frac{ql_2^2}{8}$$

sind. Macht man dazu noch die Strecke bb_1 gleich dem Stützenmomente M_b, so verlaufen die von b_1 nach a und nach c gezogenen *Schlußlinien* durch die Nullpunkte n_1 und n_2. Hat man also n_1 und n_2 vorher schon festgelegt, so müssen die beiden Schlußlinien ab_1 und cb_1 eine Strecke $bb_1 = M_b$ abschneiden. Legt man an jede der beiden Parabeln der Fig. 26, parallel zu ihrer Schlußlinie eine Tangente, so erhält man zwei Berührungspunkte t_1 und t_2, die den Ort und die Größe der Momente M_a und M_c festlegen.

In der Fig. 27 ist die Momentenfläche mit *wagerechtem Schlußlinienzug* (I. **62**, b) dargestellt worden. Dadurch wird ersichtlich, wie die positiven Momentenflächen zu beiden Seiten der Punkte t_1 und t_2 symmetrisch liegen. Danach berechnet sich der Inhalt der drei in Frage kommenden Flächen F_a, F_b und F_c aus

$$F_a + F_c - F_b = \tfrac{2}{3}\left(\frac{1\cdot 12^2}{8}\cdot 12 + \frac{1\cdot 18^2}{8}\cdot 18\right) - 31{,}5\cdot\frac{30}{2} = 157{,}5 \text{ tm}^2$$

und aus

$$F_a = \tfrac{2}{3}(5{,}695\cdot 6{,}75) = 25{,}6275 \text{ tm}^2$$
$$F_c = \tfrac{2}{3}(26{,}28125\cdot 14{,}50) = 254{,}0521 \text{ tm}^2,$$

woraus

$$F_b = 153{,}5 - (25{,}6275 + 254{,}052) = -122{,}1796 \text{ tm}^2$$

folgt.

3. *Darstellung und Nachprüfung der elastischen Linie.* Die drei Momentenflächen F_a, F_b und F_c wurden zusammen in 22 Streifen geteilt (Fig. 27) und deren Inhalte und Schwerpunkte für sich ermittelt. So wurden 22 elastische Kräfte W berechnet und in zwei Kraftecken aufgetragen, von denen das in Fig. 28 gezeichnete für die erste, und das in Fig. 30 für die zweite Trägeröffnung gilt. Der Kraftmaßstab wurde dabei mit

$$1 \text{ cm} = 30 \text{ tm}^2$$

gewählt.

Das mit Hilfe dieser Kraftecke erhaltene *Seileck der elastischen Linie* ist mit *roter* Farbe gezeichnet. Die schwarz gezeichneten Kraftecke und Seilecke mit den Polen O_1'', O_2'' und O_2' sind nur dazu benutzt worden, einerseits um eine passende Vergrößerung der Durchbiegungen y zu

erhalten und anderseits, um die elastische Linie durch die Stützpunkte a', b' und c' zu führen. Zuerst wurde mit dem beliebig gelegten Pole O''_2 das Seileck für die Schlußlinie $b'_2 c'$ gezeichnet und sodann der Pol in

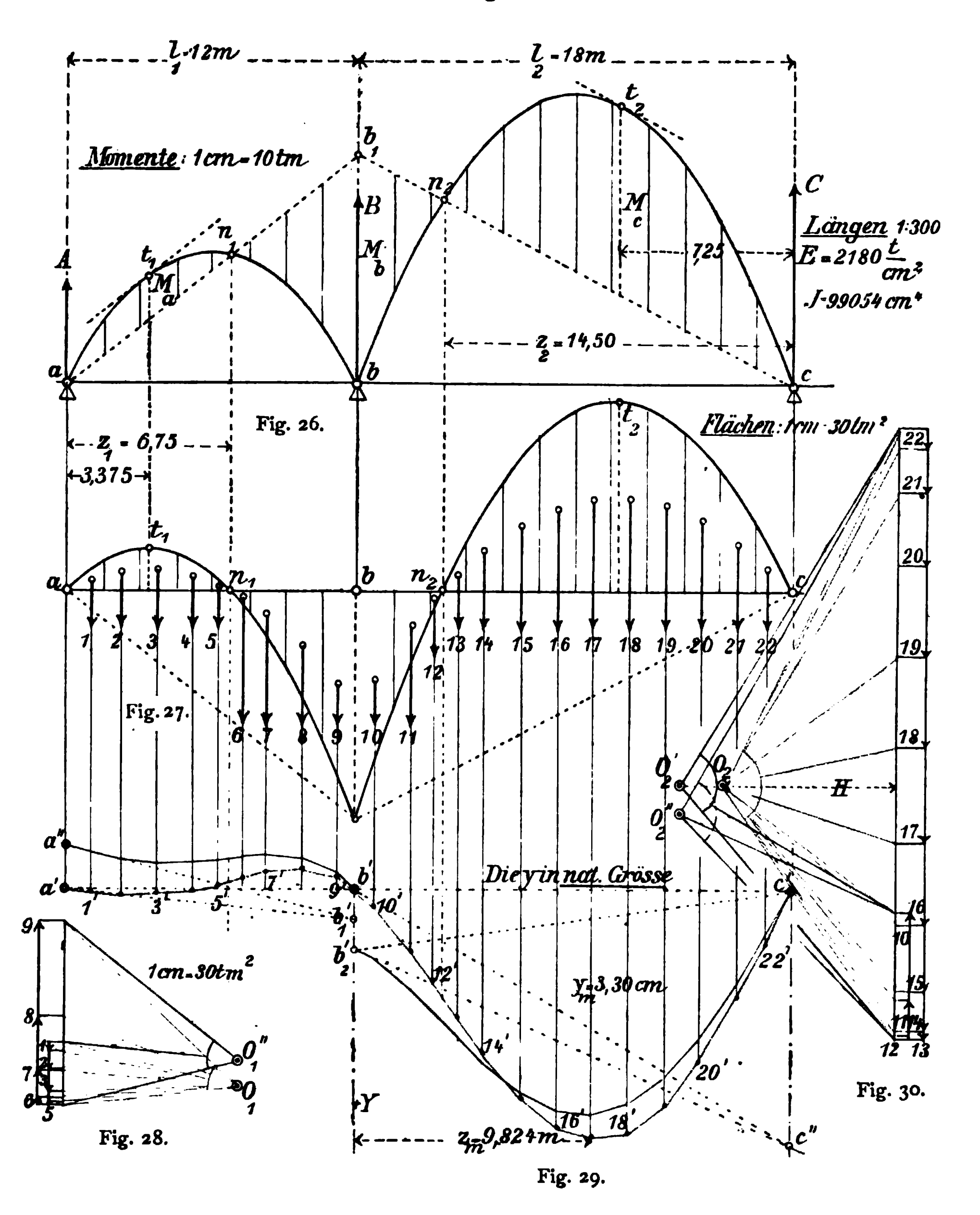


Fig. 26.

Fig. 27.

Fig. 28.

Fig. 29.

Fig. 30.

lotrechter Richtung nach O_2' verschoben, entsprechend einer lotrechten Verlegung des Punktes b_2' nach b'. Nunmehr erschien es zweckmäßig, *die Durchbiegungen in natürlicher Größe darzustellen.* Dazu wurde der endgiltige Pol O_2 in der durch O_2' verlaufenden Wagerechten festgelegt.

Die Polweite H berechnete sich dabei wie folgt: Trägt man die Strecken der elastischen Kräfte und der Polweite beide in beliebigem, aber *gleichem* Maßstabe auf, so erscheinen für die natürliche Länge der Stützweite die Durchbiegungen in natürlicher Größe. Weil aber die Stützweite nur im Maßstabe von $\frac{1}{300}$ aufgetragen worden ist, so muß die Polweite, wenn man die y in natürlicher Größe erhalten will, noch durch 300 dividiert werden. Das gibt

$$H = \frac{2180 \cdot 99054}{300 \cdot 30\,(100 \cdot 100)} = 2{,}4\ \text{cm}.$$

Darin ist das Dehnungsmaß $E = 2180\,\frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$, das Trägheitsmoment $J = 99054\ \text{cm}^4$. 1 cm stellt $30\ \text{tm}^2$ oder $30\,(100 \cdot 100)\ \text{tcm}^2$ dar.

Um die *Genauigkeit* der in der Fig. 29 dargestellten elastischen Linie nachzuprüfen, sollen Ort und Größe der größten Durchbiegung y_m in der zweiten Öffnung rechnerisch ermittelt werden. Dazu dienen die (in Aufg. 13) abgeleiteten Gleichungen der elastischen Linien in beiden Öffnungen. Diese lauten

$$\text{für } \overline{ab}:\ EJy = q\left(\frac{l_2^2 z^2}{4} + \frac{z^4}{24} - \frac{l_1 z^3}{6}\right) - A\left(\frac{l_1 z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) - EJ(\text{tg}\,\alpha)z,$$

$$\text{- } \overline{bc}:\ EJy = q\left(\frac{l_2^2 z^2}{4} + \frac{z^4}{24} - \frac{l_2 z^3}{6}\right) - C\left(\frac{l_2 z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + EJ(\text{tg}\,\alpha)z.$$

Das gibt, nach erfolgter Einsetzung der bekannten Zahlenwerte für die erste Ableitung

$$EJ\frac{dy}{dz} = \left(\ 72z + \frac{z^3}{6} - 6z^2\right) - A\left(12z - \frac{z^2}{2}\right) - EJ\,\text{tg}\,\alpha,$$

$$EJ\frac{dy}{dz} = \left(162z + \frac{z^3}{6} - 9z^2\right) - C\left(18z - \frac{z^2}{2}\right) + EJ\,\text{tg}\,\alpha.$$

Daraus ist zuerst der Wert von $EJ\,\text{tg}\,\alpha$ zu berechnen. Man erhält ihn durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen mit

$$3z^2 - 90z + C\left(18z - \frac{z^2}{2}\right) - A\left(12z - \frac{z^2}{2}\right) = 2EJ\,\text{tg}\,\alpha,$$

woraus für die bekannten Werte

$$A = 3{,}375^t$$
$$C = 7{,}25^t$$
$$EJ \operatorname{tg} \alpha = 0{,}53125 z^2 \quad (45)$$

erhalten wird.

Stellt man den letzterhaltenen Wert in die Abgeleitete für $\overline{bc}$ ein, und setzt $EJ\dfrac{dy}{dz} = 0$, so gibt das

$$162 - 18C - z_m\left(9 - \frac{C}{2} - 0{,}53125\right) + \frac{z_m^2}{6} = 0$$

oder die quadratische Gleichung

$$z_m^2 - 29{,}0625 z_m = -189,$$

woraus

$$z_m = +14{,}53125 \pm \sqrt{-189 + (14{,}53125)^2}$$

oder

$$z_m = 9{,}82410 \text{ m} \quad (46)$$

folgt. Der Wert stimmt genau mit der graphischen Darstellung der Fig. 29.

Um y_m zu erhalten braucht man nur z_m in die Gleichung der elastischen Linie für $\overline{bc}$ einzuführen. Es ergibt sich dann zuerst

$$EJy_m = 15{,}75 z_m^2 + \frac{z_m^4}{24} - 1{,}26042 z_m^3$$

und nach weiterer Zahlenrechnung

$$y_m = \frac{1520{,}07 + 388{,}11 - 1195{,}1}{21\,593{,}77}$$

oder

$$y_m = 0{,}03302 \text{ m}. \quad (47)$$

Auch dieser Wert stimmt fast genau mit der Darstellung in Fig. 29 überein.

Wollte man mit Hilfe der Rechnung noch andere Durchbiegungen nachprüfen, z. B. auch in der ersten Öffnung ab, so würde das unter Benutzung der obigen Gleichungen zu geschehen haben.

b. Einfacher Blechträger mit veränderlichem Querschnitte (Fig. 31—34).

Aufgabe 16. *Eine Eisenbahnbrücke, die zwei durch Querkonstruktionen verbundene Hauptträger von je* 12 m *Stützweite besitzt, trägt zwei Lokomotiven in einer Stellung, wie sie der Längsschnitt in* Fig. 32 *(oben)*

angibt. Die Hauptträgerquerschnitte (Fig. 33) *sind so zu gestalten, daß die von dem Lastenzuge allein hervorgerufenen Biegungsspannungen nicht über etwa* 1 $\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2}$ *steigen. Sodann ist die elastische Linie für die gezeichnete Lastenstellung darzustellen.*

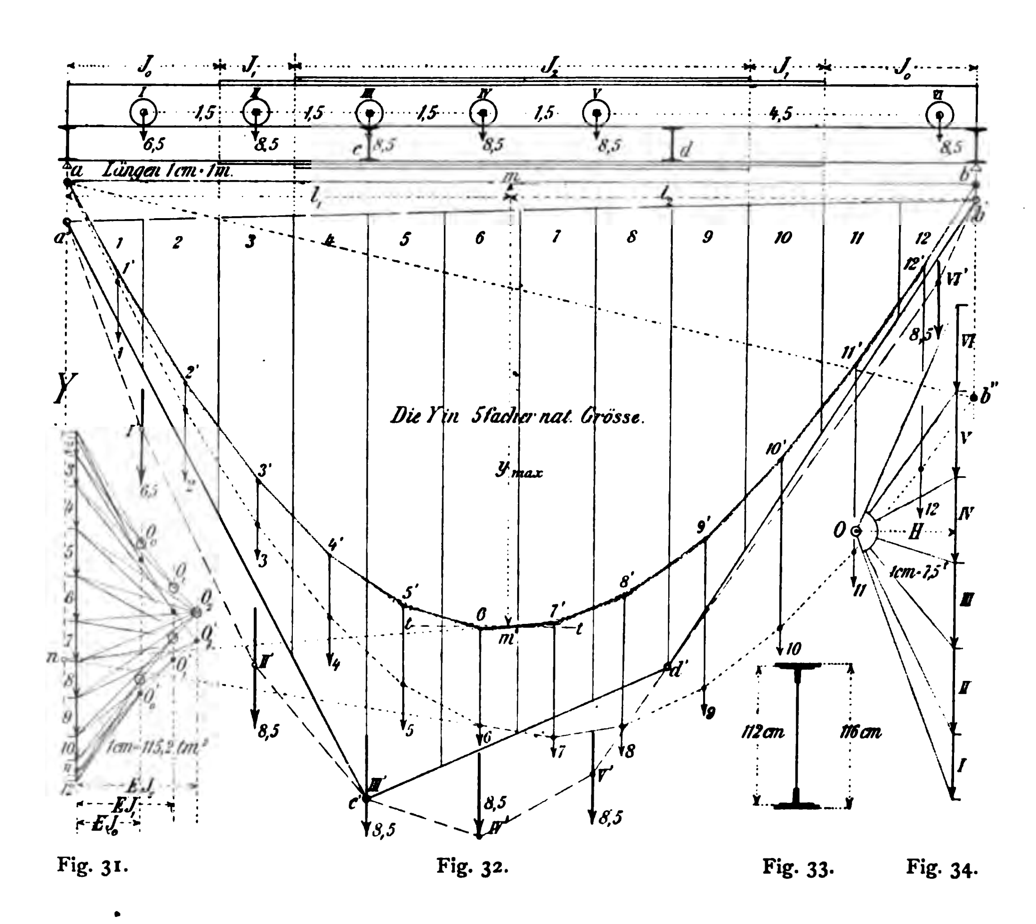


Fig. 31. Fig. 32. Fig. 33. Fig. 34.

1. *Momentenfläche und Belastungsfläche.* Zwischen den Richtungen der Radlasten I bis VI wurde mit Hilfe des Kraftecks der Fig. 34 ein Seileck *a'*—I'—II'—III'—IV'—V'—VI'—*b'* gezeichnet. Daraus ergab sich, weil die Lastübertragung eine mittelbare ist (I. **67**, b), die gesuchte Momentenfläche *a' c' d' b'*. Diese wurde in 12 Streifen (von je 1 m Breite) eingeteilt, deren Inhalte aus der folgenden Tabelle zu entnehmen sind.

Inhalt der Momentenfläche.

Streifen Nr.	Formel m^2	Inhalt m^2	$\frac{\text{Inhalt}}{12}$ m^2	Streifen Nr.	Formel m^2	Inhalt m^2	$\frac{\text{Inhalt}}{12}$ m^2
1	$19\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20}$	$\frac{29}{30}$	0,081	7	Nr. 6 $- \frac{5}{12}$	$6\frac{83}{120}$	0,558
2	$3 \cdot 19\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20}$	$2\frac{9}{10}$	0,242	8	Nr. 7 $- \frac{5}{12}$	$6\frac{11}{40}$	0,523
3	$5 \cdot 19\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20}$	$4\frac{5}{6}$	0,403	9	$7 \cdot 15\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{20}$	$5\frac{37}{120}$	0,443
4	$7 \cdot 19\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20}$	$6\frac{23}{30}$	0,564	10	$5 \cdot 15\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{20}$	$3\frac{19}{20}$	0,316
5	Nr. 4 $+ \frac{91}{120}$	$7\frac{21}{40}$	0,627	11	$3 \cdot 15\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{20}$	$2\frac{11}{40}$	0,190
6	Nr. 5 $- \frac{5}{12}$	$7\frac{13}{120}$	0,584	12	$15\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{20}$	$\frac{91}{120}$	0,063

Die *Belastungsfläche* findet sich daraus durch Multiplikation mit der Polweite H des Kraftecks der Fig. 34. H ist gleich 1,28 cm, also

$$H = 1{,}28 \cdot 7{,}5 = 9{,}60 \text{ t}.$$

Die Momentenfläche F_m beträgt *im ganzen*

$$F_m = \frac{(77\frac{1}{3} \cdot 4)}{20} + \frac{(77\frac{1}{3} + 60\frac{2}{3})4}{20} + \frac{60\frac{2}{3} \cdot 4}{20},$$

oder

$$F_m = 55{,}2 \text{ m}^2.$$

Die *Belastungsfläche* F_b berechnet sich mit

$$F_b = (55{,}2 \cdot 9{,}60) \text{ tm}^2.$$

Als Maßstab für das Auftragen der elastischen Kräfte W der Belastungsstreifen wurde

$$1 \text{ cm} = 12 \cdot H = 12 \cdot 9{,}60 = 115{,}2 \text{ tm}^2$$

gewählt. Deshalb mußten die obigen Inhalte der Streifen 1 bis 12 noch durch 12 dividiert werden, um als elastische Kräfte gelten zu können. Um die elastische Linie zu zeichnen, fehlt es jetzt nur noch an den Trägheitsmomenten der Trägerquerschnitte.

2. *Trägheitsmomente.* Das größte Moment findet über dem Querträger c statt. Abgemessen ergibt sich

$$M_c = 7{,}73 \cdot 9{,}6 = 74{,}21 \text{ tm}.$$

Daraus das Widerstandsmoment

$$W_c = \frac{7421 \text{ tcm}}{1 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}} = 7421 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wurde der in Fig. 33 gezeichnete Querschnitt[1] mit $W_c = 7489\ \mathrm{cm}^3$ und einem Trägheitsmoment

$$J_2 = 434\,362\ \mathrm{cm}^4.$$

Nach Fortlassung der *oberen* Gurtplatten ergibt sich

$$J_1 = 348\,384\ \mathrm{cm}^4$$

und ohne Gurtplatten

$$J_0 = 265\,383\ \mathrm{cm}^4.$$

Das Dehnungsmaß E wird mit $2120\ \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2}$ angenommen.

3. *Die elastische Linie.* Es handelt sich jetzt nur noch darum, einen passenden Maßstab für die Polweiten EJ des Kraftecks der elastischen Kräfte zu finden. Die Polweite $H_2 = EJ_2$ ist für *fünffache* Vergrößerung der Ordinaten y der elastischen Linie aus

$$H_2 = \frac{2120 \cdot 434\,362}{5 \cdot 100 \cdot 115{,}2\,(100 \cdot 100)}$$

zu berechnen. Dann ist im Nenner sowohl der Längenmaßstab der Stützweite $(\frac{1}{100})$ als auch der Maßstab der elastischen Kräfte ($1\ \mathrm{cm} = 115{,}2\ \mathrm{tm}^2$) berücksichtigt. Das gibt

$$H_2 = EJ_2 = 1{,}600\ \mathrm{cm}.$$

Daraus folgen

$$H_1 = EJ_1 = 1{,}282\ \mathrm{cm}$$

und

$$H_0 = EJ_0 = 0{,}977\ \mathrm{cm}.$$

Um das Seileck der elastischen Linie auf eine wagerechte Schlußlinie ab zu beziehen, sind in dem Krafteck (Fig. 31) zuerst die schwarzpunktierten Pole O_0' bis O_2' angenommen worden. Damit wurde das punktierte Seileck mit der Schlußlinie $a'b''$ gezeichnet. Dessen zwischen den elastischen Kräften 6 und 7 liegende Seite ist verlängert worden, bis sie die Polachse aY im Punkte n schneidet. Dann wurde die punktierte Gerade $n7$ gezogen, wobei *die Höhe* über der Ecke 7 der punktierten Seileckfläche gleich der Höhe über der Ecke 7' der *rot dargestellten* Seileckfläche zu machen war.

Die neue Lage der rot gezeichneten Pole O_0, O_1 und O_2 war damit festgelegt, denn der zwischen den elastischen Kräften 6 und 7 (zur $\overline{n7'}$ parallele) rote Strahl muß durch den Pol O_2 verlaufen.

---

[1] Nach ZIMMERMANN, Genietete Träger, S. 31.

4. *Nachprüfung. Der Ort und die Größe der größten Durchbiegung* soll auch rechnerisch gefunden werden. Dazu läßt sich die Gl. (31) benutzen. Sie lautet

$$y = \int_0^l \frac{Mz \cdot dz}{EJ}$$

und gilt zwar nur für einen an einem Ende eingespannten Stab von der freien Länge l, aber sie kann, wie (unter **5**, a. 3) gezeigt worden ist, auch für einen auf Stützen gelagerten Stab verwendet werden, wenn man diesen im Punkte m der größten Durchbiegung eingespannt und nach beiden Seiten hin freischwebend im Gleichgewichte befindlich denkt. Bezeichnet man dann (in der Fig. 32 oben)

$$\overline{am} = l_1$$

und

$$\overline{bm} = l_2,$$

so gilt die vorige Gleichung für beide Stabenden von der Länge l_1 und l_2. In m möge eine Tangente tt zur Z-Achse, die mit der Schlußlinie ab der Biegefläche amb zusammenfällt, parallel laufen.

Am bequemsten erscheint es, wenn man in der Gleichung für y_{max} die Ausdrücke $\frac{M}{EJ}$ *für jede äußere Kraft besonders* aufstellt und integriert. Beachtet man dann noch die Grenzen der Veränderlichkeit von J, so erhält man (mit Bezug auf die Fig. 32 oben):

$$Ey = A\left[\int_0^2 \frac{z^2 dz}{J_0} + \int_2^3 \frac{z^2 dz}{J_1} + \int_3^{l_1} \frac{z^2 dz}{J_2}\right]$$

$$-\left[8,5 + \frac{8,5 \cdot 2,5}{4} + \frac{2 \cdot 8,5 \cdot 1,75}{4} + \frac{6,5 \cdot 1}{4}\right]\int_4^{l_1} \frac{z(z-4)dz}{J_2},$$

oder

$$Ey = A\left[\frac{8}{3J_0} + \frac{19}{3J_1} + \frac{l_1^3}{3J_2} - \frac{9}{J_2}\right] - \frac{91,5}{4}\left[\frac{l_1^2}{3J_2} - \frac{2l_1^2}{J_2} + \frac{32}{3J_2}\right].$$

Eine zweite Gleichung erhält man für die Trägerstrecke l_2 mit

$$Ey = B\left[\frac{8}{3J_0} + \frac{19}{3J_1} + \frac{l_2^3}{3J_2} - \frac{9}{J_2}\right]$$

$$-\left[\frac{8,5 \cdot 0,5}{4} + \frac{2 \cdot 8,5 \cdot 2,25}{4}\right]\left[\frac{l_2^3}{3J_2} - \frac{2l_2^2}{J_2} + \frac{32}{3J_2}\right].$$

Darin sind

$$A = \frac{4 \cdot 8,5 \cdot 7,25 + 8,5 \cdot 0,5 + 6,5 \cdot 11}{12} - \frac{8,5 \cdot 1,5}{4} - \frac{6,3 \cdot 3}{4} = 18,792 \text{ t},$$

$$B = 14,708 \text{ t}.$$

Durch Gleichsetzen der beiden erhaltenen Werte von Ey erhält man die Bedingung

$$(A-B)\left(\frac{8}{3J_0}+\frac{19}{3J_1}-\frac{9}{J_2}\right)+A\frac{l_1^3}{3J_2}-B\frac{l_2^3}{3J_2}-\left(\frac{91,5}{4}\right)\frac{l_1^3}{3J_2}$$

$$+\frac{10,625\,l_2^3}{3J_2}+\left(\frac{91,5}{4}\right)\frac{2\,l^2}{J_2}-10,625\left(\frac{2\,l_2^2}{J_2}\right)-\left(\frac{91,5}{4}\right)\frac{32}{3J_2}+10,625\left(\frac{32}{3J_2}\right)=0$$

oder

$$73,488\,l_1^2-3293,376\,l_1+16588,334=0.$$

Das gibt

$$l_1 = 5,65 \text{ m}$$

$$l_2 = 6,35 \text{ m} \qquad (48)$$

und

$$y_{max} = 1,13 \text{ cm},$$

was mit der graphischen Ermittelung ziemlich genau übereinstimmt.

8. Beispiele zur Beurteilung des Einflusses der Schubspannungen.

a. Die Schubverteilungszahl $\varkappa$.

Aufgabe 17. *Es ist die Verteilungszahl für einen I-Querschnitt zu berechnen.* Unter Bezugnahme auf die im ersten Bande (**115**) gegebene Begründung legen wir die Schnitte, deren Schubspannungen τ_y betrachtet werden sollen, in den Flanschen lotrecht und im Stege wagerecht, um das in der Gl. (36) vorkommende Maß b der Schnittlänge (I. **114**, Fig. 341) möglichst *klein* zu erhalten (Fig. 35 oben und unten). In der Gleichung

$$\tau = \frac{QS}{b_s J} \qquad (49)$$

ist im vorliegenden Falle für einen bestimmten Querschnitt allein S — das statische Moment der durch den Schnitt abgetrennten Fläche — eine Veränderliche. Die Schnittbreite b_s ist in den Flanschen gleich der mittleren Stärke t zu setzen; im Stege ist $b_s = d$. Auch für die im Flansch liegende Fläche $d \cdot t$ ist das b der Gl. (49) gleich der Stegdicke d gesetzt worden,

Fig. 35.

um die Rechnung nicht unnötig zu erschweren. Danach erhält man für einen der vier Flansche, innerhalb der Grenzen $x = \frac{d}{2}$ und $x = b$:

$$S = t(b - x)\left(a - \frac{t}{2}\right).$$

Für die wagerecht gelegten Schnitte im Stege

$$S = \frac{d}{2}(a^2 - y^2) + 2t\left(b - \frac{d}{2}\right)\left(a - \frac{t}{2}\right),$$

worin das erste Glied für das Rechteckstück des Steges und das zweite für die beiden Flanschstücke gilt. Zur Abkürzung setzen wir

$$\left(a - \frac{t}{2}\right) = h$$

und

$$\left(b - \frac{d}{2}\right) = f.$$

Es empfiehlt sich die Integrationen *für Flanschen und Steg* gesondert durchzuführen. Für die vier Stegstücke erhält man

$$\int \tau^2 dF = \frac{Q^2}{J^2} 4h^2 \int_{a-t}^{a} dy \int_{\frac{d}{2}}^{b} (b-x)^2 dx = \frac{Q^2}{J^2} 4h^2 t \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^2 d}{2} - \frac{d^3}{24} + \frac{b d^2}{4}\right).$$

Für den Steg:

$$\int \tau^2 dF = \frac{Q^2}{J^2}\left[\frac{1}{4}\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} dx \cdot 2\int_0^a \left(a^2 - y^2 + \frac{4tfh}{d}\right)^2 dy\right].$$

Setzt man hierin noch $\frac{4tfh}{d} = i$, so gibt das für den Steg

$$\int \tau^2 dF = \frac{Q^2}{J^2}\left[\frac{d}{2}\left(\frac{8a^5}{15} + i^2 a + \frac{4ia^3}{3}\right)\right].$$

Für den Gesamtquerschnitt ist demnach die Verteilungszahl $\varkappa$, wie folgt anzuschreiben:

$$\varkappa = \frac{F}{Q^2}\int \tau^2 dF = \frac{F}{J^2}\left[\frac{h^2 t}{6}(8b^3 - 12b^2 d - d^3 + 6bd^2) + \frac{d}{2}\left(\frac{8a^5}{15} + \frac{4ia^3}{3} + i^2 a\right)\right].$$

Diese Gleichung soll jetzt für *das deutsche Normalprofil* Nr. 55 angewendet werden. Dessen Abmessungen und Querschnittsgrößen sind in cm:

$$2a = 55; \quad 2b = 20; \quad d = 1{,}9; \quad t = 3{,}0;$$
$$F = 212; \quad J = 99054.$$

Danach berechnen sich zunächst

$$h = \left(a - \frac{t}{2}\right) = 26$$

$$i = \frac{4t\left(b - \frac{d}{2}\right)26}{d} = 1486{,}1\,.$$

Ferner:

$$\varkappa = \frac{212}{99054^2}\{2004200 + 104813310\},$$

wobei die beiden Klammerzahlen den Einfluß der Flansche und des Steges darstellen. Daraus folgt

$$\varkappa = 2{,}31\,.$$

2. Wenn man die Annahme macht, daß die Schubspannung in den Flanschen sich *gleichmäßig* über die Breite $2b$ verteilt, was aber tatsächlich nicht ganz zutreffen wird, so erhält man zur Berechnung von $\varkappa$ etwas einfachere Grundgleichungen und eine kleinere als die vorberechnete Zahl.

Man erhält dann für einen Flansch

$$S = b(a^2 - y^2)$$

und für Steg mit Flansch

$$S = bt(2a - t) + \frac{d}{2}((a - t)^2 - y^2)\,.$$

Das gäbe für zwei Flansche

$$\int \tau^2 dF = \frac{Q^2}{J^2}\left[\int_0^b dx \int_{a-t}^a (a^2 - y^2)^2\right]$$

und für den Steg mit zwei Flanschen

$$\int \tau^2 dF = \frac{Q^2}{J^2}\left[\frac{1}{2d^2}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx \int_0^{a-t} \{(d - 2b)(t^2 - 2at) + d(a^2 - y^2)\}^2 dy\right].$$

Daraus folgt schließlich

$$\varkappa = \frac{F}{Q^2}\int \tau^2 dF = \frac{F}{J^2}[247000 + 97702900]$$

oder

$$\varkappa = 2{,}116.$$

3. Allgemeine Formeln für I-Querschnitte findet man bei WINKLER[1], der als *Erster* auch Näherungsformeln für *veränderliche* Querschnitte

---

[1] WINKLER, Theorie der Brücken. 1. Heft. Äußere Kräfte der Balkenträger. 3. Aufl. 1886. S. 107—108.

aufgestellt hat. Auf die allgemeine Formel von WINKLER stützte sich Ingenieur MANTEL-Zürich, der eine Berechnung der Verteilungszahl für I-Normalprofile Nr. 8 bis Nr. 50 gegeben hat[1]. Er erhielt

für Nr. 8: $\varkappa = 2{,}39$
- - 50: $\varkappa = 2{,}03$.

Für genietete Vollwandträger, deren Stechblech 0,9 cm stark ist und mit Hilfe von vier Saumwinkeln an je zwei Gurtbleche von 22, cm Breite und je 0,9 cm Stärke angeschlossen ist, erhält v. TETMAJER[2]

für die Trägerhöhe $h =$ 40	50	60	70 cm
$\varkappa =$ 2,96	2,71	2,49	2,35

RITTER-Zürich hat eine graphische Darstellung der Verteilungszahl veröffentlicht[3].

Aufgabe 18. *Die Verteilungszahl der Ellipse und des Kreises zu finden* (Fig. 35).

Die Halbachsen der Ellipse seien a und b. Irgend eine in ihr zur XX parallel gelegte Schnittlinie mm' schneide einen Kreis vom Halbmesser a im Punkte u. Wenn dann der Halbmesser Ou mit der XX den Winkel φ einschließt und die halbe Breite des Schnittes $mm' = s$ gesetzt wird, so erhält man

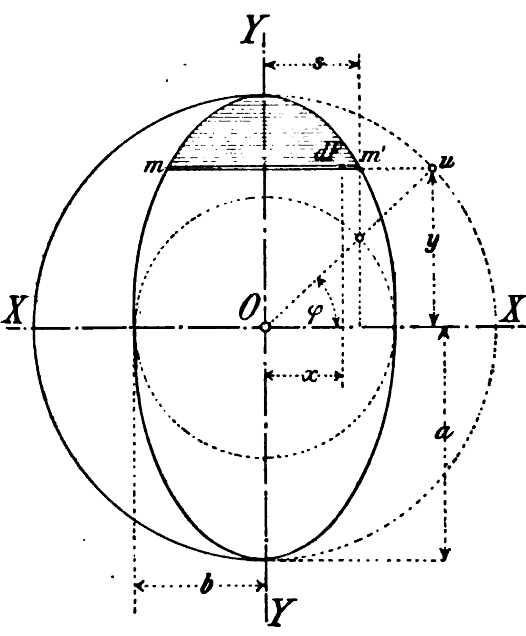


Fig. 36.

$$s = b\cos\varphi$$
und $y = a\sin\varphi$,

sowie daraus $\qquad dF = 2s\cdot dy = 2ab\cos^2\varphi\, d\varphi$.

---

[1] Schweizerische Bauz. 1889. Bd. XIII. S. 100.

[2] v. TETMAJER, Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre. 3. Aufl. 1905. S. 49.

[3] RITTER, Anwendungen der graphischen Statik. 1888. I. S. 84.

Das statische Moment der abgeschnittenen Ellipsenfläche beträgt danach

$$S = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} y\,dF = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} (a \sin\varphi)\, 2s \cdot dy$$

oder

$$S = 2a^2 b \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi = \tfrac{2}{3} a^2 b \cos^3\varphi\,.$$

Ferner ist einzusetzen

$$J = \frac{b a^3 \pi}{4}\,,$$

$$F = a b \pi\,.$$

So erhält man

$$\tau = \frac{QS}{2s \cdot J} = \frac{4Q}{3F} \cos^2\varphi\,,$$

ferner

$$\int \tau^2\,dF = \left(\frac{2 \cdot 16\, Q^2 a b}{9 F^2}\right) 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi\, d\varphi$$

und

$$\varkappa = \frac{F}{Q^2} \int \tau^2 dF = \frac{64}{9\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi\, d\varphi = \left(\frac{64}{9}\right)\left(\frac{5}{32}\right) = \frac{10}{9}\,. \qquad (50)$$

Den gleichen Wert

$$\varkappa = \frac{10}{9} = 1{,}11$$

erhält man, wie die Fig. 36 veranschaulicht, *auch für den Kreisquerschnitt.*

4. Mitunter berücksichtigt man außer den Schubspannungen τ_y auch noch *Querspannungen*[1]. Das erscheint aber für praktische Fälle unnötig. Denn wie aus den Darlegungen des I. Bandes (**114—115**) und aus den Betrachtungen unter **2**, a hervorgeht, beruht schon die Berechnung der Schubspannungen τ_y auf Annahmen, deren Genauigkeitsgrenzen durch Versuche bisher noch nicht festgestellt worden sind. Deshalb ist zu raten, eine Verteilungszahl stets abzurunden. Für gleichartige Querschnitte verschiedener Abmessungen unterscheiden sich die Zahlen nur wenig voneinander.

---

[1] v. BACH, Elastizität und Festigkeit. 4. Aufl. 1904. S. 456.

b. Durchbiegungen.

Aufgabe 19. *Für die zweite Öffnung des in den Fig. 26—30 untersuchten durchgehenden Trägers auf drei Stützen ist der Ort und die Größe der allein von den Schubspannungen erzeugten größten Durchbiegung zu berechnen.*

Nach Gl. (41) unter **5**, d erhält man für die Durchbiegung

$$y_s = \int_0^s \gamma dz = \frac{\varkappa}{G} \int_0^s \frac{Q dz}{F},$$

und für vorliegenden Belastungsfall demnach

$$y_s = \frac{\varkappa}{GF} \int_0^s Q dz.$$

Rechnet man die z von der Stütze c der 2. Öffnung ab nach links (Fig. 23), so berechnet sich

$$Q = C - qz,$$

worin nach der Aufgabe 15 (unter **7**, a) zu setzen ist

$$C = 7{,}25\,\mathrm{t},$$

$$q = 1{,}0\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}},$$

und

$$l_2 = 18\,\mathrm{m}.$$

Den Ort der größten Durchbiegung findet man aus

$$\frac{dy_s}{dz} = 0 = d\int_0^s Q dz = C - qz.$$

Das gibt

$$z = \frac{C}{q} = 7{,}25\,\mathrm{m}.$$

Die größte Durchbiegung y_s liegt also dort, wo $Q = 0$ ist, d. h. dort, *wo das Biegemoment seinen Grenzwert erreicht.*

Für die Gleitungszahl G ergibt sich für $m = 4$ und $E = 2180\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2}$, nach Gl. (4)

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E = 872\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2}.$$

Daraus

$$\max. y_s = \frac{2{,}31}{872 \cdot 212} \int_0^{725} \left(7{,}25 - \frac{z}{100}\right) dz.$$

Das gibt

$$\max. y_s = 0{,}033\,\mathrm{cm}.$$

Nach der Gl. (47), unter **7**, a. 3, hatte sich die durch die Biegemomente herbeigeführte größte Durchbiegung mit

$$y_m = 3{,}303 \text{ cm}$$

ergeben. Danach beträgt im vorliegenden Falle der größte Einfluß der Schubspannungen nur ein Hundertstel der Normalspannungen.

Hierzu sind die Aufgaben 3, 8 unter **4**, a und **5**, d. 2 zu vergleichen.

9. Elastische Linien krummer Stäbe.

a. Berechnung der Formänderungen. Wir beziehen uns hier auf die (in II. **34**) abgeleiteten Ausdrücke für die Dehnungen nnd Spannungen eines krummen Stabes.

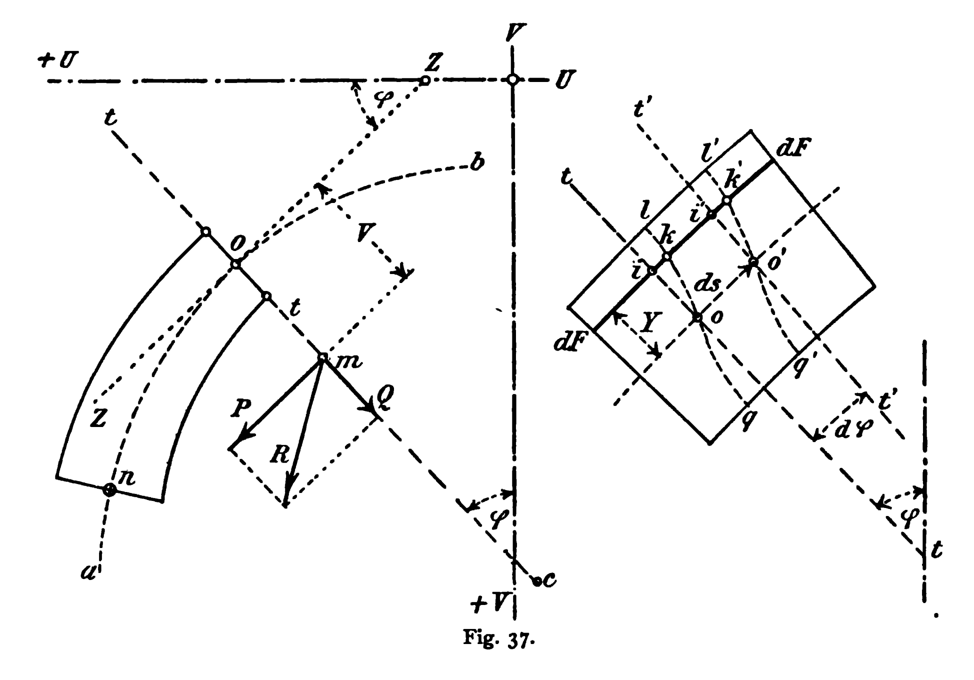


Fig. 37.

Dort wurde in Gl. (56) und (57) angeschrieben

$$\frac{\varDelta ds}{ds} = \frac{P}{EF} + \frac{M}{EF\varrho}$$

und

$$\frac{\varDelta d\varphi}{ds} = \frac{P}{EF\varrho} + \frac{M}{EJ_0} + \frac{M}{EF\varrho^2}. \qquad (51)$$

Darin bedeuteten (nach der Fig. 131—132 in II), die hier als Fig. 37 wiedergegeben ist:

ds: Abstand zweier Nachbarquerschnitte, in Bogenmaß und im Schwerpunkte *o* eines beliebigen Querschnittes gemessen,

φ: Winkel zwischen dem Krümmungshalbmesser ϱ im Punkte o und der lotrechten Achse VV,

P: Die in die Richtung der Tangente ZZ in o fallende Seitenkraft der auf den betrachteten Stabteil oa wirkenden Mittelkraft R aller äußeren Kräfte.

Außerdem war

$$J_0 = \int \frac{\varrho y^2 dF}{\varrho + y}$$

gesetzt worden (II, S. 161).

Aus den beiden Gl. (51) erhält man

$$\Delta s = \frac{1}{E} \int \left(\frac{P}{F} + \frac{M}{F\varrho} \right) ds,$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{E} \int \left(\frac{P}{F\varrho} + \frac{M}{J_0} + \frac{M}{F\varrho^2} \right) ds$$

und daraus

$$\Delta \varphi = \frac{1}{E} \int \left(\frac{M}{J_0} ds + \frac{\Delta ds}{\varrho} \right). \tag{52}$$

Für den Fall, der bei Bogenträgern in der Regel nur in Frage kommt, nämlich für große Werte von ϱ im Vergleich zur Bogenhöhe, verschwindet $\frac{\Delta ds}{\varrho}$. Das gibt

$$\Delta \varphi = \frac{1}{E} \int \frac{M}{J_0} ds. \tag{53}$$

Wenn der Krümmungshalbmesser ϱ in irgend einem Punkte der Stabachse nach erfolgter Formänderung in ϱ' übergegangen ist, so ist anzuschreiben:

$$\varrho'(d\varphi + \Delta d\varphi) = ds + \Delta ds,$$
$$\varrho\, d\varphi \qquad\qquad = ds.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi + \Delta d\varphi}{ds + \Delta ds} - \frac{d\varphi}{ds},$$

oder

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{\Delta d\varphi}{ds} - \frac{\Delta ds}{\varrho ds}}{1 + \frac{\Delta ds}{ds}}.$$

Angenähert darf dafür gesetzt werden

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{\Delta d\varphi}{ds} - \frac{\Delta ds}{\varrho ds}.$$

Setzt man hierin auf der rechten Seite den Ausdruck der Gl. (51), so erhält man

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ_0}. \tag{54}$$

Darin ist im allgemeinen $J_0 = \int \frac{\varrho y^2 dF}{\varrho + y}$. In den bekannten besondern Fällen, namentlich also für die Berechnung von *Bogenträgern*, darf dafür (nach II. **35**)

$$J = \int y^2 dF$$

gesetzt werden.

Bei gegebenen Krümmungshalbmesser ϱ kann die Gl. (54) dazu dienen, um für einen beliebig belasteten krummen Stab die nach erfolgter Formänderung eintretende *elastische Linie* mit Hilfe der Berechnung verschiedener Werte von ϱ' darzustellen. Eine Ableitung der Differentialgleichung der elastischen Linie bietet im allgemeinen große Schwierigkeiten.

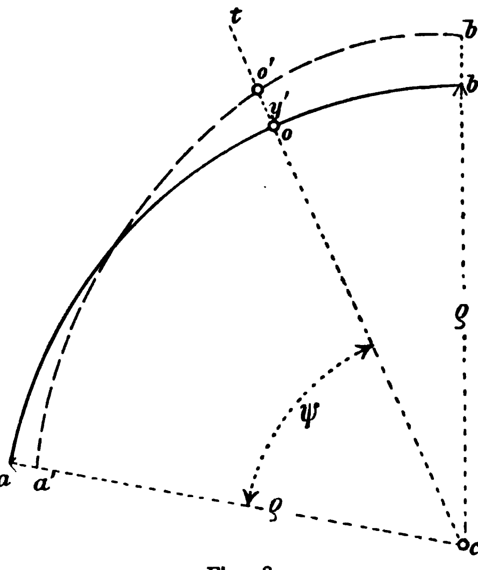


Fig. 38.

Über den *Einfluß der Schubspannungen* auf die Formänderungen bleibt das darüber (in II. **35**, c) Gesagte bestehen.

b. Differentialgleichung der elastischen Linie des nach einem Kreisbogen gekrümmten Stabes.

Wir nehmen an, die Bogenachse bilde im spannungslosen Zustande eine Kreislinie vom Halbmesser ϱ (Fig. 38). Ein Stück ab dieser Linie habe nach erfolgter Formänderung die punktiert gezeichnete Gestalt $a'b'$. Durch den beliebigen Achsenpunkt o ziehe man den Schnitt $\overline{tc}$, der die $a'b'$ in o' trifft. Die Verschiebung $\overline{oo'}$ in der Richtung des Kreishalbmessers werde mit y' bezeichnet und

$$\varrho + y' = r$$

gesetzt.

Der Krümmungshalbmesser im beliebigen Punkte o' sei ϱ'. Dann gibt die analytische Geometrie dafür den Ausdruck

$$\varrho' = \frac{\pm\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{d\psi^2}}, \tag{55}$$

wenn ψ der Winkel zwischen den Fahrstrahlen $\overline{ac}$ und $\overline{oc}$ ist.

Im vorliegenden Falle läßt sich dieser Ausdruck sehr vereinfachen. r und ϱ unterscheiden sich nur durch die als unendlich klein anzusehende Strecke y'. Somit ist anzuschreiben

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{d(\varrho + y')}{d\psi} = \frac{dy'}{d\psi}.$$

Das Quadrat von $\frac{dr}{d\psi}$ darf gegenüber dem Quadrate von r vernachlässigt werden. Streicht man also im Zähler und Nenner die Glieder mit $\left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2$ und vertauscht, was ebenfalls zulässig ist, im Nenner und Zähler der Gl. (55) r mit ϱ, so erhält man:

$$\varrho' = \frac{\varrho^3}{\varrho^2 - \varrho\frac{d^2 y'}{d\psi^2}},$$

oder

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2 y'}{d\psi^2}.$$

Das gibt in Verbindung mit der Gl. (54)

$$\frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2 y'}{d\psi^2} = \pm\frac{M}{EJ_0},$$

oder

$$EJ_0\frac{d^2 y'}{d\psi^2} = \pm\varrho^2 M. \tag{56}$$

Setzt man an Stelle von $\varrho^2 d\psi^2$ seinen Wert ds^2, so folgt schließlich

$$EJ_0\frac{d^2 y'}{ds^2} = \pm M, \tag{57}$$

also eine Differentialgleichung, *die mit derjenigen für die elastische Linie des geraden Stabes übereinstimmt* und die deshalb wie diese verwendet werden kann.

Für ein rechtwinkliges Achsenkreuz UV (Fig. 39) ist

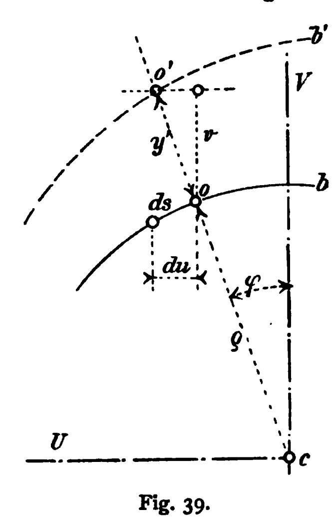


Fig. 39.

$$y' = \frac{v}{\cos\varphi}$$

und

$$ds = \frac{du}{\cos\varphi}.$$

Dafür erhält man demnach

$$EJ_0 \frac{d^2 v}{du^2} = \pm M, \tag{58}$$

wenn v *die Projektion der bogenrecht gemessenen Verschiebung auf die V-Achse* bedeutet. An Stelle von J_0 kann, wenn es sich um die Berechnung von *Bogenträgern* handelt, (wie unter a. erläutert) der Wert

$$J = \int y^2 dF$$

gesetzt werden.

Die Gl. (58) läßt sich zur Darstellung *der elastichen Linie von Korbbögen* (II. S. 233) verwenden.

§ 3. Die Berechnung und Darstellung von Punktverschiebungen.

10. Die gedachte (virtuelle) Formänderungsarbeit.

a. Ihre Anwendung nach dem Verfahren von Mohr. MOHR[1] war der Erste, der in grundlegender Weise gezeigt hat, wie man mit Hilfe des Satzes der gedachten (virtuellen) Verschiebungen eine Reihe der wichtigsten Aufgaben aus dem Gebiete der Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre lösen kann und zwar sowohl für statisch bestimmte als auch unbestimmte Systeme. Sein bahnbrechendes Verfahren hatte in der technischen Welt bereits Eingang gefunden, als auch eine ältere Veröffentlichung MAXWELLS[2] über ähnliche Gegenstände bekannt wurde, die aber — wie weiterhin ausführlich begründet wird — nicht geeignet erscheint, die Überlegenheit des Verfahrens von MOHR, sowie auch dessen Urheberschaftsrechte irgendwie zu schmälern.

---

[1] MOHR, Beitrag zur Theorie des Fachwerks. Zeitschr. des Arch.- und Ing.-Ver. in Hannover. 1874 und 1875.

[2] J. CLERK MAXWELL, Professor of Natural Philosophy in Kings College, London. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. Philosophical Magazine and Journal of Science. 1864. Band 27, S. 294—299.

Der dem Verfahren zugrunde liegende Satz der gedachten Verschiebungen ist aus der Mechanik bekannt. Sein Beweis wurde (unter I. **40**) bereits gegeben, soll jedoch hier nochmals ausführlicher wiederholt werden.

Der Satz lautet: *Bezeichnen* P_a, P_b, P_c, ... P_m *Kräfte, unter deren Einwirkung ein Molekül, ein Punkt, ein Körper oder eine Gruppe von Körpern sich im Gleichgewicht befinden; ferner* v_a, v_b, v_c, ... v_m *unendlich kleine Verschiebungen, die bei irgend einer gedachten möglichen Lagenänderung die Angriffspunkte jener Kräfte erfahren können, so muß bei jeder Lagenänderung die Arbeitssumme der Kräfte gleich Null sein.*

Mohr hat seinerzeit, in seinen Vorträgen an der technischen Hochschule in Dresden, etwa folgenden Beweis des Satzes gegeben: Ist ein materieller Punkt im Gleichgewicht, so ist für jede Achsenrichtung die Summe der Seitenkräfte aller dort wirkenden P gleich Null. Denkt man also dem Punkte eine Verschiebung v in der Richtung der Achse erteilt, so muß auch das Produkt aus v und der Seitenkraftsumme Null sein. Daraus folgt

$$\sum (P \cos \alpha)\, v = 0\,,$$

wenn α den Winkel vorstellt, den eine Kraft P mit jener Achsenrichtung einschließt. Bezeichnet man die *in der Richtung von P genommene Verschiebung* mit δ und deutet durch die Schreibweise $\overline{P}$ an, daß die P (unserer Voraussetzung nach) von den δ *unabhängig* sind, so erhält man den Satz in der Form

$$\sum \overline{P}\delta = 0\,. \tag{59}$$

Der Satz gilt für jede Gruppe von Punkten, also auch für jeden Körper und jede Körpergruppe. Auch *brauchen die δ dem Elastizitätsgesetze nicht unterworfen zu sein.*

b. Die Arbeitsgleichungen Mohrs.

1. Von besonderer Wichtigkeit ist die Anwendung der Gl. (59) auf einen Körper oder eine Körpergruppe, die unter der Einwirkung von äußern Kräften $\overline{P}$ und den dadurch bedingten *innern* Kräften $\overline{S}$ sich im Gleichgewichte befindet. Wie im I. Bande (unter **2**, b) erläutert worden ist, darf man die den molekularen Zusammenhang eines Körpers sichernden elastischen oder innern Kräfte der Moleküle durch äußere Kräfte von entsprechender Größe und Richtung ersetzt denken. Die Wirkung einer, zwischen den Punkten 1 und 2 zweier Nachbarquerschnitte tätigen innern Kraft (Fig. 40) kann danach stets *durch zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete äußere Kräfte $\overline{S}$ ersetzt gedacht*

werden, von denen eine jede in einem der Punkte angreift. Unter den Folgen der Formänderung des Körpers vollführen nun die Angriffspunkte von $+\bar{S}$ und $-\bar{S}$ zweierlei Bewegungen, von denen die eine als eine Drehung um einen augenblicklichen Pol aufgefaßt werden kann, während die andere die gegenseitige *elastische* Verschiebung der Angriffspunkte ist. Die von $+\bar{S}$ und $-\bar{S}$ bei der Drehung vollbrachte Arbeit ist Null. Denn der bei der Drehung entstehende Bogenweg ist für jede Kraft von gleicher Größe und gleichem Sinne. Es bleibt demnach *nur die elastische Formänderungsarbeit* zu berücksichtigen. Sind die hierbei von den Punkten 1 und 2, in der Richtung von $\bar{S}$, zurückgelegten Wege gleich Δs_1 und Δs_2, so ist die Arbeitsgleichung mit

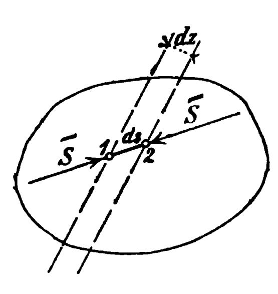


Fig. 40.

$$\sum \bar{P}\delta - \sum \bar{S}(\Delta s_1 + \Delta s_2) = 0$$

anzuschreiben. Das Minuszeichen gilt, weil Δs_1 und Δs_2 immer der Richtung der zugehörigen Spannkraft entgegengesetzt sind. Die Summe $(\Delta s_1 + \Delta s_2)$ bedeutet die Änderung Δs des Abstandes von zwei durch 1 und 2 gelegt gedachten Nachbarquerschnitten, gemessen in der Richtung von $\bar{S}$. Obige Gleichung erhält dadurch die Form

$$\sum \bar{P} \cdot \delta = \sum \bar{S} \cdot \Delta s\,. \tag{60}$$

In Worten: *Im Falle des elastischen Gleichgewichts ist die gedachte Arbeit der äußern Kräfte ebenso groß wie diejenige der innern Kräfte.*

Unter den äußern Kräften $\bar{P}$ sind auch die durch diese hervorgerufenen *Stützenkräfte* (I. § 7) mit einbegriffen. Deren Arbeit verschwindet aber, wenn (wie gewöhnlich) *Stützpunkte* (I. § 3) vorausgesetzt werden, die *in der Richtung* der zugehörigen Stützenkraft *unverschieblich* sind. In Ausnahmefällen, wo etwa elastische Verschiebungen von Stützpunkten in Frage kämen, können diese als Längenänderungen entsprechend angeordneter *Stützenstäbe* in die Rechnung eingeführt werden (vgl. **11**, c, Aufgabe 26).

Die $\bar{P}$ und $\bar{S}$ bilden, den Annahmen gemäß, eine *gedachte*, willkürlich zusammengesetzte Gleichgewichtsgruppe, die von den δ und Δs unabhängig ist und die fortan »*die gedachte Belastung*« genannt werden soll. δ und Δs sollen »*die wirklichen Verschiebungen*« genannt werden. Diese sind insofern voneinander abhängig, als beide *durch eine gleiche Ursache*, z. B. durch *Temperaturänderungen* oder durch eine beliebige Gleich-

gewichtsgruppe P, S hervorgerufen werden. Für den danach zulässigen Fall, daß die Kräftegruppen $\overline{P}$, $\overline{S}$ und P, S identisch sind, geht die Arbeitsgleichung (60) in die Form

$$\sum P\delta = \sum S \Delta s \tag{61}$$

über.

2. Wenn man mit Hilfe der Arbeitsgleichung (60) eine Verschiebung δ berechnen will, die von einer gegebenen Belastung verursacht wird, so braucht man nur alle gedachten Kräfte $\overline{P}$, bis auf eine, verschwinden zu lassen und diese eine gleich »*Eins*« zu setzen. Es verbleiben dann allerdings außer der gedachten *Krafteinheit* auch noch die durch diese bedingten Stützenkräfte. Deren Arbeit sei aber gleich Null, unter der Voraussetzung von *unbeweglichen Stützpunkten.* Danach lautet die neue Arbeitsgleichung

$$\overline{1} \cdot \delta = \sum \overline{S} \cdot \Delta s\,.$$

Die Krafteinheit kann sowohl eine Einzelkraft, als auch ein *Moment* vorstellen. Im letzten Falle würde δ den zugehörigen *Verdrehungswinkel*, in Bogenmaß ausgedrückt, bedeuten (**3**, a). Durch Division mit »Eins« geht die Spannkraft $\overline{S}$ in die unbenannte Zahl $\overline{S}$ über. Man erhält dann

$$\delta = \sum \overline{S} \Delta s\,. \tag{62}$$

Die große Bedeutung der Mohrschen Arbeitsgleichungen soll zunächst durch eine Reihe von einfachen Beispielen veranschaulicht werden. Dabei wird für *die gedachte Formänderungsarbeit allgemein die Bezeichnung* $\overline{\mathfrak{A}}$ *eingeführt.*

11. Übungsaufgaben zu den Arbeitsgleichungen von Mohr.

a. Gedachte Arbeit in besonderen Fällen.

Aufgabe 20. *Ein gerader Stab (oder ein solcher ebener krummer Stab, der nach* II. **35** *wie ein gerader berechnet werden darf) trage außer einer Achsenkraft P noch eine beliebige lotrechte Belastung. Zu berechnen sei* $\overline{\mathfrak{A}}$ *für die Normalspannungen. Schubspannungen, die (wie die Aufgaben* 3 *und* 8 *unter* **4** *nachweisen) auf die Formänderungen nur einen verschwindend kleinen Einfluß üben, sind zu vernachlässigen.*

Zur Lösung der Aufgabe könnten die früher aufgestellten Ausdrücke für die *wirkliche* Formänderungsarbeit benutzt werden. Dazu brauchte man darin nur die »*gedachte Belastung* $\overline{P}$, $\overline{S}$« von den »*Verschiebungen* δ, Δs« zu trennen. Im vorliegenden einfachen Falle lassen sich aber die gesuchten Ausdrücke ohne weiteres anschreiben. Man erhält für irgend zwei in der Entfernung dz gelegte Nachbarquerschnitte, und für die *Achsenkraft P*

$$\overline{S} = \overline{P}$$

und

$$\frac{\varDelta s}{dz} = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{EF}$$

oder

$$\sum \overline{S} \varDelta s = \int \frac{\overline{P}P}{EF} dz, \tag{63}$$

worin die Integration über die betrachtete Strecke der geraden Stabachse (oder der Bogenachse) auszuführen ist.

Ist ferner das in einem beliebigen Querschnitte durch die lotrechte Belastung erzeugte Moment gleich M und der zugehörige Verdrehungswinkel der Nachbarquerschnitte gleich $\varDelta d\varphi$, so folgt aus der Arbeitsgleichung (60) für vorliegende Aufgabe

$$\int \overline{S} \varDelta s = \int \overline{M} \cdot \varDelta d\varphi .$$

Nach den Gleichungen (60) des II. Bandes ist aber für den geraden und krummen Stab

$$\frac{\varDelta d\varphi}{dz} = \frac{M}{EJ} .$$

Das gibt

$$\int \overline{S} \cdot \varDelta s = \int \frac{\overline{M}M}{EJ} dz .$$

Danach ist die gesuchte Arbeit mit

$$\overline{\mathfrak{A}} = \int \frac{\overline{P}P}{EF} dz + \int \frac{\overline{M}M}{EJ} dz \tag{64}$$

gefunden.

Aufgabe 21. *Im vorigen Belastungsfalle erfahre der Stab eine Temperaturerhöhung, die in seinem obern Rande t_o^0 und im untern Rande t_u^0 C. betrage. Wie groß ist der dadurch verursachte Zuwachs der Formänderungsarbeit $\overline{\mathfrak{A}}$, wenn angenommen werden darf, daß die Temperatur von t_o bis t_u in gerader Linie abnimmt und wenn der Stab überall gleiche Höhe h hat?*

Wie in der Aufgabe 6 (unter **4**) ausführlich dargelegt worden ist, bestehen die durch die Temperatur verursachten Formänderungen in einer Verlängerung der Stabachse und in einer Verdrehung der Querschnitte. In der Stabachse herrscht (nach unserer Voraussetzung) eine Temperatur

$$\frac{t_o - t_u}{2} = \frac{t_z}{2},$$

wenn t_z den Unterschied zwischen t_o und t_u bezeichnet. Die Längenänderung der Achse *zwischen zwei Nachbarquerschnitten* beträgt demnach

$$\Delta dz = \alpha_t \frac{t_z}{2} dz,$$

wenn α_t die *Temperaturdehnung* einer Faser für 1° C. bedeutet.

Der Verdrehungswinkel $\Delta d\varphi$ (für gerade und krumme Stäbe) berechnet sich aus der Fig. 41 mit

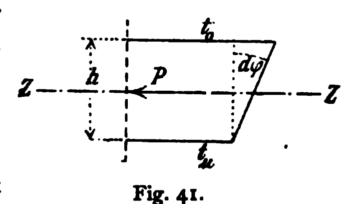


Fig. 41.

$$\Delta d\varphi = \frac{\alpha_t t_o dz - \alpha_t t_u dz}{h} = \alpha_t \frac{t_z}{h} dz,$$

wobei der Winkel (seiner großen Kleinheit wegen) gleich seiner trigonometrischen Tangente gesetzt worden ist (vgl. Aufgabe 6 unter 4). Die elastische Formänderungsarbeit des Stabes erhöht sich danach um

$$\overline{\mathfrak{A}}_t = \int \overline{P}\left(\alpha_t \frac{t_z}{2} dz\right) - \int \overline{M}\left(\alpha_t \frac{t_z}{h} dz\right). \qquad (65)$$

Das Minuszeichen tritt ein, weil der Stab (durch die Temperaturerhöhung allein) eine Verlängerung der oberen Randfaser, also eine Krümmung nach *oben* erfährt, während die Belastung ihn nach *unten* krümmt.

Aufgabe 22. *Für ein ebenes oder räumliches, auf unverschiebbaren Stützpunkten ruhendes Fachwerk, in dessen Knoten beliebige äußere Kräfte P angreifen, von denen die Stabkräfte S erzeugt werden, ist die wirkliche und die gedachte Formänderungsarbeit zu berechnen, unter der Annahme von Temperaturänderungen, die im allgemeinen für jeden Stab verschieden sein können.*

Hier gilt ohne weiteres die Arbeitsgleichung (60)

$$\sum \overline{P}\delta = \sum \overline{S}\Delta s,$$

worin $\overline{P}$, $\overline{S}$ eine »*gedachte Belastung*« und δ, Δs die durch die Belastung P, S verursachten »*wirklichen Verschiebungen*« vorstellen. δ ist die Verschiebung irgend eines der Knoten des Fachwerks, genommen in der Richtung der Mittelkraft aller dort angreifenden P. Δs ist die elastische Längenänderung irgend eines Stabes. Bezeichnet s eine Stablänge und sind E und F die bekannten Größen, so erhält man danach

$$\overline{\mathfrak{A}} = \sum \overline{S} \frac{Ss}{EF} = \sum \overline{S} S k \qquad (66)$$

und für die *wirkliche* Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}$, wenn $\overline{P}$, $\overline{S}$ mit P, S

vertauscht gedacht und (nach **3**, a) beachtet wird, daß P und S von Null ab bis auf ihre Größe wachsen

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\sum S\frac{Ss}{EF} = \tfrac{1}{2}\sum S^2 k. \qquad (67)$$

Dazu kommt, im Falle sie zu berücksichtigen sind, für Temperaturänderungen noch hinzu

$$\mathfrak{A}_t = \sum S \Delta s_t = \sum S(\alpha t s). \qquad (68)$$

Wie in obigen Gleichungen bereits geschehen, soll von jetzt ab für den Faktor

$$\frac{\text{Stablänge}}{\text{Dehnungsmaß} \times \text{Querschnitt}}$$

die Bezeichnung *Dehnungsvermögen* gewählt und der Buchstabe k gesetzt werden.

b. Statisch bestimmte Systeme.

Aufgabe 23. *Die Stabkraft H zwischen den Knoten 2 und 4 des in Fig. 42 dargestellten belasteten Dachbinders soll berechnet werden.*

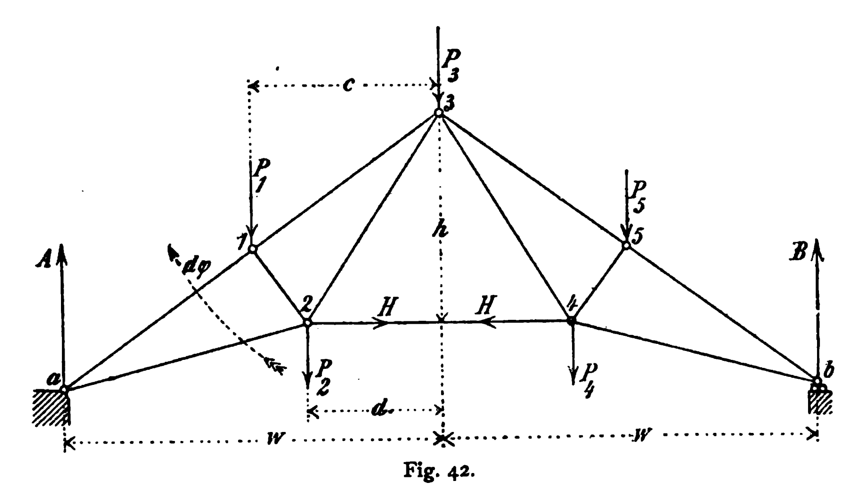


Fig. 42.

Man denke die Stabkraft H in bekannter Weise als äußere Kraft in den Knoten 2 und 4 angreifend. Dann erteile man der linken Binderhälfte eine Drehbewegung $d\varphi$ um den Knoten 3, so daß die rechte Hälfte ruhen bleibt. Weil danach die Kräfte der rechten Hälfte (wegen $d\varphi = 0$) keine Arbeit verrichten, so ist die Arbeitsgleichung mit

$$+A(w\,d\varphi) - P_1(c\,d\varphi) - P_2(d\,d\varphi) - Hh\,d\varphi = 0$$

anzuschreiben. Daraus folgt

$$H = \frac{Aw - P_1 c - P_2 d}{h}.$$

Dasselbe Ergebnis erzielt man bei Anwendung des Momentenverfahrens von RITTER (I. **68**).

Aufgabe 24. *Im Knoten m des in der* Fig. 43 *dargestellten statisch bestimmt gestützten und in allen seinen Abmessungen gegebenen Fachwerks*

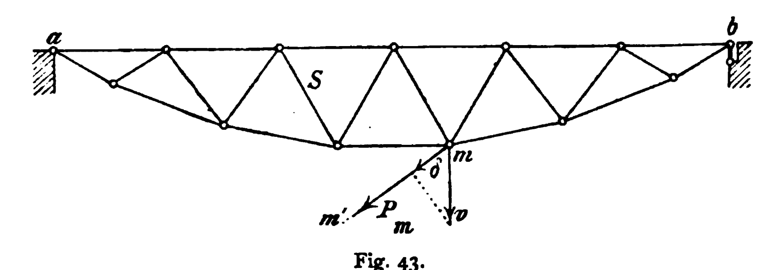


Fig. 43.

greift eine Kraft P_m in der Richtung mm' an. Wie groß ist die Verschiebung δ_m des Knotens in dieser Richtung, wenn außer der Wirkung von P_m auch noch der Einfluß einer Temperaturänderung von t Graden berücksichtigt werden muß?

Hier kommt die Arbeitsgleichung (62)

$$\overline{1} \cdot \delta = \sum \overline{S} \Delta s$$

in Anwendung, die mit Rücksicht auf die zu beachtende Temperaturänderung

$$\overline{1} \cdot \delta = \sum \overline{S}(\Delta s + \alpha_t t s) = \sum \overline{S}(Sk + \alpha_t t s)$$

geschrieben werden kann. α_t ist hier die *Temperaturdehnung* (I. **5**) des Stabes für 1° C. $\overline{S}$ stellt eine der Stabkräfte dar, die durch die *gedachte Krafteinheit* verursacht wird. Man findet die $\overline{S}$ nach einem der im I. Bande gegebenen Verfahren, z. B. durch Zeichnen eines MAXWELL-CREMONA-Planes (I. **70**). Die Stabkräfte S sind um P_m mal größer als $\overline{S}$, also

$$S = P_m \overline{S}$$

oder

$$\delta = \sum (k P_m \overline{S}^2 + \alpha_t t s \overline{S}) . \tag{69}$$

Die Temperaturgrade t können im allgemeinen für *jeden* Stab verschieden sein.

Aufgabe 25. *Ein Holzbalken auf zwei Stützen,* (Fig. 44) *von überall gleichem rechteckigen Querschnitte* (*Breite b und Höhe h*) *ist gleichmäßig belastet. Wie groß ist seine Durchbiegung δ in der Mitte, wenn nur die Normalspannungen berücksichtigt werden?*

Grundlage der Berechnung ist die Arbeitsgleichung

$$\bar{1} \cdot \delta = \sum \bar{S} \Delta s .$$

δ ist die gesuchte Durchbiegung, $\bar{S}$ eine durch die gedachte Krafteinheit hervorgerufene Normalspannkraft, Δs die Verlängerung der zu $\bar{S}$ gehörigen Faser, verursacht durch die Balkenlast. δ ist durch *die Formänderung der beiden Randfasern* bestimmt. Deshalb kann man sich in den Randfasern jedes Querschnittes (Fig. 44) je eine Spannkraft $\bar{S}$ angreifend denken, die dem aus der Krafteinheit herrührenden Momente $\bar{M}$ das Gleichgewicht hält. Wir berechnen jetzt zuerst $\bar{S}$, dann Δs.

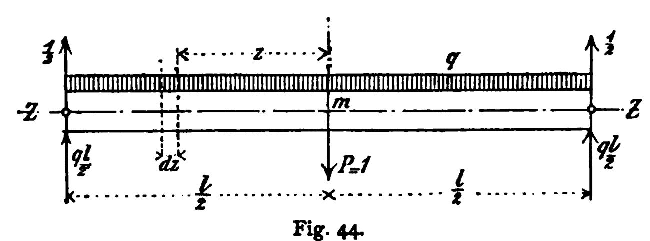


Fig. 44.

Die von der Krafteinheit verursachten Stützenkräfte sind gleich $\frac{1}{2}$. Das Moment $\bar{M}$ für einen Schnitt in der Entfernung z von der Balkenmitte ist

$$\bar{M} = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2} - z\right).$$

Das Moment der in den Randfasern angreifend gedachten Spannkräfte $\bar{S}$ ist gleich $\bar{S}h$. Daraus folgt

$$\bar{S} = \frac{\left(\frac{l}{2} - z\right)}{2h} .$$

Die Längenänderung Δs einer Randfaser ist im beliebigen Schnitte (nach I. **103**, b und **104**, c) aus den Bedingungen

$$\frac{\Delta s}{dz} = \frac{\sigma}{E}$$

und

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{Mh}{2J}$$

zu berechnen. Das Moment der gleichmäßigen Belastung ist für den Schnitt mit

$$M = \frac{ql}{2}\left(\frac{l}{2} - z\right) - \frac{q\left(\frac{l}{2} - z\right)^2}{2}$$

oder

$$M = \frac{q}{8}\,(l^2 - 4z^2)$$

anzuschreiben. Das alles eingesetzt gibt

$$\Delta s = \frac{\sigma}{E}\,dz = \frac{Mh}{2EJ}\,dz = \frac{q(l^2 - 4z^2)h}{16EJ}\,dz\,.$$

Schließlich erhält man, weil die Summe hier in das Integral übergeht,

$$1 \cdot \delta = 2\int_0^{\frac{l}{2}} 2 \cdot \bar{S}\Delta s = \frac{q}{8EJ}\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{l}{2} - z\right)(l^2 - 4z^2)\,dz$$

oder aufgelöst

$$\delta = \frac{5ql^4}{384EJ};$$

das gäbe für

$$l = 2\text{ m};\quad b = 20\text{ cm};\quad h = 24\text{ cm};\quad q = 1{,}0\,\frac{\text{t}}{\text{m}};\quad E = 100\,\frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$$

$$\delta = \frac{5 \cdot \frac{1{,}0}{100} \cdot 200^4}{384 \cdot 100 \cdot \frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 24^3} = 0{,}09\text{ cm.}$$

c. Statisch unbestimmte Systeme.

Aufgabe 26. *Ein Walzeisenträger* (Fig. 45), *von der Länge* l, *ist mit einem Ende wagerecht eingespannt, das andere lagert mit Hilfe eines lotrecht gestellten flußeisernen Stützenstabes in einem unverschieblichen Stützpunkte. Die Länge des Stützenstabes sei* s. *Wie groß ist die Stützenkraft* X *im Punkte* a, *wenn der Träger gleichmäßig belastet ist?*

Fig. 45.

Die Trägerscheibe ist durch $(3 + 1) = 4$ Stäbe an die Erde geschlossen (I. **28**). Die Konstruktion ist also *einfach* statisch unbestimmt. Um (nach I. **35**) das statisch bestimmte *Hauptnetz* herzustellen, denken wir uns am einfachsten den Stützenstab beseitigt und an dessen Stelle

die Stützenkraft X als äußere Kraft angreifen. Dann gilt hier die Arbeitsgleichung (62) in der Form

$$\bar{1} \cdot \delta = \int_0^l \bar{S} \Delta s = \int_0^l \frac{\bar{M} M}{EJ} dz.$$

Darin greife die gedachte Krafteinheit im Punkte b senkrecht zu ab an. Dann ist δ die durch die wirkliche Belastung (q, X) zu erwartende Verkürzung des Stützenstabes. Die Bedeutung des Integrals ist (nach der Aufgabe 20) bekannt. Es ist danach anzuschreiben

$$\bar{M} = \bar{1} \cdot z.$$

Das Moment M setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Der erste Teil M_q rührt von der gegebenen gleichmäßigen Belastung her und berechnet sich mit

$$M_q = \frac{q z^2}{2}.$$

Der zweite Teil M_x wird durch X verursacht und ist um Xmal größer als das Moment der Krafteinheit *negativ* genommen, also

$$M_x = -X(z).$$

Dies alles eingesetzt und EJ als unveränderlich vorausgesetzt, gibt

$$\bar{1} \cdot \delta = \frac{1}{EJ} \int_0^l (\bar{1} \cdot z) \left[\frac{q z^2}{2} - X(z) \right] dz.$$

Nach erfolgter Auflösung des Integrales, und Division mit $\bar{1}$, erhält man

$$\delta = \frac{3 q l^4 - 8 X l^3}{24 EJ}.$$

Es muß aber δ gleich der durch die Stützenkraft bewirkten Längenänderung des Stützenstabes sein. Dadurch findet man die Bedingungsgleichung

$$\delta = \frac{X \cdot s}{EF} \tag{70}$$

und durch Verbindung der beiden für δ erhaltenen Ausdrücke ist X in der Form

$$X = \frac{3 q l^4 F}{8(3 s J + l^3 F)} \tag{71}$$

auszuscheiden.

Wenn der Träger *nicht* durch einen Stützenstab mit der Erdscheibe verbunden wäre, sondern mit seiner Unterkante auf einem Gleit- oder

Rollenlager läge (I. **20**), so würde das δ der Gl. (70) um so kleiner werden, je größer F wäre. In den meisten praktischen Fällen wird dann δ so klein, daß es auf die Größe von X nur von verschwindendem Einflusse ist. Nimmt man den Stützpunkt als unbeweglich an, so wird $\delta = 0$ und

$$X = \frac{3}{8} q l. \tag{72}$$

Es sei jetzt der Träger ein I-Eisen (Normalprofil Nr. 20, mit 214 cm³ Widerstandsmoment) und von 2,0 m Länge. Seine gleichmäßige Belastung betrage 5,0 $\frac{\text{t}}{\text{m}}$ (einschl. Eigengewicht), der Querschnitt des 15 cm langen Stützenstabes 10 cm². Das gibt nach Gl. (71)

$$X = \frac{3 \cdot \frac{5}{100} \cdot 200^4 \cdot 10}{8(3 \cdot 15 \cdot 214 \cdot \frac{20}{2} + 200^3 \cdot 10)} = 3{,}745 \text{ t}$$

und nach Gl. (72)

$$X = 3{,}75 \text{ t}.$$

Man sieht, daß es wohl zulässig gewesen wäre, in diesem Falle δ von vornherein gleich Null zu setzen, d. h. den Stützenstab als *starr* anzusehen (vgl. die Aufgabe 11 unter **6**, a).

Aufgabe 27. *Im vorigen Beispiele soll die Durchbiegung δ der Trägermitte in der Richtung der Belastung bestimmt werden* (Fig. 46).

Die Stützenkraft X ist berechnet worden. Wir denken sie uns als *gegebene* äußere Kraft B im Stützpunkte b angebracht und machen dadurch das statisch unbestimmte System zu einem statisch bestimmten *Hauptsystem* (Hauptnetz), dessen Spannungen und Formänderungen denjenigen des unbestimmten Systems identisch sind. Um also die gesuchte Durchbiegung berechnen zu können, brauchen wir in der Trägermitte nur eine gedachte Krafteinheit (in der Belastungsrichtung) wirken zu lassen und hierfür $\overline{M}$ und M zu berechnen, wie es in der Fig. 46 unten veranschaulicht ist. Dann ist

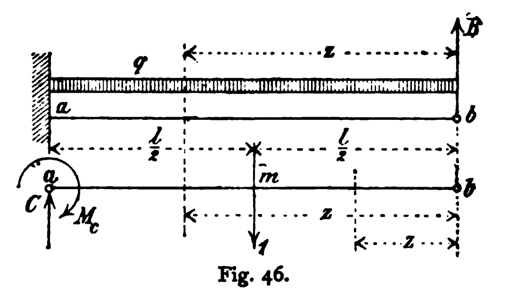


Fig. 46.

$$\overline{1} \cdot \delta = \int \frac{\overline{M} M}{E J} dz.$$

Darin ist zuerst $\overline{M}$ zu berechnen und zwar für zwei Schnitte, nämlich für $z < \frac{l}{2}$ und $z > \frac{l}{2}$. Denn für jeden dieser Schnitte erhalten wir

verschiedene Werte von $\overline{M}$. Vorher werden die in der Einspannung wirkenden äußern Kräfte $\overline{M}_c$ und die Stützenkraft $\overline{C}$ zu ermitteln sein. Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$$+C-1=0, \text{ oder } \overline{C}=+1,$$

$$\overline{M}_c+\overline{C}\frac{l}{2}=0, \text{ oder } \overline{M}_c=-1\left(\frac{l}{2}\right).$$

Danach ist anzuschreiben

$$\text{für } z<\frac{l}{2}: \overline{M}=-1\left(\frac{l}{2}\right)+1(l-z)-1\left(\frac{l}{2}-z\right)=0,$$

$$\text{„} \quad z>\frac{l}{2}: \overline{M}=-1\left(\frac{l}{2}\right)+1(l-z)=1\left(\frac{l}{2}-z\right).$$

M berechnet sich für jedes z mit

$$M=+B\cdot z-\frac{qz^2}{2}.$$

Setzt man darin unter Voraussetzung eines *in der Richtung von B* unverschieblichen Stützpunktes b

$$X=B=\tfrac{3}{8}ql,$$

so giebt das

$$M=q\left(\frac{3lz}{8}-\frac{z^2}{2}\right)$$

und

$$\delta=\frac{q}{EJ}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\left(\frac{l}{2}-z\right)\left(\frac{3lz}{8}-\frac{z^2}{2}\right)dz.$$

Für die Grenzen $z=0$ und $z=\frac{l}{2}$ ist das Moment $\overline{M}=0$, deshalb entfällt das Integral für diese Trägerstrecke. Nach erfolgter Auflösung erhält man

$$\delta=\frac{ql^4}{192EJ}$$

oder

$$\delta=\frac{\frac{5}{100}\cdot 200^4}{192\cdot 2000\cdot 214\cdot\frac{20}{2}}=0{,}097 \text{ cm}.$$

Aufgabe 28. *Ein flußeiserner Vollwandbogenträger (acb der* Fig. 47) *ist in a mit Hilfe eines festen Gelenkes und in b durch eine Rollenstütze gelagert. Zwischen den Stützpunkten a und b ist ein wagerechter Stab ab eingespannt. Um wieviel verschiebt sich der Stützpunkt b in wagerechter Linie, wenn außer dem Eigengewichte des Bogens ab noch eine im Bogenscheitel c angreifende lotrechte Last P berücksichtigt werden soll?*

Das System ist *außen* statisch bestimmt, weil es nur mit 3 Stäben an die Erdscheibe geschlossen ist (I. **22. 35**). *Innen* ist es aber einfach statisch unbestimmt, weil die vorhandenen 2 Knoten nur 4 Bedingungsgleichungen liefern, obwohl 5 Unbekannte zu berechnen sind. Die lotrecht gerichtete Belastung erzeugt ebenso gerichtete Stützenkräfte (A und B).

Die Verschiebung δ des Stützpunktes b muß ebenso groß werden, wie die elastische Längenänderung des Stabes ab. Bezeichnet H dessen vorläufig noch unbekannte und statisch nicht bestimmte Stabkraft, so ist, nach dem Elastizitätsgesetze

$$\delta = \frac{H \cdot l}{EF_z}$$

anzuschreiben, worin F_z den Querschnitt des Stabes ab vorstellt.

Man findet aber δ auch aus der Arbeitsgleichung

$$\bar{1} \cdot \delta = \int \frac{\overline{M}M}{EJ} ds,$$

worin ds die Entfernung zweier Nachbarquerschnitte des Bogens bedeutet. Aus der Verbindung der beiden Gleichungen für δ ist zuerst H auszuheben und daraus δ zu berechnen.

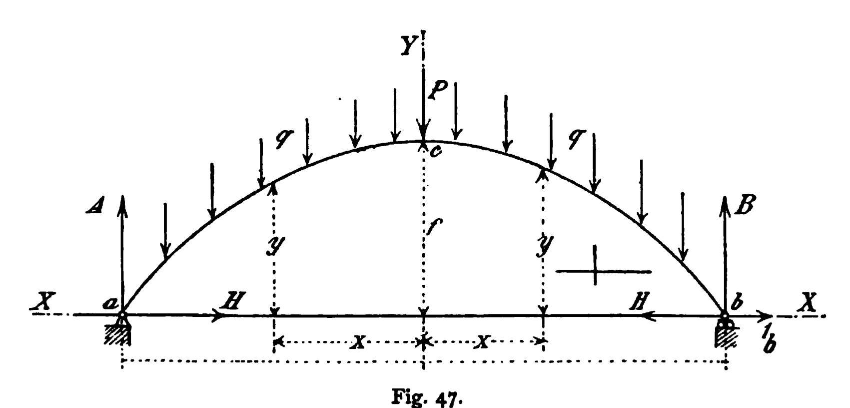


Fig. 47.

Für die gedachte Krafteinheit wird das System ins Gleichgewicht gesetzt, wenn im Stützpunkte a auch eine Krafteinheit angebracht wird, deren Richtung der in b wirkenden Einheit entgegengesetzt ist. $\overline{A}$ und $\overline{B}$ sind dabei gleich Null. Man erhält dann für irgend einen Querschnitt der Ordinaten x, y (Fig. 47) das gedachte Moment der äußern Krafteinheiten mit

$$\overline{M} = + \bar{1} \cdot y,$$

wobei zu bedenken ist, daß die auf dem rechten Bogenteil *links* drehenden Momente *positiv* zu setzen sind (I. **66**, a). Um das Moment der wirklichen Belastung zu erhalten ist die vorläufig noch unbekannte Spannkraft H des Stabes ab (in bekannter Weise) als äußere Kraft einzuführen. H ist die statisch nicht bestimmbare Größe (I. **35**). Man erhält

$$M = A(w - x) - Hy,$$

worin

$$A = \frac{P + ql}{2}$$

einzusetzen ist. Somit geht die Arbeitsgleichung in

$$\delta = \frac{2}{E}\int\frac{(A(w-x)y - Hy^2)\,ds}{J}$$

über, oder in

$$\delta = \frac{2}{E}\int\frac{A(w-x)y\,ds}{J} - \frac{2\delta F_z}{l}\int\frac{y^2 ds}{J}.$$

Das gibt vorläufig

$$\delta = \frac{2\int\frac{A(w-x)y\,ds}{J}}{E\left\{1 + \frac{2F_z}{l}\int\frac{y^2 ds}{J}\right\}}.$$

Um die Integration ausführen zu können muß die Gleichung der Bogenachse gegeben sein. Wir nehmen an, diese sei eine *Parabel*, oder könne genau genug als eine Parabel angesehen werden. Dann ist die Parabelgleichung für die Scheitellotrechte als Y-Achse mit

$$y = \frac{\mathfrak{f}}{w^2}(w^2 - x)$$

anzuschreiben, worin $w = \frac{l}{2}$ zu setzen ist.

Das Trägheitsmoment J soll *veränderlich* angenommen werden. Ist J_c das Trägheitsmoment im Scheitel c, so darf — wie es schon unter II. **49**, c für einen *Stein*bogen geschehen ist — für J angenähert der Wert

$$J = \frac{J_c}{\cos^3\varphi}$$

angesetzt werden. Ferner ist

$$ds = \frac{dx}{\cos\varphi},$$

wenn φ den Winkel der Scheitellotrechten mit irgend einem Krümmungshalbmesser bezeichnet. Danach ergibt sich

$$\delta = \frac{\dfrac{2Af}{w^2 J_c}\displaystyle\int_0^w (w-x)(w^2-x^2)\cos^2\varphi\,dx}{E\left\{1+\dfrac{2F_s f^2}{l w^4 J_c}\displaystyle\int_0^w (w^2-x^2)^2\cos^2\varphi\,dx\right\}}.$$

Es ist aber

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\varphi} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{1+\dfrac{4f^2x^2}{w^4}}$$

oder

$$\cos^2\varphi = \frac{w^4}{w^4+4f^2x^2} = \frac{w^4}{4f^2(p^2+x^2)},$$

wenn p den Parameter der Parabel vorstellt, der mit

$$p = \frac{w^2}{2f}$$

anzuschreiben ist (II, S. 240).

Dies eingesetzt gibt

$$\delta = \frac{2pA\displaystyle\int_0^w \frac{(w-x)(w^2-x^2)\,dx}{p^2+x^2}}{2EJ_c+\dfrac{EF_s}{l}\displaystyle\int_0^w \frac{(w^2-x^2)^2\,dx}{p^2+x^2}}. \tag{73}$$

Jedes der beiden Integrale dieses Ausdruckes löst sich mit Hilfe der Division seines Zählers durch den Nenner, wie dies im Beispiel unter II, **49**, S. 241 schon einmal durchgeführt worden ist. Setzt man das obere Integral gleich Z, das untere gleich N, so erhält man schließlich

$$Z = 2pA\left\{-\frac{w^2}{2}+\frac{w^2+p^2}{2}(\log(w^2+p^2)-\log p^2)+w(w^2+p^2)\cdot\frac{1}{p}\,\mathrm{arctg}\frac{w}{p}\right\}$$

$$N = 2EJ_c+\frac{EF_s}{l}\left\{(w^2+p^2)^2\cdot\frac{1}{p}\,\mathrm{arctg}\frac{w}{p}+\frac{w^3}{3}-(2w^2+p^2)\,w\right\}$$

und

$$\delta = \frac{2pA\left\{-\dfrac{w^2}{2}+\dfrac{w^2+p^2}{2}(\log(w^2+p^2)-\log p^2)+w(w^2+p^2)\cdot\dfrac{1}{p}\,\mathrm{arctg}\dfrac{w}{p}\right\}}{2EJ_c+\dfrac{EF_s}{l}\left\{(w^2+p^2)^2\cdot\dfrac{1}{p}\,\mathrm{arctg}\dfrac{w}{p}+\dfrac{w^3}{3}-(2w^2+p^2)\,w\right\}}.$$

12. Allgemeine Bezeichnungsweise von Verschiebungen und ihren Ursachen.

Anfängern ist zu raten, vor dem Studium der folgenden Absätze die unter **11** gegebenen Übungsaufgaben durchzuarbeiten.

a. Die Krafteinheit einer einfachen Punktverschiebung.

1. Eine Konstruktion befinde sich im Gleichgewicht und *im spannungslosen Anfangszustande* (**34**, a). Darauf werde sie durch beliebige Einzelkräfte belastet. Dann bezeichnet man die Verschiebung δ irgend eines Punktes m, falls *ihre Ursache* nicht näher angegeben zu werden braucht, durch Anhängen des Zeigers m, um dadurch anzudeuten, daß die Verschiebung δ_m vom Punkte m aus erfolgt. Ist es aber nötig, auch die Ursache der Verschiebung mit zu bezeichnen, so hängt man dem δ_m noch einen zweiten Buchstaben als Zeiger an, der denjenigen Punkt angibt, in welchem die Ursache zu suchen ist. Das δ erhält also einen sog. *Doppelzeiger* und es bedeutet z. B. allgemein

$$\delta_{kr}$$

die Verschiebung des Punktes k infolge einer Ursache in r.

Die Ursachen einer Verschiebung können verschiedener Art sein. Will man deshalb obige Bezeichnungsweise für alle möglichen Ursachen beibehalten, und außerdem in der Bezeichnung den Einfluß jeder einzelnen der die Konstruktion belastenden Einzelkräfte zum Ausdruck bringen, so empfiehlt es sich für *gewisse Lastgruppen eine Krafteinheit* einzuführen. Wie das geschehen kann ist bereits unter **10** und **11** an verschiedenen Beispielen gezeigt worden. Es folgen weitere Beispiele.

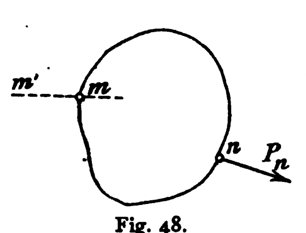


Fig. 48.

Es handle sich um die Verschiebung des Punktes m in irgend einer Richtung mm', verursacht durch die in n angreifende Kraft P_n (Fig. 48). *Allgemein* würde die gesuchte Verschiebung mit

$$\delta_{mn}$$

anzuschreiben sein. Soll jetzt ihre Ursache besonders mitbezeichnet werden, so fasse man δ_{mn} als diejenige Verschiebung des Punktes m auf, die durch *eine in der Richtung von P_n wirkende Kraft »Eins«* verursacht wird. Dann ist der Einfluß von P_n um P_n mal größer anzusetzen, als derjenige der Krafteinheit. Das gibt

$$\delta_m = P_n \delta_{mn}.$$

Darin ist P_n als unbenannte Zahl anzusehen, so daß δ_m der ersten Dimension entspricht.

Nach obiger Bezeichnungsweise bedeutet

$P_r \delta_{rr}$: *die Verschiebung des Punktes r in der Richtung von P_r durch die in r angreifende Kraft P_r.*

Wollte man die unter dem Einflusse der in den Punkten $a, b, \ldots r$ angreifenden Einzelkräfte $P_a, P_b, \ldots P_r$ bewirkte Verschiebung eines Punktes c angeben, so gäbe das

$$\delta_c = P_a \delta_{ca} + P_b \delta_{cb} + P_c \delta_{cc} + \cdots + P_m \delta_{cm} + \cdots + P_r \delta_{cr}, \quad (74)$$

wobei zu beachten ist, daß *alle δ mit dem Doppelzeiger von den Kräften P unabhängig sind.*

b. Die Krafteinheit einer Längenänderung zwischen zwei Punkten. Wenn unter den die Konstruktion belastenden Einzelkräften auch zwei solche sich finden, die *von gleicher Größe sind und in eine und dieselbe Richtung fallen*, so ist es empfehlenswert, diese beiden Kräfte zu einer besondern Kraft*gruppe* zu vereinigen und die von der Gruppe verursachte Verschiebung in der Gl. (74) *nur durch ein einziges Glied* zu bezeichnen. Es möge z. B. in den beiden Knoten n_1 und n_2 eines ebenen oder räumlichen Fachwerks (Fig. 49) je eine Stabkraft S_n (in der Richtung des Stabes $n_1 n_2$) angreifen. Die dadurch verursachte Verschiebung des Knotens m (in der Richtung mm') soll angeschrieben werden. Nach obiger Bezeichnungsweise erhält man dafür

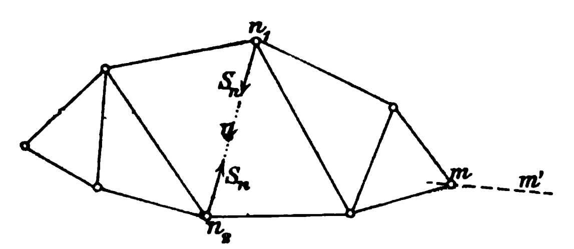


Fig. 49.

$$\delta_m = S_n \delta_{m n_1} + S_n \delta_{m n_2} = S_n (\delta_{m n_1} + \delta_{m n_2}). \quad (75)$$

Der Klammerwert der Gl. (75) bedeutet die Verschiebung des Punktes m infolge je einer, in den Punkten n_1 und n_2 angreifenden Krafteinheit. Die beiden Krafteinheiten wirken *zusammen* genau so *wie eine Achsenkraft »Eins« bei der Verlängerung des Stabes $n_1 n_2$.* Bezeichnet man also die Stablänge mit n und denkt sich den Stab durch eine Achsenkraft »Eins« gedehnt, so läßt sich die Gl. (75) auch in der vereinfachten Form

$$\delta_m = S_n \delta_{mn}$$

anschreiben, in Worten: *Die Verschiebung des Punktes m, verursacht durch die Längenänderung des Stabes n.* Eine derart wirkende Achsenkraft

»Eins« soll fortan die *»Krafteinheit einer Längenänderung«* oder auch *»die Krafteinheit eines Punktepaares«* genannt werden. Die beiden Punkte sind in diesem Falle Endpunkte des Stabes, theoretisch also die Knotenpunkte (I. **14**).

Wollte man umgekehrt die Verschiebung eines Punktes m als *Ursache* der Längenänderung eines Stabes n betrachten und bezeichnen (Fig. 50), so wäre dafür

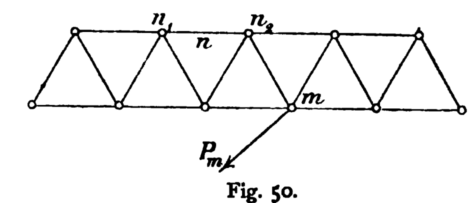


Fig. 50.

$$\delta_n = P_m \delta_{nm}$$

anzuschreiben, in Worten: *Die Längenänderung des Stabes n, verursacht durch eine im Punkte m angreifende Einzelkraft P_m.* Und handelte es sich z. B. um die Berechnung einer derartigen Stablängenänderung, so würde dafür nach der Arbeitsgleichung von MOHR (**10**, a) der Ausdruck

$$\bar{1} \cdot \delta_{nm} = \sum S_n S_m k$$

gelten. Unter dem Summenzeichen bedeuten dann

S_n: eine durch die *gedachte* Krafteinheit des Punktepaares $n_1 n_2$ erzeugte Stabkraft des Fachwerks,

S_m: eine durch die gegebene Einzelkraft P_m verursachte Stabkraft des Fachwerks,

k: die bekannte Unveränderliche — das *Dehnungsvermögen* — jedes Stabes (**11**, a, Aufgabe 22).

c. Die Krafteinheit von Verdrehungen einer Geraden.

1. Die Krafteinheit kommt besonders in Anwendung, wenn mit Hilfe der MOHRschen Arbeitsgleichung die Verdrehung einer Geraden oder die Winkeländerung zwischen zwei sich drehenden Geraden berechnet werden sollen. Die Arbeitsgleichung lautet dann allgemein

$$\overline{M} \Delta \varphi = \int \bar{S} \Delta s \,.$$

Um den Verdrehungswinkel $\Delta \varphi$ berechnen zu können, führt man für $\overline{M}$ die *Moment*einheit ein. Weil aber Moment gleich Kraft mal Arm ist, so ist die *Kraft*einheit, bei gegebener Länge des Armes, gleich der »Einheit« dividiert durch die »Armlänge« anzunehmen. Ist die Armlänge n, so ist die Krafteinheit gleich $\frac{1}{n}$ zu setzen.

Handelt es sich z. B. um die Verdrehung δ_{nm} einer Geraden $n_1 n_2$ von der Länge n, verursacht durch die Verschiebung des Punktes m

infolge einer dort angreifenden Einzelkraft P_m (Fig. 51), so wäre die Arbeitsgleichung mit

$$\overline{1} \cdot \delta_{nm} = \int \overline{S}_n \Delta s_m$$

anzuschreiben. Darin ist die *gedachte* Momenteinheit »Eins« aus den beiden *gedachten* Krafteinheiten $\frac{1}{n}$ gebildet, die als Kräftepaar am Arme n angreifen. Ihr Moment $\overline{M}$ berechnet sich also aus

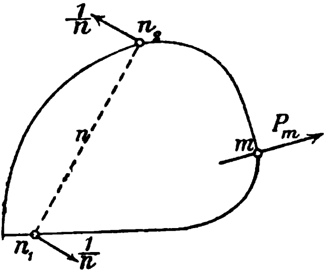


Fig. 51.

$$\overline{M} = \left(\frac{1}{n}\right) n = \text{»Eins«}.$$

δ_{nm} ist die gesuchte Verdrehung der Geraden $n_1 n_2$, ausgedrückt (für die Halbmessereinheit) durch einen *Bogen*weg in n_1 oder n_2. Beide Bogenwege sind *gleich groß* und (ihrer vorausgesetzten Kleinheit wegen) algerade Strecken anzusehen. Der Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$ findet sich aus

$$\Delta\varphi = \frac{\delta_{nm}}{\text{»Eins«}}. \tag{76}$$

Unter dem Integralzeichen bedeuten in diesem Belastungsfalle

$\overline{S}_n$: eine Spannkraft, erzeugt durch die gedachte Momenteinheit der Geraden n,

Δs_m: die elastische Längenänderung einer Faser in der Richtung von S_n zwischen zwei Nachbarquerschnitten, verursacht durch die Einzelkraft P_m.

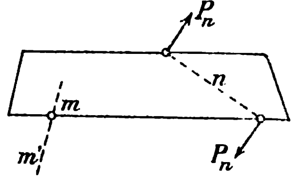


Fig. 52.

Wollte man umgekehrt die Verschiebung δ_{mn} des Punktes m bezeichnen, verursacht durch eine Verdrehung der Geraden n (Fig. 52) infolge eines Kräftepaares P_n, so erhielte man

$$\overline{1} \cdot \delta_{mn} = \int \overline{S}_m \Delta s_n.$$

Hierin bedeuten

$\overline{S}_m$: eine Spannkraft erzeugt durch die gedachte Krafteinheit des Punktes m,

Δs_n: die elastische Längenänderung einer Faser, in der Richtung von S_m zwischen zwei Nachbarquerschnitten, verursacht durch das Kräftepaar P_n.

2. Verursacht eine *Winkeländerung* zwischen zwei Geraden die Verschiebung eines Punktes, oder irgend eine andere Art der Verschiebung, sei es die Längenänderung oder Drehung einer andern Geraden oder dergl. (Fig. 53) oder umgekehrt, verursacht eine der letztgenannten Verschiebungen eine Winkeländerung zwischen zwei Geraden (Fig. 54), so lassen sich alle diese verschiedenartigen Verschiebungsfälle mit Hilfe der bereits erläuterten Einführung einer Krafteinheit oder einer Momenteinheit eindeutig beschreiben.

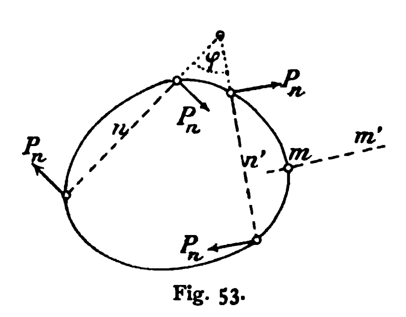


Fig. 53.

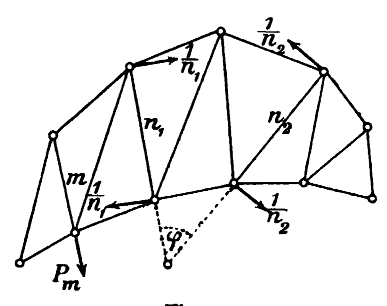


Fig. 54.

Z. B. gibt die in Fig. 53 gesuchte Verschiebung δ_{mn} des Punktes m, verursacht durch die Änderung δ des Winkels φ zwischen den beiden Geraden n, n', die Arbeitsgleichung

$$\bar{1} \cdot \delta_{mn} = \int \bar{S}_m \Delta s_n .$$

Darin bedeuten

$\bar{S}_m$: eine Spannkraft erzeugt durch die gedachte Krafteinheit des Punktes m,

Δs_n: die elastische Längenänderung einer Faser (wie oben) verursacht durch die beiden Kräftepaare P_n.

Im Hinblick auf die vorangegangenen Erläuterungen darf schließlich für den in Fig. 54 dargestellten Fall einer Winkeländerung δ_{nm} zwischen den Richtungen zweier Stäbe eines ebenen Fachwerks

$$1 \cdot \delta_{nm} = 1(\delta_{n_1 m} + \delta_{n_2 m}) = \sum S_{n_1} S_m k + \sum S_{n_2} S_m k$$

angeschrieben werden. Oder

$$1 \cdot \delta_{nm} = \sum (S_{n_1} + S_{n_2}) S_m k .$$

Es ist dann

$$\Delta\varphi = \frac{\delta_{n_1 m}}{\text{»Eins«}} + \frac{\delta_{n_2 m}}{\text{»Eins«}} .$$

Für den Fall, daß $n_1 = n_2 = n$ war, folgt

$$\Delta\varphi = \frac{\delta_{nm}}{\text{»Eins«}} .$$

13. Maxwells Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Verschiebungen.

a. Fassung und Beweis des Satzes durch MAXWELL selbst.[1]

1. MAXWELL will, wie er sagt, ein allgemeines Verfahren angeben, um Fachwerke (ebene und räumliche) in möglichst einfacher Weise zu berechnen »besonders in Fällen, wo das Stabwerk nicht einfach starr, sondern überstarr ist, d. h. wo es *überzählige* (additional) Stücke enthält«. Indem er in aller Kürze die Starrheitsbedingungen der Fachwerke in bekannter Weise (I. § 5) feststellt, führt er die Begriffe »*Elasticity*« und »*Extensibility*« ein, d. h. »*Elastizität*« und »*Dehnungsvermögen*«, von denen weiterhin noch gesprochen wird, um dann mit Hilfe des bekannten Ausdruckes für die elastische Formänderungsarbeit einer Kraft (Gl. 7) den in Rede stehenden Satz abzuleiten. Der Satz, den er als die Grundlage seiner Berechnungen hinstellt, lautet frei übersetzt und unter Einfügung der heute gebräuchlichen technischen Bezeichnungen:

»*Die Längenänderung in einem Stabe BC, verursacht durch die Stabkrafteinheit im Stabe DE ist immer gleich der Längenänderung in DE, verursacht durch die Stabkrafteinheit in BC.*«

Dieser Satz wird heute »MAXWELLS Satz *von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen*« genannt. MAXWELL benutzt den Satz zur Berechnung »*einer Verschiebung irgend eines Knotens, verursacht durch in andern Knoten angreifende Kräfte*«.

Beim Beweise des Satzes setzt er eine isotrope Konstruktion voraus und geht aus von dem Ausdrucke

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} F x,$$

worin $\mathfrak{A}$ die Formänderungsarbeit einer Kraft F bedeutet, deren Weg gleich x ist. Eine Stablängenänderung[2] (extension in a piece), die von der Krafteinheit (tension-unity) verursacht wird, nennt er e. Danach kann obige Arbeitsgleichung, weil $x = eF$ ist, auch

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} e F^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\right) x^2$$

geschrieben werden.

---

[1] Vergl. die S. 64 angegebene Quelle.

[2] Nach dem Elastizitätsgesetz ist die Längenänderung

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} = Sk.$$

Das MAXWELLsche e bedeutet also soviel wie k, und das $\frac{1}{e}$ soviel wie $\frac{1}{k} = \frac{EF}{s}$. MAXWELL bezeichnet e als die »*extensibility*« eines Stabes. Wir haben (unter 11, a) für k die Bezeichnung »*Dehnungsvermögen*« eingeführt.

MAXWELL sagt dann: »Ist der Stab unelastisch, oder $e = 0$, so wird die *ganze* in ein Stabende geleitete Arbeit auf das andere Ende übergeleitet und ein Fachwerk kann so als eine Maschine betrachtet werden, deren Wirkungsgrad vollkommen ist.«

Hierauf leitet er folgenden *Hilfssatz* ab:

»*Wenn p die Stabkraft im Stabe A ist, verursacht durch eine Krafteinheit zwischen den Knoten B und C, so erzeugt eine Längenänderungseinheit (extension-unity) in A eine gegenseitige Verschiebung der Knoten B und C von der Größe p.*«

Der Hilfssatz wird wie folgt bewiesen: Es sei X die Stabkraft und x die Längenänderung von A; Y die Stabkraft und y die Längenänderung *in der Linie BC.* Alle Stäbe außer A denke man völlig unelastisch, so daß allein in A eine Formänderungsarbeit vollzogen wird, wobei B und C sich verschieben. Das gibt die Arbeitsgleichung

$$\tfrac{1}{2}Xx + \tfrac{1}{2}Yy = 0.$$

Weil aber, nach obiger Annahme,

$$X = pY$$

ist, so folgt

$$\frac{y}{x} = -p,$$

d. h. die gegenseitige Verschiebung von B und C für die Längenänderungseinheit von A ist gleich p, was zu beweisen war.

2. Zuerst wendet MAXWELL den Hilfssatz an, um die gegenseitige Verschiebung x der Knoten D und E eines *statisch bestimmten Fachwerks* zu berechnen, verursacht durch die Stabkraft F zwischen den Knoten B und C, wenn dabei alle Fachwerkstäbe mit Ausnahme *eines* Stabes A als unelastisch angesehen werden.

Zu diesem Zwecke bestimmt er alle Stabkräfte, die von einer zwischen B und C wirkenden Krafteinheit erzeugt werden. Die Stabkraft für A sei hierbei mit p gefunden. Ferner bestimmt er alle Stabkräfte für eine zwischen D und E angreifende Krafteinheit. Die hierbei für A gefundene Stabkraft sei q.[1]

Dann ist die Stabkraft in A gleich Fp und die zugehörige Längenänderung gleich eFp, wenn (wie früher) e wieder das Dehnungsvermögen bedeutet. Ferner ist die gesuchte Verschiebung x zwischen D und E, nach dem Hilfssatze, mit

$$x = -Fepq$$

anzuschreiben.

[1] In der Urschrift steht fälschlich y statt q.

Sind alle Stäbe *elastisch*, so findet man für jeden Stab das Produkt $Fepq$ in gleicher Weise wie für den Stab A und erhält in diesem Falle

$$x = -F\sum epq. \tag{77}$$

Wie man sieht, kommen unter dem Summenzeichen die Größen p und q als Produkt vor. Es ist also gleich, ob man $\sum epq$ oder $\sum eqp$ schreibt. Darin liegt der Beweis der Richtigkeit des angegebenen MAXWELLschen Hauptsatzes für statisch bestimmte Fachwerke.

3. MAXWELL liefert den Beweis dann auch noch für statisch unbestimmte Fachwerke, wobei er die Stabkräfte der *überzähligen Stäbe* (I. **35**) mit R, S, T usw. bezeichnet. Eine *in diesen Stäben*, der Reihe nach, angebrachte Krafteinheit erzeuge in A die Stabkräfte r, s, t und die zugehörigen Längenänderungen ϱ, σ, τ. Dann kann nach vorigem (ohne weiteres) angeschrieben werden:

die *Stabkraft* in $A = Fp + Rr + Ss + Tt + \cdots + \cdots$

- *Längenänderung* - $A = e(Fp + Rr + Ss + Tt + \cdots + \cdots)$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{- - in } R = R\varrho = -F\sum epr - R\sum er^2 - S\sum esr - T\sum etr - \cdots\\
&\text{- - - } S = S\sigma = -F\sum eps - R\sum ers - S\sum es^2 - T\sum ets - \cdots\\
&\text{- - - } T = T\tau = -F\sum ept - R\sum ert - S\sum est - T\sum et^2 - \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Weil für ein gegebenes Fachwerk alle mit kleinen Buchstaben geschriebenen Größen gegeben sind, so können die Gleichungen (78) dazu dienen, *um die überzähligen* (*oder statisch nicht bestimmbaren*) *Größen daraus zu berechnen.*

Für die gesuchte Verschiebung x zwischen den Knotenpunkten D und E erhält man schließlich

$$x = -F\sum epq - R\sum erq - S\sum esq - T\sum etq - \cdots. \tag{79}$$

Sobald also die überzähligen Größen R, S, T berechnet worden sind, ist x gefunden. Wir begnügen uns damit, die Endergebnisse für ein *einfach* statisch unbestimmtes Fachwerk anzugeben. Darin kommt nur R vor und man erhält

$$\left.\begin{aligned}
R &= -F\frac{\sum epr}{\sum er^2 + \varrho}\\
\text{und}\qquad x &= -F\left[\sum epq + \frac{\sum epr\sum eqr}{\sum er^2 + \varrho}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

In diesem Ausdrucke für die Verschiebung x zwischen D und E kommen p und q nur in ihren *Produkten* vor, und das wird immer der Fall sein, wenn auch das zugehörige Fachwerk *mehrfach* statisch unbestimmt ist. *Deshalb gilt der eingangs wiedergegebene Satz von Maxwell auch für statisch unbestimmte Fachwerke.*

b. Verallgemeinerung und Herleitung des Satzes auf Grund der Arbeitsgleichungen Mohrs. Aus der von MAXWELL (in der genannten Quelle) gegebenen Anwendung seines Satzes erkennt man, daß es ihm besonders nur darum zu tun war, die Berechnung der Verschiebungen von Fachwerken zu erleichtern. Am Schlusse seiner allgemeinen Darlegungen gibt er nur ein einziges Beispiel, indem er für einen gegliederten einfachen Parallelträger (II. **16**) eine Verschiebung berechnet, die durch eine Einzellast verursacht wird. Mit Hilfe der Arbeitsgleichung

$$\bar{1} \cdot \delta = \sum \bar{S} \cdot \Delta s,$$

die, wie unter **10**, b nachgewiesen worden ist, für Konstruktionen beliebiger Art und für beliebige Spannungsursachen, z. B. auch für Temperatureinflüsse gilt, läßt sich der Satz von MAXWELL nicht allein viel einfacher ableiten, sondern auch allgemeiner fassen, als es MAXWELL getan hat.

Begreift man unter der Bezeichnung »Verschiebung« — wie es unter **12** dargelegt wurde — sowohl Punktverschiebungen, als auch Verlängerungen oder Verdrehungen von Geraden und bedeuten m und n je eine zu einer der Verschiebungen gehörige *Krafteinheit*, so ist nach MOHR für Fachwerke

$$1 \cdot \delta_{mn} = \sum S_m S_n k,$$

wenn S_m und S_n diejenigen Stabkräfte vorstellen, die je durch eine Krafteinheit verursacht werden, und zwar

S_m durch die Krafteinheit in m
S_n - - - - n

und wenn k das gegebene *Dehnungsvermögen* jedes Stabes bedeutet.

Ebenso ist anzuschreiben

$$1 \cdot \delta_{nm} = \sum S_n S_m k,$$

woraus ohne weiteres folgt

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}; \tag{81}$$

in Worten: *Die in der Richtung mm' erfolgende Verschiebung von m, verursacht durch die in der Richtung nn' wirkende Krafteinheit in n, ist ebenso groß wie die in der Richtung nn' erfolgende Verschiebung von n, verursacht durch die in der Richtung mm' wirkende Krafteinheit in m.*

Die *Richtung* der Verschiebung oder der Krafteinheit verläuft bei *Punkten* beliebig. Bei Längenänderungen von Stäben oder Linien fällt sie mit deren Richtung zusammen; bei Verdrehungen von Geraden steht sie senkrecht zu diesen (vgl. die Fig. 51). Nach der obigen allgemeinen Fassung des Satzes von MAXWELL kann z. B. die *Gegenseitigkeit* von folgenden Verschiebungen in Betracht kommen und nach MOHR berechnet werden:

Die Änderung des Winkels zwischen zwei Geraden oder Fachwerkstäben m verurscht durch die Längenänderung einer Geraden oder eines Stabes n, oder durch die Verschiebung eines Punktes n in beliebiger Richtung;

die Verschiebung zwischen zwei Punkten (m, m'), verursacht durch die Winkeländerung zwischen zwei Geraden (n, n') usw.

Unter den bekannten Voraussetzungen, die mit der Herleitung der Arbeitsgleichungen MOHRS verknüpft sind, gilt MAXWELLS Satz — wie nicht mehr besonders bewiesen zu werden braucht — nicht allein für statisch bestimmte Fachwerke, sondern auch für beliebige gegliederte oder vollwandige Konstruktionen.

14. Anwendungen des Satzes von Maxwell.

a. Darstellung der Einflußlinie einer elastischen Verschiebung. Eine der wichtigsten Anwendungen des Satzes von MAXWELL folgt aus der Betrachtung der Gegenseitigkeit zwischen zwei Krafteinheiten, von denen die eine eine lotrecht wirkende, *wandernde Einzellast* $P = 1$ ist (II. **2**). Es war MOHR[1], der aus einer derartigen Betrachtung zuerst die »*Einflußlinie einer Verschiebung*« erhielt. Dabei bewies MOHR, *ohne* MAXWELLS *Arbeit vom Jahre* 1864 *zu kennen*, den Satz von der Gegenseitigkeit für den Sonderfall lotrechter Verschiebungen und verwendete — *als Erster* — die Gleichung

$$\delta_{nm} = \delta_{mn},$$

in Verbindung mit der (von ihm eingeführten) graphischen Darstellung *der elastischen Linie* eines Trägers (**5**, b), zur Berechnung statisch nicht bestimmbarer Größen.

Zur Darstellung der Einflußlinie einer elastischen Verschiebung gelangt man auf folgenden Wege: Man bringe im Punkte m einer Trägerlinie ab eine lotrecht wirkende *Krafteinheit* an und zeichne für diese

[1] MOHR, Beiträge zur Theorie des Fachwerks. Zeitschr. des Arch. u. Ing.-Ver. Hannover 1875, S. 24. Vgl. auch den II. Band (**50**, c, S. 254), wo nachgewiesen ist, daß MOHR und WINKLER (1868) die Ersten waren, die überhaupt Einflußlinien benutzt haben.

gedachte Belastung (nach dem unter **5**, b mitgeteilten Verfahren) die *elastische Linie* oder *Biegelinie* des Trägers, in welcher die lotrechte Verschiebung η jedes Trägerpunktes als Ordinate abgegriffen werden kann. Dann ist für den beliebigen Punkt n (Fig. 55) anzuschreiben

$$\eta_n = \delta_{nm},$$

in Worten: »*Die elastische Verschiebung des Punktes m, verursacht durch eine wandernde Einzellast $P = 1$ in n.*«

Sieht man also n als *den augenblicklichen Lastpunkt einer wandernden Krafteinheit* an, so ist die lotrecht unter n abzugreifende Ordinate η_n der

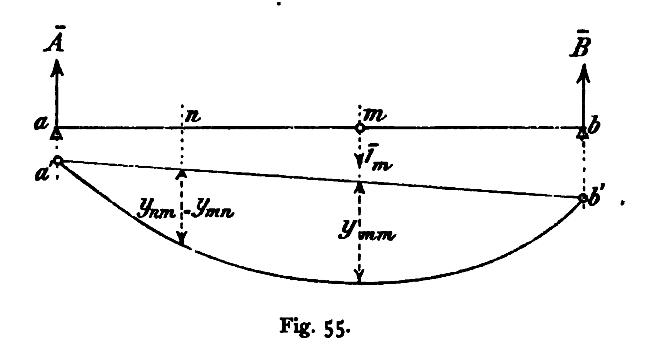


Fig. 55.

elastischen Linie gleich der, durch die wandernde Einzellast $P = 1$ verursachten elastischen Verschiebung *des Punktes m*.

Daraus folgt der Satz:

Die für eine im Punkte m angreifende Krafteinheit gezeichnete elastische Linie (oder Biegelinie) ist die Einflußlinie der Verschiebung des Punktes m für $P = 1$.

Dieser Satz gilt (nach vorigem) nicht allein für eine Krafteinheit eines Punktes, sondern auch für die Krafteinheit einer Längenänderung oder Geradenverdrehung u. dgl. (**12**, c), so daß der Satz das Mittel an die Hand gibt, um auch die Einflußlinie einer *Längenänderung*, oder einer *Geradenverdrehung*, oder einer *Winkeländerung* u. dgl. darzustellen. Wie die nachfolgenden Beispiele näher erläutern, ist mit der Einflußlinie einer Verschiebung auch die Einflußlinie *der im Verschiebungspunkte (Punktepaare usw.) angreifenden statisch nicht bestimmbaren Größe gegeben.*

b. Anwendungsbeispiele für statisch bestimmte Träger.

Aufgabe 29. *Es soll die größte lotrechte Verschiebung des Knotens m des in* Fig. 56 *dargestellten einfachen Fachwerkträgers für einen gegebenen Lastenzug berechnet werden, wenn der Untergurt Lastgurt* (II. **1**, c) *ist.*

Man berechne oder zeichne (nach § 4) diejenige *Biegelinie des Lastgurtes*, welche durch die in m angebrachte Kraft »Eins« erzeugt wird. »Eins« ruft in a und b Stützenkräfte hervor, die durch

$$A_m = \frac{1 \cdot (l - x)}{l}$$

und

$$B_m = \frac{1 \cdot x}{l}$$

bestimmt sind. Wollte man die Biegelinie des Untergurtes *berechnen*, so würde man dies mit Hilfe der Arbeitsgleichung MOHRS ausführen können, indem man diese *auf jeden Untergurtknoten* anwendete. So erhielte man alle durch »1_m« verursachte Knotenverschiebungen des Untergurtes und damit die Biegelinie, wie sie in Fig. 56 gezeichnet ist. Die bequemere graphische Darstellung der Biegelinie vgl. unter **15**.

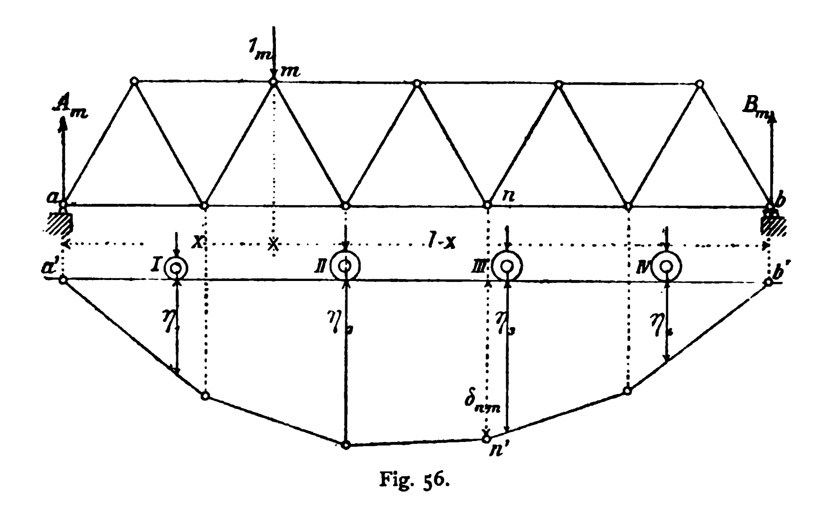


Fig. 56.

Die gefundene Biegelinie $a'n'b'$ ist die Einflußlinie der Verschiebung des Punktes m. Der gegebene Lastenzug ist also über der Trägerlinie der Einflußfläche derart aufzustellen, daß die gesuchte *Summeneinflußgröße* δ_m ihren Größtwert erreicht. Die dabei zu beachtenden Regeln sind unter II. **2** zu vergleichen. Ist die *gefährlichste Lastlage* gefunden, so erhält man (mit Bezug auf die Fig. 56)

$$\delta_m = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3 + P_4 \eta_4 = \sum P \eta .$$

Denn für irgend eine Ordinate η_n gilt (nach MAXWELL und MOHR)

$$\eta_n = \delta_{nm} = \delta_{mn} .$$

Aufgabe 30. *Für den in* Fig. 57 *dargestellten vollwandigen Auslegeträger veränderlichen Querschnittes ist die im Gelenkpunkte g unter dem Einflusse eines Lastenzuges entstehende größte Verschiebung* δ_g *zu ermitteln.*

Es ist zuerst die durch eine in g angebrachte Krafteinheit erzeugte elastische Linie des Trägers (nach dem Verfahren von MOHR unter **5**, b)

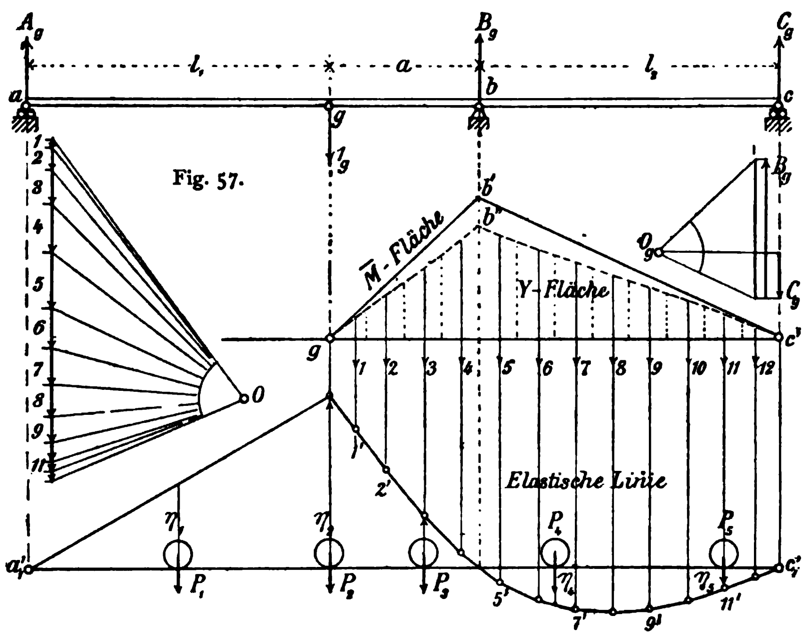


Fig. 58.

zu zeichnen. Zu dem Zwecke ist die zugehörige *Momentenfläche* $\overline{M}$ darzustellen (nach I. **62**, a). Die durch »1_g« hervorgebrachten Stützenkräfte sind (mit Bezug auf die Fig. 57)

$$A_g = 0,$$

$$B_g = + \frac{1(a + l_2)}{l_2},$$

$$C_g = - \frac{a}{l_2}.$$

Danach ist die Momentenfläche $\overline{M}$ mit Hilfe eines aus den Kräften B_g, C_g und »Eins« gebildeten *ersten* Kraftecks gezeichnet. $\overline{M}$ sei irgend eine ihrer Ordinaten. In der Endträgerstrecke ag ist $\overline{M} = 0$. Um das

zweite Krafteck und mit dessen Hilfe die elastische Linie zu erhalten, ist aus der Momentenfläche die Belastungsfläche zu bilden, für deren Ordinaten y der Ausdruck

$$y = \frac{\overline{M}}{EJ}$$

gilt.

Der bequemeren Rechnung wegen, und um die Biegefläche in *passendem Maßstabe* zu erhalten, empfiehlt es sich, die Ordinaten η der elastischen Linie um nEJ_k größer darzustellen, als sie wirklich sind, also

$$y = \frac{\overline{M} \cdot nEJ_k}{EJ} = \overline{M}\left(\frac{nJ_k}{J}\right)$$

zu machen. J_k bedeutet ein beliebiges unveränderliches Trägheitsmoment und n eine ganze Zahl, die so zu wählen ist, daß der Maßstab passend wird (vgl. unter **5** und **7**). Die gesuchte größte Verschiebung (Fig. 58) ist dann

$$\delta_g = \frac{\sum P\eta}{nEJ_k}.$$

c. Anwendungsbeispiele für statisch unbestimmte Träger.

Aufgabe 31. *Ein gerader Vollwandträger (oder ein Fachwerkträger mit geradem Untergurt) ruht auf drei Stützen* a, b, c (Fig. 59), *von denen die mittlere ein festes Gelenk, die beiden andern Rollenstützen sind. Es soll die Einflußlinie der mittlern Stützenkraft* X *dargestellt werden.*

Das System ist außen einfach unbestimmt (I. **35**). Die statisch nicht bestimmbare Stützenkraft X werde vorläufig als bekannt angesehen. Denkt man jetzt die Stütze b beseitigt und, um den bisherigen Belastungszustand zu wahren, X als äußere Kraft angebracht, so muß die Verschiebung δ_b unter dem gleichzeitigen Einflusse von X und P *gleich Null* werden, falls der Stützpunkt b — wie wir annehmen — unveränderlich fest liegt. Aus der Bedingung

$$\delta_b = 0$$

findet man X wie folgt.

Man denke in b in der Richtung von P eine Krafteinheit 1_b wirken und zeichne dafür die elastische Linie des Trägers ac. Dies geschieht (wie im vorigen Beispiele) mit Hilfe einer Belastungsfläche, deren Ordinaten

$$y = \frac{\overline{M}}{EJ}$$

sind. Ist J veränderlich, so mache man (wie vor) die Ordinaten der elastischen Linie um nEJ_k größer, als sie wirklich sind. Dann ist

$$y = \overline{M}\left(\frac{nJ_k}{J}\right).$$

Die auf solche Weise erhaltene elastische Linie $a'b'c'$ (Fig. 60—61) ist (nach **14**, a) *die Einflußlinie der Verschiebung* δ_b eines einfachen Balkenträgers ac. Es ist also auch

$$\delta_b = \frac{1}{nEJ_k}(P\eta_m - X\eta_b).$$

Weil aber δ_b gleich Null sein soll, so folgt

$$X = P\frac{\eta_m}{\eta_b}. \tag{82}$$

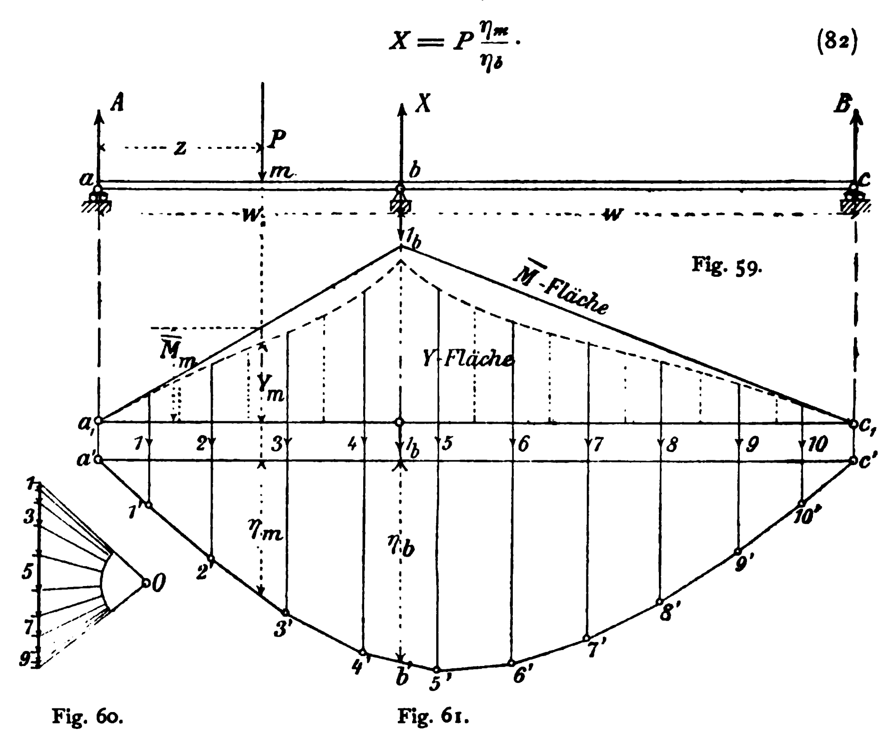


Fig. 60. Fig. 61.

Danach ist X für $P = 1$ allein von dem Verhältnisse zwischen η_m und η_b abhängig, wobei η_b (für den gegebenen Fall) eine Unveränderliche ist. Man kann danach $\frac{1}{\eta_b}$ als *Multiplikator* (II. **5**, c) der Einflußlinie für X betrachten. Auch ist es für die Berechnung von X *gleichgültig, wie groß man* $\overline{M}_b$ *oder auch die Polweite* (bei O) *des zweiten Kraftecks annimmt*, mit dessen Hilfe die elastische Linie gezeichnet wird.

Aufgabe 32. *Für einen einfachen Fachwerk-Parallelträger* (Fig. 62), *der in seinem Mittelfelde einen überzähligen Stab nn enthält, und dessen Fahrbahn im Obergurt liegt, ist die Einflußlinie der statisch nicht bestimmbaren Stabkraft* X_n *anzugeben.*

Das Fachwerk ist *innen* einfach statisch unbestimmt (I. **35**). X_n werde als vorläufig unbekannte Stabkraft im *Punktepaare n* angebracht (**12**, b). Läßt man dann in n die Krafteinheit 1_n angreifen und berechnet alle durch diese allein erzeugten Stabkräfte S_n des Fachwerks, so kann

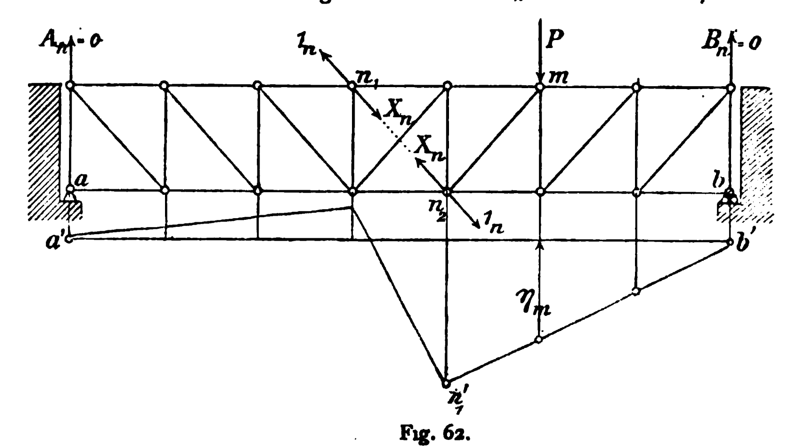


Fig. 62.

man mit Hilfe der berechneten Δs usw. (nach **15**) *eine Biegelinie des Lastgurtes* zeichnen. Das sei das Seileck $a' n'_1 b'$. Die Biegelinie ist zugleich *die Einflußlinie der Verschiebung des Punktepaares* (*oder der Längenänderung Δs_n des Stabes nn*). Danach ist anzuschreiben

$$\delta_{mn} = \delta_{nm} = \eta_m$$

und, nach der Arbeitsgleichung,

$$\delta_{nn} = \sum' S_n^2 k.$$

Die Gesamtverschiebung δ_n des Punktepaares n, in der Richtung nn, verursacht durch den Einfluß von X_n und P ist danach

$$\delta_n = P\eta_m - X_n \sum' S_n^2 k.$$

δ_n ist aber auch gleich der elastischen Längenänderung des Stabes nn, verursacht durch die Achsenkraft X_n; also ist

$$\delta_n = X_n \frac{s_n}{EF_n} = X_n k_n,$$

wobei k_n das *Dehnungsvermögen* des Stabes nn bezeichnet. Daraus folgt für $P = 1$

$$X_n = \frac{\eta_m}{\delta_{nn} + k_n}$$

oder

$$X_n = \left(\frac{1}{\delta_{nn} + k_n}\right) \eta_m,$$

worin der unveränderliche Klammerwert als *Multiplikator* der für X_n zu zeichnenden Einflußlinie gelten kann.

§ 4. Biegelinien und Verschiebungspläne statisch bestimmter Fachwerke.

15. Grundlagen der Darstellung von Biegelinien.

a. Einleitung. Nach unseren Voraussetzungen (I. **14—16**) drehen sich bei der Formänderung eines Fachwerkes dessen Stäbe *reibungslos* um ihre Knotenpunkte. Dabei ändern sie ihre Länge und bleiben *gerade*. Infolgedessen erleidet jeder Stab nur eine *Achsenkraft* und sobald diese für alle Stäbe berechnet ist, ist auch die Formänderung des Fachwerks eindeutig bestimmt.

Ist S die Stabkraft, so ist (nach II. **17**, Gl. 16)

$$S = \frac{M}{r}.$$

Darin bedeutet für den betrachteten Trägerteil M das statische Moment der äußern Kräfte, bezogen auf den zugeordneten Momentenpunkt. Die aus *irgend einer Ursache* (Belastung oder Temperatur) entstehende Stablängenänderung Δs berechnet sich nach dem Elastizitätsgesetze (I. **4**) mit

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} = Sk,$$

worin k das *Dehnungsvermögen* vorstellt (Aufgabe 22), das für jeden Stab von der *Länge* s und dem *Querschnitte* F, bei bekanntem *Dehnungsmaße* E, gegeben ist.

Sobald alle Δs berechnet sind, kann man die Verschiebung jedes Gurtknotens festlegen und somit das in seiner Form geänderte Fachwerk aufzeichnen. Für praktische Fälle wäre ein solches Verfahren aber sehr zeitraubend und es würde auch die Anwendung außerordentlich großer Maßstäbe erfordern, um die Knotenverschiebung, im richtigen Verhältnis zu den Stablängen, genau genug meßbar darzustellen. Denn die Δs und die daraus ermittelten Verschiebungen sind bekanntlich sehr kleine elastische Größen, die bequem und genau genug nur unter Anwendung besonderer Hilfsmittel, von denen jetzt die Rede sein wird, dargestellt werden können.

Man kann bei der Darstellung *zwei verschiedene Wege* einschlagen, indem man dem gesamten Formänderungsbilde entweder nur diejenigen gebrochenen Linien entnimmt, als welche sich *die Gurte* des Fachwerkträgers darstellen und die wir *Biegelinien* nennen, oder indem man sog. *Verschiebungspläne* zeichnet, in denen die wirklichen Knotenverschiebungen von einem Pole aus als Strahlen aufgetragen werden. Beim erstgenannten

Verfahren wird die Biegelinie, wie die elastische Linie, unmittelbar gezeichnet, mit Hilfe eines aus den elastischen Kräften der *Winkeländerungen* (**5**, c) gebildeten Kraftecks. Das Verfahren rührt von Mohr[1] her (1875).

In den Biegelinien werden gewöhnlich nur die in *lotrechter* Richtung erfolgenden Knotenwege — *Senkungen* genannt — dargestellt, obwohl es auf der Hand liegt, wie sich jeder Knoten im allgemeinen in *beliebiger* Richtung verschieben kann. Will man demnach mit Hilfe von Biegelinien nach erfolgter Formänderung die *wirkliche Lage* der Knoten bestimmen, so muß man *zwei* Biegelinien, jede für eine andere feste Verschiebungsrichtung, zeichnen und die daraus erhaltenen Seitenwege eines Knotens zur wirklichen Verschiebung zusammensetzen.

In den Verschiebungsplänen erhält man dagegen jeden wirklichen Knotenweg unmittelbar. Ihre Darstellung ist für zwangläufige starre Stabketten schon im I. Bande (**78**—**81**) beschrieben. Um aber die *elastischen* Verschiebungen der Fachwerksknoten zu erhalten wird das Verfahren hier entsprechend zu ergänzen sein. Namentlich wird gezeigt werden müssen, wie dabei — nach einem (1877) von Mohr angegebenen Verfahren — die Stützenbedingungen (I. **81**) zu berücksichtigen sind. Verschiebungspläne bieten die Annehmlichkeit, daß aus ihnen beliebige Biegelinien abgeleitet werden können. Sie sind aber immer *weniger genau* als Biegelinien. Daß man beide Arten der Darstellung auch für alle *infolge von Temperatureinflüssen erzeugte Formänderungen* verwenden kann, liegt auf der Hand.

Wie weiterhin näher zu begründen sein wird, ist der *Einfluß der Gurte* des Fachwerks bei dessen Formänderung in der Regel überwiegend im Vergleiche zum Einflusse der Wandstäbe. In einigen praktischen Fällen ist es deshalb zulässig, die *Biegelinien unter Vernachlässigung der Längenänderungen der Wandstäbe zu zeichnen.* Auch braucht in den meisten Aufgaben die Biegelinie nur für den *Lastgurt* (II. **1**, c) dargestellt zu werden, wie dies schon aus den gegebenen Beispielen von Einflußlinien einer elastischen Verschiebung (**14**, a, b) hervorgeht.

Schließlich wäre noch die Frage zu beantworten, wozu man denn Biegelinien und Verschiebungspläne eigentlich braucht. Man verfolgt dabei zweierlei wesentlich voneinander verschiedene Zwecke. Entweder will man die Formänderungen eines Fachwerkträgers nur zu dem Zwecke festlegen, um zu sehen, ob sie sich innerhalb gewisser zulässiger Grenzen halten, oder man benutzt ihre Darstellungen zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme, wie dies (unter **13**) bereits angedeutet worden ist.

[1]) Mohr, Beitrag zur Theorie des Fachwerks. Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. Hannover, 1875, S. 22—31.

b. Einfluß der Längenänderungen der Gurtstäbe.

1. Ein Fachwerkträger sei beliebig belastet und zwar vorläufig *unmittelbar*. Ferner seien allein die Gurtstäbe elastisch, während die Wandstäbe starr bleiben. Sodann betrachte man zuerst nur den Einfluß der elastischen Dehnung *eines* der Gurtstäbe eines einfachen Trägers (Fig. 63) auf den Stützen a und b; wobei also alle übrigen Fachwerksstäbe starr

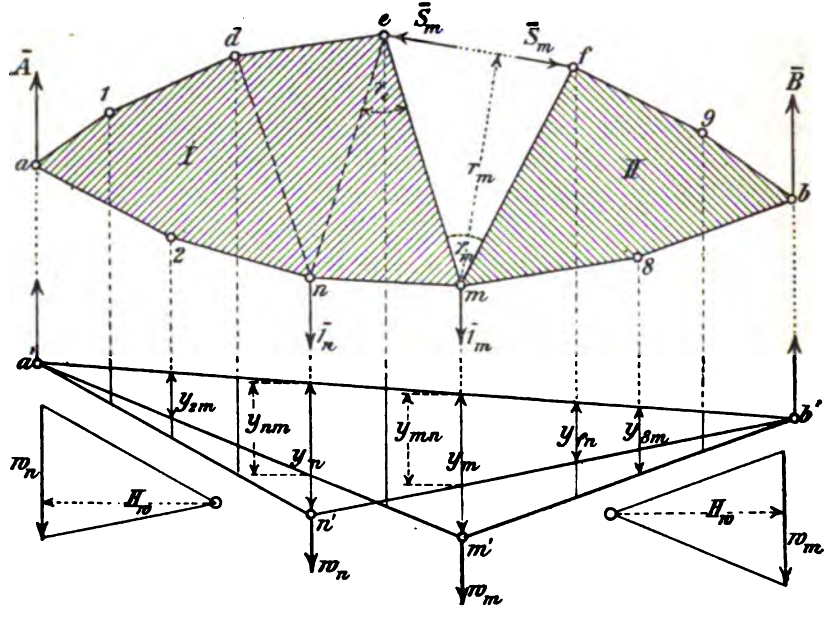


Fig. 63.

zu denken sind, was in der Figur durch Schraffierung der beiden Scheiben I und II angedeutet ist. Gesucht werde die lotrechte Senkung y_m irgend eines Untergurtknotens m, verursacht durch die Verkürzung des ihm gegenüberliegenden Obergurtstabes $\overline{ef}$.

Man erhält dafür (nach **10**) die Arbeitsgleichung

$$\bar{1}_m \cdot y_m = \bar{S}_m \Delta s_m ,$$

wenn $\bar{S}_m$ die von der gedachten Krafteinheit $\bar{1}_m$ erzeugte Gurtstabkraft vorstellt und Δs_m die von der *wirklichen* Trägerlast herrührende elastische Längenänderung des Gurtstabes ef ist. Bezeichnet ferner r_m den Hebelarm der Gurtstabkraft in Bezug auf den Knoten m, so ist

$$\overline{M}_m = \bar{S}_m r_m ,$$

worin $\overline{M}_m$ das von der Krafteinheit erzeugte, auf deren Angriffspunkt m bezogene, statische Moment der Stützenkraft $\overline{A}$ oder $\overline{B}$ bedeutet. Es fragt sich jetzt, *wie groß muß eine im Knoten m anzubringende lotrechte Kraft w_m sein, damit das von ihr und der Stützenkraft $\overline{A}$ (oder $\overline{B}$) erzeugte Moment M_{wm} gleich $S_m \varDelta s_m$*, also gleich $1 \cdot y_m$ wird. Die Größe einer solchen Kraft berechnet sich mit

$$w_m = \frac{\overline{1} \cdot \overline{S}_m \varDelta s_m}{\overline{S}_m r_m} = \frac{\varDelta s_m}{r_m}. \tag{83}$$

Zeichnet man danach mit Hilfe eines Kraftecks (Fig. 63), in welchem die Kraftlinie gleich w_m und die Polweite H_w = »Eins« gemacht wird, ein Seileck $a' m' b'$, so stellt dessen Ordinate y_m die gesuchte Senkung des Knotens m dar. Denn das von der Kraft w_m erzeugte Moment ist mit

$$M_{wm} = 1 \cdot y_m = \overline{S}_m \varDelta s_m$$

anzuschreiben.

Das für eine Last w_m in m gezeichnete Seileck $a' m' b'$ ist (nach **14**, a) die *Einflußlinie der Senkung des Knotens m* für eine zwischen a' und b' wandernde Einzellast w_m. Aus der Momentenfläche $a' m' b'$ kann man daher auch die Senkung y_{nm} entnehmen, welche in einem beliebigen Unter- oder Obergurtknoten n entsteht, wenn Knoten m sich um y_m senkt.

2. Man lasse jetzt noch irgend *einen zweiten* Gurtstab, z. B. den dem Knoten n gegenüberliegenden Obergurtstab de, seine Länge elastisch ändern. Dann berechnet sich die *allein dadurch* verursachte Knotensenkung in n mit

$$1 \cdot y_n = \overline{S}_n \varDelta s_n$$

und die in n anzubringende Kraft w_n mit

$$w_n = \frac{\varDelta s_n}{r_n}.$$

Das Seileck $a' n' b'$ ist in diesem Falle Einflußlinie der Senkung des Knotens n für eine wandernde Kraft w_n, und schneidet deshalb auf der Ordinate y_m eine Strecke y_{mn} ab, die gleich der Senkung des Knotens m, verursacht durch die Kraft w_n in n ist. Ebenso ist auf der Ordinate y_n eine Strecke y_{nm} abgeschnitten worden, die gleich der durch w_m verursachten Senkung des Knotens n ist. Denkt man sich in beschriebener Weise nacheinander *alle* Gurtstäbe elastisch werden, so erhält man ebensoviele Seilecke und auf irgend einer Ordinate z. B. auf y_m findet man dann *alle Strecken abgeschnitten, deren Summe die*

Gesamtsenkung δ_m des Knotens m unter der gegebenen wirklichen Trägerbelastung darstellt. Die Summierung dieser Teilstrecken erfolgt gemeinsam für alle Gurtknoten am einfachsten wie folgt:

Man bringe in jedem Gurtknoten (1 *bis i*) *die zugehörige elastische Kraft* (w_1 *bis* w_i) *an und zeichne zwischen den Kraftrichtungen ein Seileck, dessen Seiten den Strahlen eines Kraftecks parallel laufen, in welchem die Kraftlinie die Summe der aufeinanderfolgenden Kräfte* w_1 *bis* w_i *darstellt und die Polweite gleich »Eins« ist.*

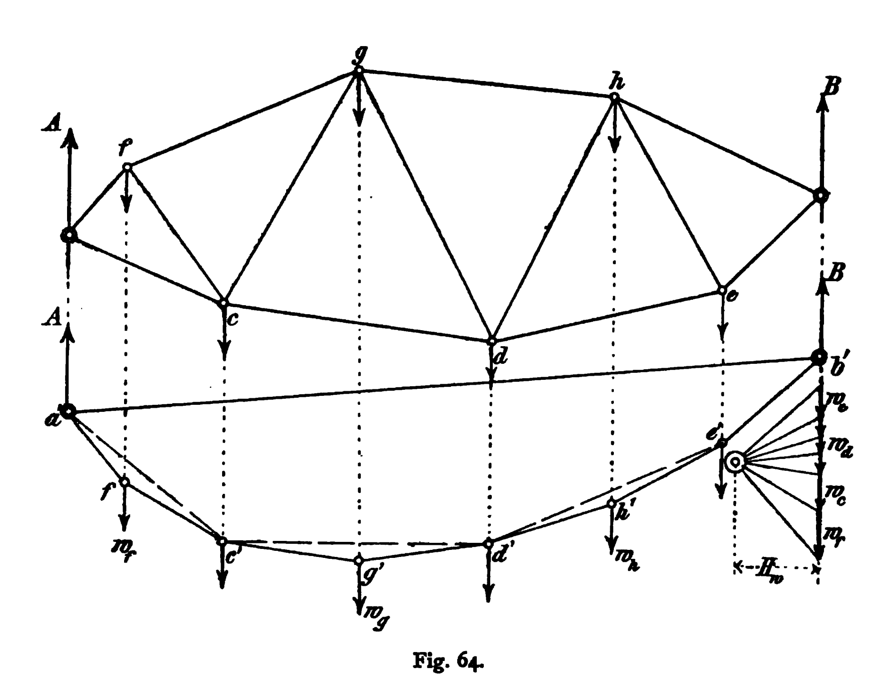


Fig. 64.

Dies Seileck und seine Schlußlinie $a' b'$ (Fig. 64) begrenzen eine Momentenfläche, die gleichzeitig *Biegefläche* ist, insofern als irgend eine ihrer Ordinaten δ_g die bei *unmittelbarer* Belastung des Fachwerks entstehende Senkung des zugehörigen Gurtknotens g angibt. Das *untere* Seileck ist danach die gesuchte *Biegelinie. Soll diese für den Lastgurt gezeichnet werden, so ändern sich die Senkungen in den Querträger-Lotrechten nicht und zwischen zwei Querträgerknoten ist die Biegelinie eine Gerade.* Das folgt unmittelbar aus den bekannten Eigenschaften der Momentenfläche (I. **67**). In Fig. 64 ist die punktierte Linie $a' c' d' e' b'$ die Biegelinie des Untergurtes.

Wählt man die Polweite nicht gleich »Eins« sondern gleich H_w, so gibt die Biegefläche jede gesuchte Knotensenkung in $t : H_w$-facher Vergrößerung, wenn die Längen des Fachwerks in t-facher Verkleinerung aufgetragen worden sind (vgl. die Aufgaben unter **17**).

3. *Die elastischen Kräfte w sind unbenannte Zahlen*, die aus der gegebenen Trägerbelastung zu berechnen sind. Man kann eine solche Kraft auch als die Änderung desjenigen Dreieckswinkels γ_e im Knoten e (Fig. 63) betrachten, dessen Spitze dem betrachteten Gurtstabe gegenüberliegt. Die Winkeländerung ist *negativ* für einen Untergurt- und *positiv* für einen Obergurtknoten und sie verursacht, wie unmittelbar aus der Bewegung der Scheiben I und II hervorgeht, für einen einfachen Träger immer eine *Senkung*, d. h. eine nach unten gerichtete Verschiebung. Aus bekannten Beziehungen findet man w für einen *Obergurt*knoten aus

$$+\Delta s = \frac{Ss}{EF} = S \cdot k$$

und

$$S = + \frac{M}{r}$$

mit

$$w = + \frac{\Delta s}{r} = + \frac{Mk}{r^2}. \tag{84}$$

Dasselbe erhält man für das w eines *Untergurt*knotens aus

$$-\Delta s = Sk$$

und

$$S = - \frac{M}{r}.$$

Für *irgend einen Gurtknoten m* eines einfachen Trägers ergibt sich demnach

$$w_m = \Delta \gamma_m = \frac{\Delta s_m}{r_m} = + \frac{M_m k_m}{r_m^2}. \tag{85}$$

c. Einfluß der Längenänderungen der Wandstäbe.

1. Wir betrachten zuerst den alleinigen Einfluß der elastischen Dehnung *eines* der Wandstäbe, dessen zugeordneter Momentenpunkt *außerhalb der Stützen* liegt (Fig. 65). Es sei der Stab $\overline{mn}$. Seine Stabkraft $\overline{S}$ ändert bekanntlich ihr Vorzeichen, wenn das Schnittfeld von einer Einzellast überschritten wird. Deshalb ist es notwendig, hier die Lage der Fahrbahn gleich mit zu betrachten. Der Untergurt sei z. B. Lastgurt. *Gesucht werden die Senkungen aller Untergurtknoten für eine beliebige gegebene Trägerbelastung.*

Sobald man die Senkung eines der Untergurtknoten bestimmt hat, läßt sich die Einflußlinie dieser Senkung zeichnen und damit hat man alle übrigen gesuchten Senkungen gefunden. Das wird zunächst näher

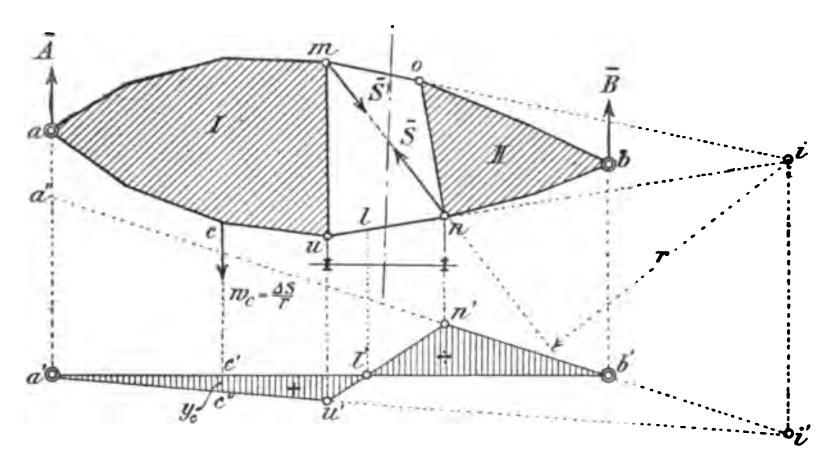


Fig. 65.

darzulegen sein. Die Senkung y_c eines beliebigen Knotens c (Fig. 65) berechnet man nach vorigem mit

$$\overline{1}_c \cdot y_c = \overline{S} \cdot \Delta s ,$$

indem man (wie bekannt) daraus eine elastische Kraft w_c findet, deren Größe durch die Bedingung

$$w_c = \frac{\Delta s}{r}$$

bestimmt ist, wenn r der Hebelarm der Kraft $\overline{S}$ für den dem Schnittfelde zugeordneten Momentenpunkt i bedeutet und wenn die elastische Kraft w_c mit den von ihr erzeugten Stützenkräften $\overline{A}$ und $\overline{B}$ für den linken oder rechten Trägerteil ein auf i zu beziehendes Moment

$$M_{wi} = \overline{S} \cdot \Delta s$$

erzeugt.

Danach kann die Einflußfläche des Momentes M_{wi} für eine wandernde elastische Kraft $w = \dfrac{\Delta s}{r}$ gezeichnet werden (II. **5**, c. Fig. 12). Das ist in der Fig. 65 geschehen. Das berechnete

$$M_{wi} = 1 \cdot y_c$$

ist von der $a'b'$ aus als Ordinate $c'c''$ in c' in beliebigem Maßstabe aufgetragen worden. Zieht man jetzt die Gerade $a'c''$ und verlängert

sie bis zum Punkte i' der Momentenpunkt-Lotrechten, so sind damit die beiden Grenzlinien der Einflußfläche festgelegt. $a'u'i'$ stellt den Einfluß von $\overline{B}$ und $a''b'i'$ den Einfluß von $\overline{A}$ dar. Innerhalb des Schnittfeldes ist die Einflußlinie eine Gerade.

Für jede andere Lage der elastischen Kraft muß sich natürlich die nämliche Einflußfläche ergeben. Am einfachsten erscheint es deshalb, wenn man diese Kraft *in die Lastscheide l' des Schnittfeldes* legt (II. **18**, c). Man hat dann, um die Einflußfläche festzulegen, durch die Lastscheide nur eine beliebige Gerade zu zeichnen. Trifft diese die Querträger-Lotrechten in u' und n', so müssen die von b und a durch n' und u' gelegten Grenzlinien sich in i' schneiden. Die von einer in der Lastscheide l' liegenden Kraft $w = \frac{\Delta s}{r}$ erzeugte Senkung des zugehörigen Punktes c muß gleich Null werden, d. h. das Moment M_{wi} der Kraft (bezogen auf i) muß Null sein.

2. Mit Hilfe einer (wie beschrieben) gezeichneten Einflußfläche der Senkung eines Lastgurtknotens kann man graphisch oder rechnerisch die Kraft $w = \frac{\Delta s}{r}$ durch *zwei ihr gleichwertige Kräfte ersetzen*, von denen die eine im Knoten u, die andere im Knoten n des Schnittfeldes angreift. Die *graphische* Ermittelung dieser beiden Ersatzkräfte ist ohne weiteres aus der Fig. 66 zu entnehmen, wenn man erwägt, daß man nur nötig hat zur Momentenfläche $a'u'n'b'$ das zugehörige Krafteck zu zeichnen (vgl. auch die Fig. 68).

Die *rechnerische* Bestimmung von w_u und w_n (Fig. 66) läßt sich am einfachsten wie folgt ausführen:

Wie bewiesen, muß es gleich sein, *für welche Lage* von w man die Ersatzkräfte berechnet, in jedem Falle muß man die nämlichen Werte erhalten. Liegt w in der Lastscheide, so ist das Moment M_{wi} gleich Null. Also muß auch das von den Ersatzkräften verursachte M_{wi} gleich Null sein (II. **18**, c). Das ist nur möglich, *wenn ihre Mittelkraft durch den Momentenpunkt i verläuft* (vgl. auch den Beweis hierfür unter 5, Fig. 68). Weil ferner die Mittelkraft von $w_u + w_n$ gleich w sein muß, so folgt mit Bezug auf die Fig. 66, wenn man darin durch n eine Parallele zur Stabrichtung $\overline{um}$ zieht:

$$w_u \cdot \overline{un} = \frac{\Delta s}{r} \cdot \overline{ni}$$

oder

$$w_u = \frac{\Delta s}{r} \cdot \frac{\overline{ni}}{\overline{un}} = \frac{\Delta s}{r_1}.$$

Darin ist r_1 die Länge einer von u auf die Richtung des betrachteten Wandstabes gefällten Senkrechten.

Ebenso folgt

$$w_n \cdot \overline{un} = \frac{\varDelta s}{r} \cdot \overline{ui}$$

oder

$$w_n = \frac{\varDelta s}{r} \cdot \frac{\overline{ui}}{\overline{un}} = \frac{\varDelta s}{r} \cdot \frac{\overline{mi}}{\overline{mo}} = \frac{\varDelta s}{r_2},$$

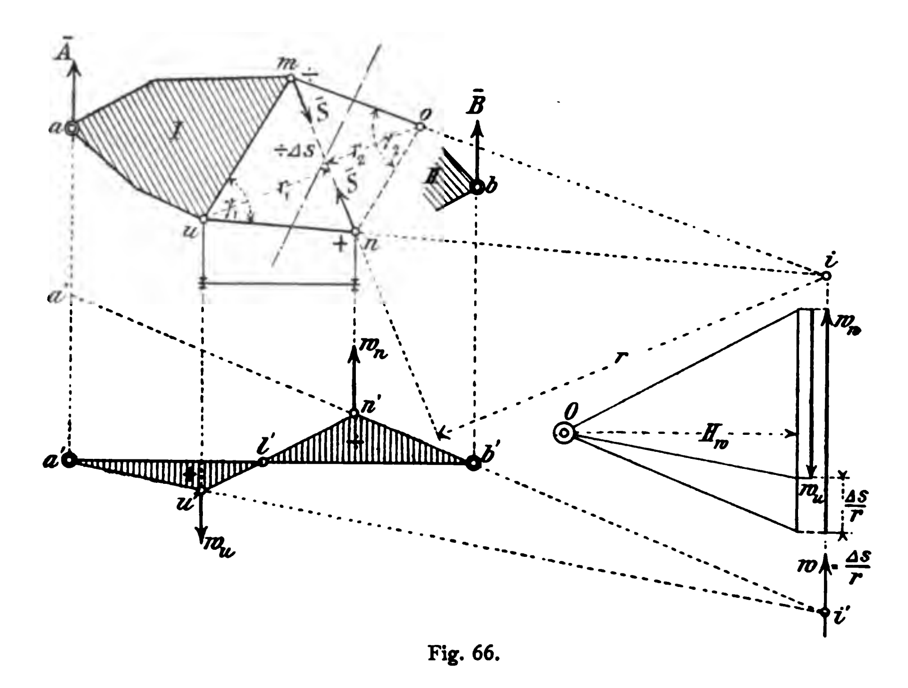


Fig. 66.

r_2 ist die Länge der vom Punkte o auf die Richtung des geschnittenen Wandstabes gefällte Senkrechte. Somit sind w_u und w_n durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} w_u &= \frac{\varDelta s}{r_1} \\ w_n &= \frac{\varDelta s}{r_2} \end{aligned}\right\} \qquad (86)$$

bestimmt, *wodurch man bei der Darstellung der Senkungen unabhängig vom Gebrauch des Hebelarms r wird, der in vielen Fällen umständlich zu ermitteln ist.*

3. *Die Vorzeichen* der elastischen Ersatzkräfte w_u und w_n sind immer *verschieden*, wie das aus ihrer Berechnung, sowie auch unmittelbar aus den Momenten-Einflußflächen (Fig. 65) hervorgeht. In besondern Fällen genügt es daher festzustellen, welche der beiden Ersatzkräfte *positiv* ausfällt, d. h. eine *Senkung* des zugehörigen Lastgurtknotens herbeiführt. Die andere Ersatzkraft ist dann negativ (nach oben gerichtet) anzubringen, was einer *Hebung* des zugehörigen Knotens entspricht. Bei dieser Feststellung entscheidet selbstverständlich allein das Vorzeichen der von der *wirklichen* Belastung verursachten Längenänderung Δs, das Vorzeichen der aus der gedachten Arbeit herrührenden Stabkraft $\overline{S}$ kommt dabei nicht in Betracht.

Mohr gibt aus obigen Gründen das folgende einfache *Kennzeichen* für das Vorzeichen der Ersatzkräfte:

Man beschreibe alle Obergurtknoten mit dem Zeichen —, alle Untergurtknoten mit + und den betrachteten Schnittstab mit dem Vorzeichen seiner Längenänderung. Dann ist auf derjenigen Seite des Schnittes, wo die Vorzeichen übereinstimmen, die Ersatzkraft positiv.

Übrigens erkennt man das Vorzeichen der Ersatzkräfte auch unmittelbar aus der Bewegung der zwangläufigen Kette des Vierecks *umon* (Fig. 66) unter der Einwirkung von Δs. Man braucht sich dabei nur die zwei Punkte des Vierecks, die dem Lastgurt gegenüberliegen, festgehalten zu denken, um sofort erkennen zu können, welcher der beiden Lastgurtknoten sich in positiver Richtung (d. h. nach unten) bewegt. Ebenso kann man sich hierüber Klarheit verschaffen, wenn man das Krafteck zeichnet, mit dessen Hilfe die Einflußfläche des Momentes M_{wi} darzustellen ist.

4. Um schließlich die *Biegelinie des Lastgurtes* für die gegebene Trägerbelastung zu erhalten, berechnet man *für jedes Schnittfeld und für alle dazu gehörigen Wandstäbe* die obigen elastischen Ersatzkräfte, stellt dann für jeden Lastknoten die algebraische Summe der dort angreifenden Kräfte w fest und zeichnet schließlich zwischen den Kraftrichtungen (in bekannter Weise) mit Hilfe des Kraftecks aller elastischen Kräfte ein Seileck. *Dieses ist die gesuchte Biegelinie, die den alleinigen Einfluß der Formänderung der Wandstäbe darstellt.*

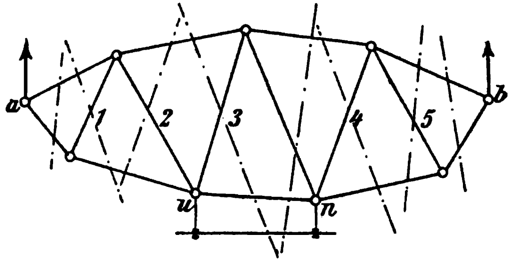


Fig. 67.

Wenn man will, kann man natürlich das Krafteck auch aus *sämtlichen* elastischen Kräften derart bilden, daß das zugehörige Seileck die Summe der Einflüsse von Gurt und Wand zugleich zur Erscheinung bringt.

Zu beachten bleibt, daß auf die beiden Lastknoten *eines* Feldes (un in Fig. 67) die Ersatzkräfte w von 4 Wandstäben entfallen. Für die Stäbe 2 und 3 auf Knoten u und für die Stäbe 4 und 5 auf Knoten n.

Vgl. hierzu die Zahlenbeispiele unter **17**.

5. Die beschriebene Darstellung der Biegelinie ändert sich im Grunde nicht, wenn der Momentenpunkt i nicht außerhalb, sondern *innerhalb der Stützen* liegt. Die Ersatzkräfte werden dann in gleicher Weise ermittelt. Es gibt für solche Schnittfelder (nach II. **17**, c) keinen Spannungswechsel, demnach besitzt die Einflußfläche der von der elastischen

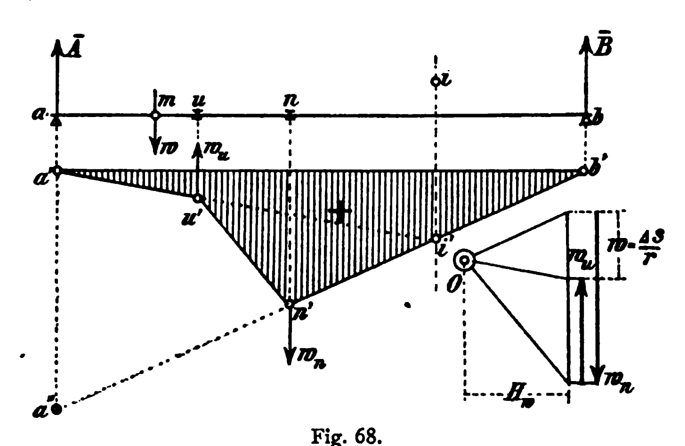


Fig. 68.

Dehnung *eines* Stabes verursachten Knotensenkungen keine Lastscheide. Jedoch müssen, wie schon gesagt, *für eine beliebige Lage der wandernden Kraft w* die Ersatzkräfte w_u und w_n gleiche Werte erhalten. Das ist allgemein auf folgendem Wege zu beweisen (Fig. 68).

Die in m angreifende Kraft $w = \frac{\Delta s}{r}$ bildet mit den von ihr erzeugten Stützenkräften $\bar{A}$ und $\bar{B}$ eine Gleichgewichtsgruppe; ebenso auch die Mittelkraft der gesuchten beiden Ersatzkräfte. Die Summe der statischen Momente der vier im Gleichgewicht befindlichen Kräfte $\bar{A}$, $\bar{B}$, w_u und w_n muß deshalb in Bezug auf einen beliebigen Punkt i der Ebene gleich Null werden. Das kann nur der Fall sein, wenn die Mittelkraft von w_u und w_n die (nach den Fig. 66 und 68) immer durch i verlaufen muß, und die Mittelkraft der von diesen beiden Kräften

erzeugten Stützenkräfte gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind. Danach berechnet sich die Größe der Ersatzkräfte allgemein so, wie dies im vorigen für den Fall des außerhalb der Stützen liegenden Punktes i schon ausgeführt worden ist.

Will man w_n und w_u durch das Moment der gegebenen Trägerbelastung ausdrücken, so erhält man

$$w_u = \frac{\Delta s}{r_1} = \pm \frac{Mk}{r_1 r}$$

und

$$w_n = \frac{\Delta s}{r_2} = \mp \frac{Mk}{r_2 r}. \qquad (87)$$

Ferner ist

$$w = \frac{\Delta s}{r_1} + \frac{\Delta s}{r_2} = \frac{Mk}{r^2}.$$

Das gibt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}, \qquad (88)$$

wie dies auch unmittelbar aus der Fig. 66 abzulesen ist.

16. Biegelinien für besondere Trägerarten.

a. Strebenfachwerk und Ständerfachwerk.

1. *Strebenfachwerk ohne und mit Endständern.* Ist kein Ständer vorhanden (Fig. 69), so läßt sich durch einen der beiden Gurtstäbe, die im Stützpunkte a endigen, kein Ritterscher Schnitt legen, also auch ohne weiteres keine Formel zur Berechnung der zugehörigen elastischen Kraft angeben. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, denke man an den betrachteten Stab zwei *starre* Stäbe a—c und 1—c geschlossen. Dann ist nämlich ein Schnitt durch den Stab zu legen, für welchen dieser als Wandstab gilt. Somit erhält man noch eine w'_1-Kraft für den Knoten 1, die in bekannter Weise (nach den Gl. 86) zu berechnen ist.

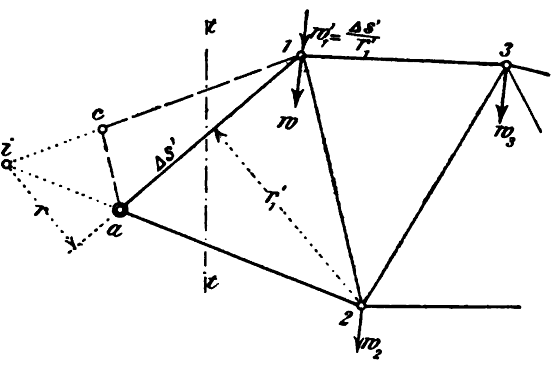


Fig. 69.

Sind Endständer vorhanden (Fig. 72), so fragt es sich, ob die Biegelinie für den Obergurt oder Untergurt zu zeichnen ist. Eine Last in

den Untergurtknoten erzeugt in den Ständern und den beiden dort anstoßenden Obergurtstäben keine Spannungen, diese Stäbe sind also für die Biegelinie des Untergurts ohne Einfluß. Handelt es sich um die Biegelinie des Obergurtes, so zeichne man diese zuerst so, als ob beide Ständer *starr* wären. Sodann erwäge man, daß die Senkung der Obergurt-Endknoten gleich der elastischen Längenänderung der zugehörigen Endständer ist und lege danach die *Schlußlinie*, von welcher alle Senkungen des Obergurts gemessen werden sollen, fest.

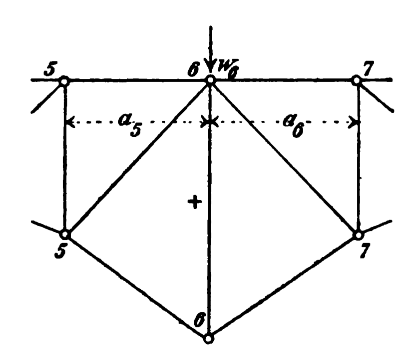


Fig. 70.

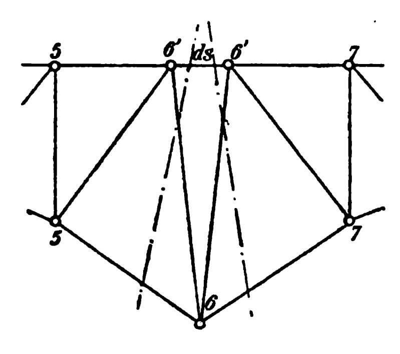


Fig. 71.

2. *Ständerfachwerk.* Bei Ständerfachwerk kommen häufig Felder vor, in denen ein RITTERscher Schnitt nicht zu legen ist, ohne mehr als 3 Stäbe zu schneiden, wie es z. B. in Fig. 70 in den Feldern 5—6 und 6—7 der Fall ist, wenn man den Ständer 6—6 mit treffen will. Die elastischen Kräfte für diesen Ständer sind daher unmittelbar nicht anzugeben. Man kann sie aber auf folgende Weise finden: An Stelle des obern Ständerknotens denke man eine *unendlich kleine* Gurtstrecke ds angelegt und löse den Ständer selbst, wie Fig. 71 darstellt, in zwei gleichwertige Ersatzständer auf, die zusammen die nämliche Formänderung des Fachwerks herbeiführen, wie der einfache Stab 6—6. Dann kann man durch jeden der beiden Ersatzstäbe einen RITTERschen Schnitt legen und die beiden zugehörigen elastischen Kräfte nach dem bekannten allgemeinen Verfahren berechnen.

Die Formänderungsarbeit $S\Delta s$ des beseitigten Ständers muß gleich derjenigen der beiden Ersatzstäbe sein. Für diese folgt daraus

$$2\left(\tfrac{1}{2}S\right)\frac{\tfrac{1}{2}Ss}{E\left(\tfrac{1}{2}F\right)} = S\Delta s,$$

d. h. für jeden Ersatzstab gibt es eine elastische Kraft w, die durch den dem Stabe zugeordneten Momentenpunkt verläuft (Fig. 66 und 68) und

die beide im Knoten 6 zu einer Mittelkraft w_6 zusammengesetzt werden können. Ist das Vorzeichen von Δs z. B. *positiv*, so berechnet man für die *Biegelinie des Ober- oder Untergurtes*

$$w_6 = + \left(\frac{\Delta s}{r} + \frac{\Delta s}{r'}\right),$$

wenn r und r' die betreffenden Hebelarme sind. Vgl. die Aufgabe 34 unter **17**, b.

Handelt es sich beim Ständerfachwerk um den alleinigen Einfluß der Gurtlängenänderungen, so gilt die dafür gezeichnete Biegelinie für *beide* Gurte. Denn für jeden durch einen Ständer gelegten Schnitt liegen die bei den für die Berechnung der w-Kräfte maßgebenden Momentenpunkte m_o und m_u in den Ständerlotrechten (Fig. 72), deshalb fallen die Senkungen der Knoten m_o und m_u in der Biegefläche gleich groß aus, einerlei ob der Lastgurt oben oder unten liegt.

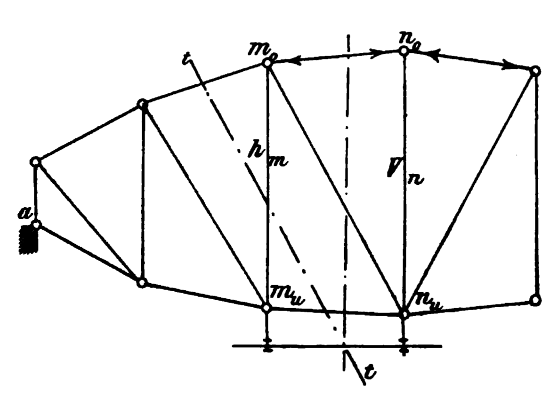


Fig. 72.

Will man zugleich die Formänderung der Gurte und der Wand berücksichtigen, so gibt es natürlich für Obergurt und Untergurt im allgemeinen verschiedene Biegelinien. Braucht man dann beide, so beginne man mit der Biegelinie desjenigen Gurtes, der in den Stützpunkten endigt. Die Biegelinie des andern Gurtes findet man danach *aus den elastischen Längenänderungen der Ständer*, weil durch diese *die gegenseitige Verschiebung der Ständerknoten* bedingt ist.

b. Parallelträger (Fig. 73). Hier ist der Hebelarm für die Gurtstabkräfte gleich der Trägerhöhe h, also

$$w = \frac{\Delta s}{h}. \tag{89}$$

Für die Wandstäbe liegt der Momentenpunkt in unendlicher Ferne. Die elastischen Kräfte eines Schnittfeldes müssen daher gleich groß ausfallen. So bilden sie für jeden Wandstab ein Kräftepaar, das einer

unendlich kleinen, in unendlich großer Ferne wirkenden elastischen Kraft gleichwertig ist (I. **47**, a).

Es empfiehlt sich, die elastischen Kräfte für Parallelträger nicht aus den Momente, sondern aus der Querkraft herzuleiten. Man erhält dann

$$w = \frac{\Delta s}{r} = \frac{S \cdot s}{E \cdot F \cdot r} = \left(\frac{Q}{F}\right)\left(\frac{s}{E r \cos\alpha}\right). \qquad (90)$$

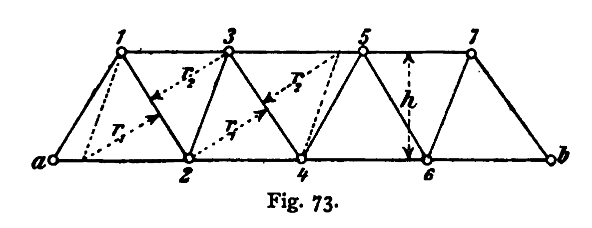


Fig. 73.

In manchen Fällen ist der Klammerwert $\frac{s}{Er}$ unveränderlich. Dann wird man die Werte für w zweckmäßig um $\frac{s}{Er}$ mal größer auftragen, als sie wirklich sind und dies beim Festlegen des Maßstabes der Biegefläche berücksichtigen. Vgl. die Aufgabe 33 unter **17**.

c. Zusammengesetzte Fachwerke und statisch unbestimmte Träger.

1. Es ist zu übersehen, wie die Darstellung von Biegelinien nach dem Verfahren von Mohr nicht allein für einfache, sondern auch für zusammengesetzte Fachwerke gilt. Denn für eine beliebige Lage der wandernden elastischen Kraft w und ein beliebiges Schnittfeld ist auch hier die Arbeitsgleichung

$$1 \cdot y = \overline{S} \Delta s$$

anzuschreiben. Ebenso gewinnt man in allen Fällen auch den allgemeinen Ausdruck

$$w = \frac{\Delta s}{r}.$$

Deshalb ist die Einflußfläche einer Senkung y hier ebenfalls (abgesehen von ihrem Multiplikator) gleich der Einflußfläche des Momentes M_{wi} oder (abgesehen vom Vorzeichen) gleich der Einflußfläche der betrachteten Stabkraft selbst. Die Darstellung einer Biegelinie für ein zusammengesetztes Fachwerk kann also nach den im vorstehenden für ein einfaches Fachwerk gegebenen Regeln erfolgen. Besonders zu beachten bleiben nur die *Vorzeichen der elastischen Kräfte* und die damit zusammenhängende Lage der Biegeflächen gegenüber dem *Schlußlinienzuge* (I. **62**).

2. Die den *Einfluß der Gurte* bestimmenden w-Kräfte sind für alle Felder, in denen die Einflußfläche ihres Momentes positiv ist, ebenfalls positiv und umgekehrt. Wechselt das Moment innerhalb eines Feldes sein Vorzeichen, wie es z. B. bei Auslegeträgern vorkommen kann, so wechselt von einem Knoten des Feldes bis zum andern auch die w-Kraft ihr Vorzeichen, weil eine positive Obergurtkraft und eine negative Untergurtkraft beide *eine Hebung* des zugeordneten Knotens herbeiführen, während ein negatives O und ein positives U beide eine *Senkung* bewirken. Die gegebenen Regeln für das Feststellen der Vorzeichen der elastischen Kräfte von Wandstäben ändern sich nicht. In jedem Falle, bei außerhalb oder innerhalb der Stützen liegenden Momentenpunkte, haben *beide w-Kräfte verschiedene Richtungen oder Vorzeichen.* Im übrigen bleibt es bei der von Mohr gegebenen Regel, oder man wende irgend ein anderes der beschriebenen Kennzeichen an, um die Vorzeichen festzulegen.

3. Für *statisch unbestimmte Träger* gelten die vorstehenden Darlegungen ebenfalls, sobald *die überzähligen Größen für die wirkliche Belastung* berechnet und als äußere Kräfte X angebracht worden sind. Weil ferner das durch Kräfte P belastete statisch unbestimmte System die gleichen Formänderungen erfährt, wie das durch die Kräfte P und X belastete statisch bestimmte *Hauptnetz* (I. **35**), so gilt auch für das letztere die Arbeitsgleichung

$$1 \cdot y = \bar{S} \cdot \Delta s.$$

Darin bedeutet $\bar{S}$ eine allein von einer gedachten Krafteinheit erzeugte Stabkraft des Hauptnetzes und Δs ist die von der wirklichen Belastung P und den äußern Kräften X verursachte elastische Längenänderung des betrachteten Stabes. Vgl. die Aufgabe 42 unter **37.**

17. Die Darstellung von Biegelinien in Beispielen.

a. Einfacher Parallelträger mit Strebenfachwerk.

Aufgabe 33. *Für den in der* Fig. 74 *gezeichneten eisernen Träger, dessen Fahrbahn am Obergurt liegt, soll die Senkung des Knotens* 6 *graphisch dargestellt und rechnerisch nachgeprüft werden. Dabei ist als Belastung eine Lokomotive mit Tender in der gezeichneten Stellung zugrunde zu legen und der Einfluß von Gurten und Wand getrennt zu behandeln.*

1. *Einfluß der Gurte.* Am einfachsten gestaltet sich die Lösung, wenn man zuerst die *Einflußfläche der Senkung des Knotens* 6 zeichnet und dann mit deren Hilfe die gesuchte Gesamtsenkung berechnet. Zu dem Zwecke denkt man sich den Knoten 6 durch eine lotrechte Kraft-

einheit belastet und ermittelt dafür die Biegelinie des Lastgurtes (**13**) mit Hilfe der Gl. (85)

$$w = \frac{Ms}{EFr^2}.$$

Sämtliche Gurtquerschnitte sind aus der Tabelle 1 zu entnehmen. Die Gurtlängen sind durchweg gleich 3 m und der Hebelarm überall gleich 2 m. Nimmt man dazu das Dehnungsmaß $E = 2100 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2}$ an, so läßt sich

$$w = \left(\frac{s}{Er^2}\right)\left(\frac{M}{F}\right)$$

oder

$$w = \frac{1}{280\,000} \frac{M}{F}$$

anschreiben.

Danach sind alle elastischen Kräfte vorläufig am bequemsten um 280000 mal größer anzunehmen, als sie wirklich sind. Deren Berechnung ist in der Tabelle 1 ausgeführt.

Tabelle 1. Zur Berechnung der elastischen Kräfte w der Gurte.

Knoten-nummer	Moment M_w in tcm	Querschnitt F in cm²	$w = \frac{M_w}{F}$	$12\,w$	Bemerkungen
1	60,0	36,0	$\frac{5}{3}$	20,0	Die aus der gedachten Krafteinheit des Knotens 6 herrührenden Stützenkräfte sind
2	120,0	36,0	$\frac{10}{3}$	40,0	
3	180,0	72,0	$\frac{5}{2}$	30,0	
4	240,0	72,0	$\frac{10}{3}$	40,0	
5	300,0	90,0	$\frac{10}{3}$	40,0	
6	360,0	72,0	5,0	60,0	
7	270,0	72,0	$\frac{15}{4}$	45,0	$\bar{A} = \frac{2}{5}$
8	180,0	36,0	5,0	60,0	$\bar{B} = \frac{3}{5}$
9	90,0	36,0	$\frac{5}{2}$	30,0	
				Σw 365,0	

Die *Polweite* H_w des Kraftecks der elastischen Kräfte berechnet sich wie folgt: Der Maßstab der Längen ist in der Fig. 74 mit 3 cm = 4 m angegeben, das gibt also eine Verkleinerung von $\frac{3}{400}$. Anderseits ist aber die Vergrößerung um das 280000 fache zu berücksichtigen. Für *eine solche* muß demnach

$$1\ w\text{-Einheit} = \frac{3}{400}$$

gemacht werden. Es ist aber nur eine 336*fache* Vergrößerung der Senkungen gewählt, wobei (wie die Tabelle 1 angibt) die w, um runde Zahlen zu haben, außerdem noch mit 12 multipliziert worden sind. Deshalb mußte schließlich

$$1\ w\text{-Einheit} = \frac{3 \cdot 280000 \cdot 12}{400 \cdot 336} = 75$$

gezeichnet werden. H_w wurde 15 mm groß gemacht (Fig. 75). Daraus folgte der Maßstab

$$1\ \text{mm} = 5\ w\text{-Einheiten}.$$

Das mit Hilfe des w-Kraftecks (Fig. 75) gezeichnete Seileck $a'6'b'$ gilt für unmittelbare Lastübertragung. Die gesuchte Einflußfläche wird durch das angeschriebene Seileck $a'-2'-4'-6'-8'-b'$ begrenzt. Sie gilt für den Knoten 6 des Lastgurtes ab. Ehe man aber die Einflußfläche benutzt, um daraus für den Lastenzug die $\sum \delta$ zu berechnen, ist die rechnerische Nachprüfung von δ_6 vorzunehmen.

2. *Nachprüfung der Biegelinie des Lastgurtes.*

Aus der Arbeitsgleichung

$$\bar{1} \cdot \delta_6 = \sum \bar{S} \Delta s$$

erhält man unter Einsetzung der bekannten Größen

$$\delta_6 = \frac{s}{E r^2} \sum \frac{M_w^2}{F}$$

oder

$$\delta_6 = \frac{1}{280000} \sum \frac{M_w^2}{F}.$$

Aus den in der Tabelle 1 berechneten Werten von M_w und $\frac{M_w}{F}$ erhält man

$$\sum \frac{M_w^2}{F} = 6687{,}5$$

und daher *für* 336*fache Vergrößerung, in Millimetern*

$$\delta_6 = \frac{336 \cdot 6687{,}5 \cdot 10}{280000} = 80{,}25\ \text{mm}.$$

Genau ebensoviel ist aus dem Seileck der Fig. 74 für δ_6 abzumessen. In natürlicher Größe beträgt danach

$$\delta_6 = \frac{80{,}25}{336} = 0{,}2388\ \text{mm}.$$

3. *Die Senkung für den Lastenzug* berechnet sich aus

$$\max.\ \delta_6 = \frac{1}{336}\,[8{,}5\,(\delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6) + 6{,}5\,(\delta_9)]\,.$$

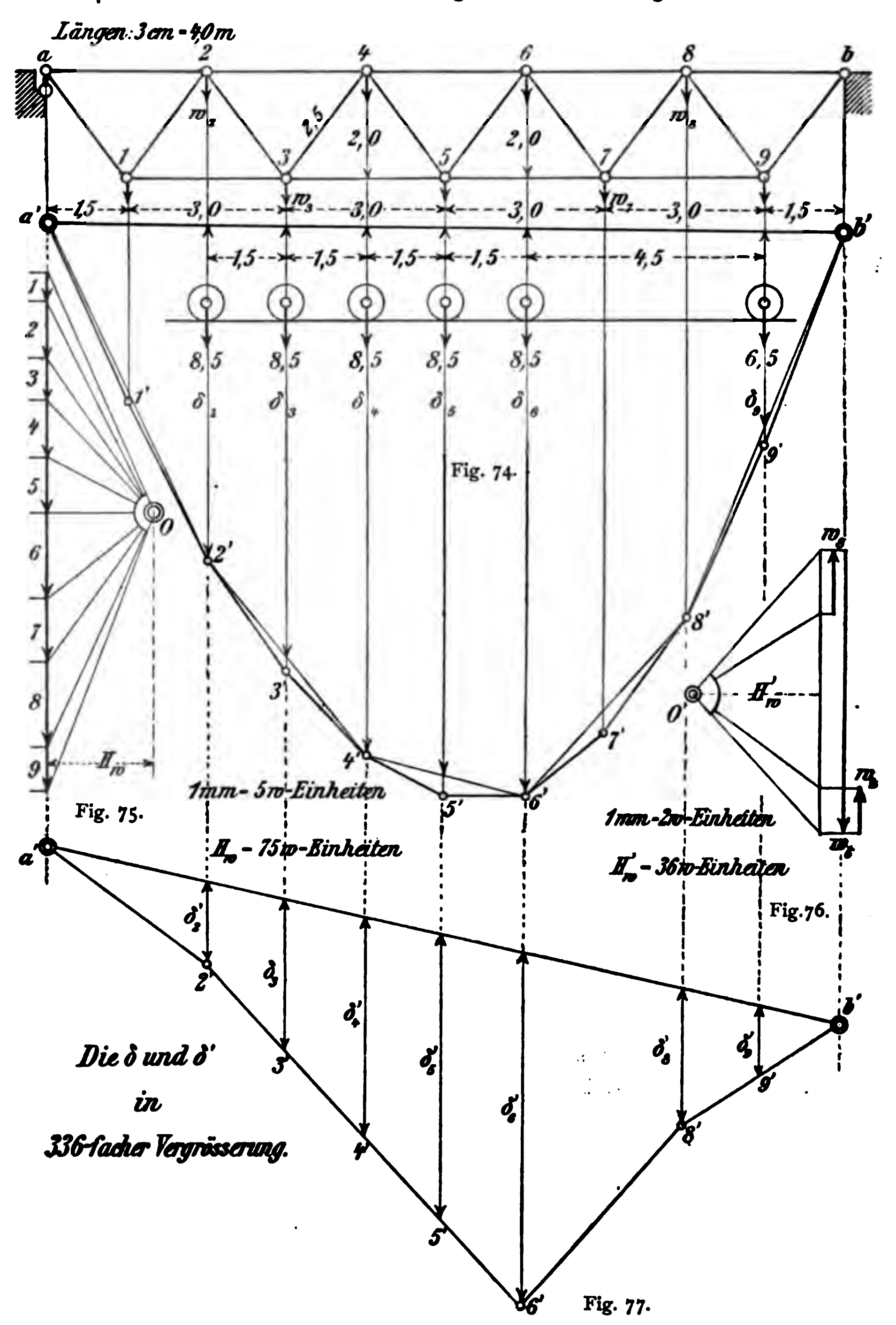


Fig. 74. Fig. 75. Fig. 76. Fig. 77.

Dafür findet man durch Messung im Seileck der Fig. 74 in natürlicher Größe

$$\max. \delta_6 = \frac{8{,}5(47{,}25 + 60{,}75 + 74{,}50 + 77{,}25 + 80{,}25) + 6{,}5 \cdot 27{,}25}{336}$$

oder

$$\max. \delta_6 = 9{,}13 \text{ mm.}$$

3. *Einfluß der Wandstäbe.*

Tabelle 2. Zur Berechnung der elastischen Kräfte w der Wand.

Stab	Q in t	F cm²	$1000\,\frac{Q}{F}$	$1000\,w = 1000\left(\frac{Q}{F}\right)$ Knoten 2	Knoten 4	Knoten 6	Knoten 8	Bemerkungen
a—1	+ 0,4	40	10	+ 10	—			Über die Festsetzung der *Vorzeichen* der elastischen Kräfte (mit Hilfe der Fig. 74a) vgl. unter 15, c, 3.
1—2	+ 0,4	40	10	+ 10	—			
2—3	+ 0,4	25	16	— 16	+ 16			
3—4	+ 0,4	25	16	— 16	+ 16	Fig. 74a.		
4—5	+ 0,4	25	16	—	— 16	+ 16	—	
5—6	+ 0,4	25	16	—	— 16	+ 16	—	
6—7	— 0,6	25	24	—	—	+ 24	— 24	
7—8	— 0,6	25	24	—	—	+ 24	— 24	
8—9	— 0,6	40	15	—	—	—	+ 15	
9—b	— 0,6	40	15	—	—	—	+ 15	
				— 12	± 0	+ 80	— 18	

In Fig. 76 ist danach das Krafteck der elastischen Kräfte gezeichnet und mit seiner Hilfe zwischen den Kraftrichtungen das Seileck der Biegelinie — unter 336facher Vergrößerung der Senkungen — dargestellt worden.

Polweite und Maßstab des Kraftecks berechneten sich wie folgt: Es ist

$$w = \frac{\Delta s}{r} = \frac{S \cdot s}{E F r} = \left(\frac{Q}{F}\right)\left(\frac{s}{E r \cos\alpha}\right),$$

worin $E = 2100 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$; $r = 240$ cm; $s = 250$ cm; $\cos\alpha = 0{,}8$ einzusetzen bleibt. Das gibt

$$w = \frac{1}{1612{,}8}\left(\frac{Q}{F}\right).$$

In der Tabelle 2 sind die w tausendmal zu groß angegeben, außerdem ist der Längenmaßstab mit $\frac{3}{400}$ zu berücksichtigen. Danach erhält man

$$1\ w\text{-Einheit} = \frac{3 \cdot 1612{,}8 \cdot 1000}{400 \cdot 336} = 36.$$

Im zugehörigen Kraftecke, mit dem Pole O', wurde eine Einheit gleich 0,5 mm gemacht.

In der Fig. 77 gemessen ergibt sich die Senkung des Knotens 6 mit rund 50 mm, das macht

$$\delta_6' = \frac{50}{336} = 0{,}149 \text{ mm}.$$

Diese Senkung soll rechnerisch nachgeprüft werden mit Hilfe der Arbeitsgleichung

$$\bar{1} \cdot \delta_6' = \sum \bar{S} \Delta s = \sum \bar{S}^2 k$$

oder

$$\delta_6' = \frac{s}{E \cdot \cos^2\alpha} \sum \frac{Q^2}{F}.$$

Aus der Tabelle 2 erhält man

$$\sum \frac{Q^2}{F} = 80{,}4$$

und danach

$$\delta_6' = \frac{250 \cdot 80{,}4 \cdot 10}{2100 \cdot 0{,}8^2 \cdot 1000} = 0{,}149 \text{ mm}.$$

Die Gesamtsenkung des Knotens 6 berechnet sich mit

$$\max.\ \delta_6' = \frac{1}{336}\left[8{,}5\,(\delta_2' + \delta_3' + \delta_4' + \delta_5' + \delta_6') + 6{,}5 \cdot (\delta_9')\right].$$

Daraus findet man durch Messung in der Fig. 77

$$\max.\ \delta_6' = \frac{8{,}5\,(11{,}5 + 21{,}5 + 31 + 40{,}5 + 50) + 6{,}5 \cdot 19{,}5}{336} = \frac{1440}{336}$$

oder

$$\max.\ \delta_6' = 4{,}3 \text{ mm}.$$

b. Auslegeträger mit Ständerfachwerk.

Aufgabe 34. *Für den in* Fig. 78 *in der Ansicht dargestellten Hauptträger einer leichten Landstraßenbrücke soll die größte Senkung des Gelenkes g graphisch und rechnerisch ermittelt werden. Die Brücke ist zwischen den beiden Hauptträgern* 8 m *breit, und ihre Verkehrslast beträgt* $400\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$. *In den folgenden Tabellen sind alle Längen und Querschnitte der Fachwerksstäbe angegeben. Das Eigengewicht des Hauptträgers ist unter Benutzung der Tabelle* 2 (II. § 11) *zu berechnen.*

1. *Einfluß der Gurte.* Um die größte Senkung δ_g des Gelenkes g zu finden, zeichnet man dafür eine Einflußlinie. Das ist diejenige Biegelinie des Lastgurtes, welche durch eine in g angreifende Lasteinheit erzeugt wird. Für das vorliegende Ständerfachwerk fallen die Biegelinien für beide Gurte gleich aus (**16**, a, 2). Wir zeichnen deshalb zuerst die Biegelinie des Untergurtes *abgc*. Zu dem Zwecke sind die elastischen Kräfte w in der Tabelle 3 berechnet und auf die Knoten verteilt.

Tabelle 3. Berechnung der elastischen Kräfte für den Einfluß der Gurte.

Stabnummer	Gurt	Stablänge s m	Hebelarm r m	Querschnitt F cm²	Knotennummer		Moment $\overline{M}$ tm	Elastische Kräfte $w = \frac{\overline{M}s}{EFr^2}$ 190000 w	Summe	Knotennummer	Bemerkungen
a—1	U	6,000	8,000	80,0	O	1	$-\frac{60}{19}$	−0,3516	−0,7032	1	Die aus der Krafteinheit $\overline{1}_g$ herrührenden *Stützenkräfte* sind $\overline{A} = -\frac{10}{19}$ $\overline{B} = +\frac{29}{19}$ Die Momentenfläche gleicht derjenigen *eines einfachen Balkens auf den Stützen a und g.* Ihr Vorzeichen ist aber *negativ.*
1—2	O	6,000	8,000	80,0	U	1	$-\frac{60}{19}$	−0,3516			
1—2	U	6,000	8,000	80,0	O	2	$-\frac{120}{19}$	−0,7032	−1,4064	2	
2—3	O	6,000	8,000	80,0	U	2	$-\frac{120}{19}$	−0,7032			
2—3	U	6,000	8,000	80,0	O	3	$-\frac{180}{19}$	−1,0548	−2,1096	3	
3—4	O	6,000	8,000	80,0	U	3	$-\frac{180}{19}$	−1,0548			
3—4	U	6,083	8,877	120,0	O	4	$-\frac{240}{19}$	−0,7718	−1,5527	4	
4—5	O	6,325	9,000	120,0	U	4	$-\frac{240}{19}$	−0,7809			
4—5	U	6,633	10,488	160,0	O	5	$-\frac{303,25}{19}$	−0,5716	−1,1727	5	
5—6	O	7,675	11,000	160,0	U	5	$-\frac{303,25}{19}$	−0,6011			
5—6	U	8,651	13,300	200,0	O	6	−20,0	−0,4570	−0,9140	6	
6—7	U	8,651	13,300	200,0	O	6	−20,0	−0,4570			
6—7	O	7,675	11,000	160,0	U	7	−12,325	−0,4641	−0,9053	7	
7—8	U	6,633	10,488	160,0	O	7	−12,325	−0,4412			
7—8	O	6,325	9,000	120,0	U	8	−6,0	−0,3522	−0,9053	8	
8—g	U	6,083	8,877	80,0	O	8	−6,0	−0,5531			

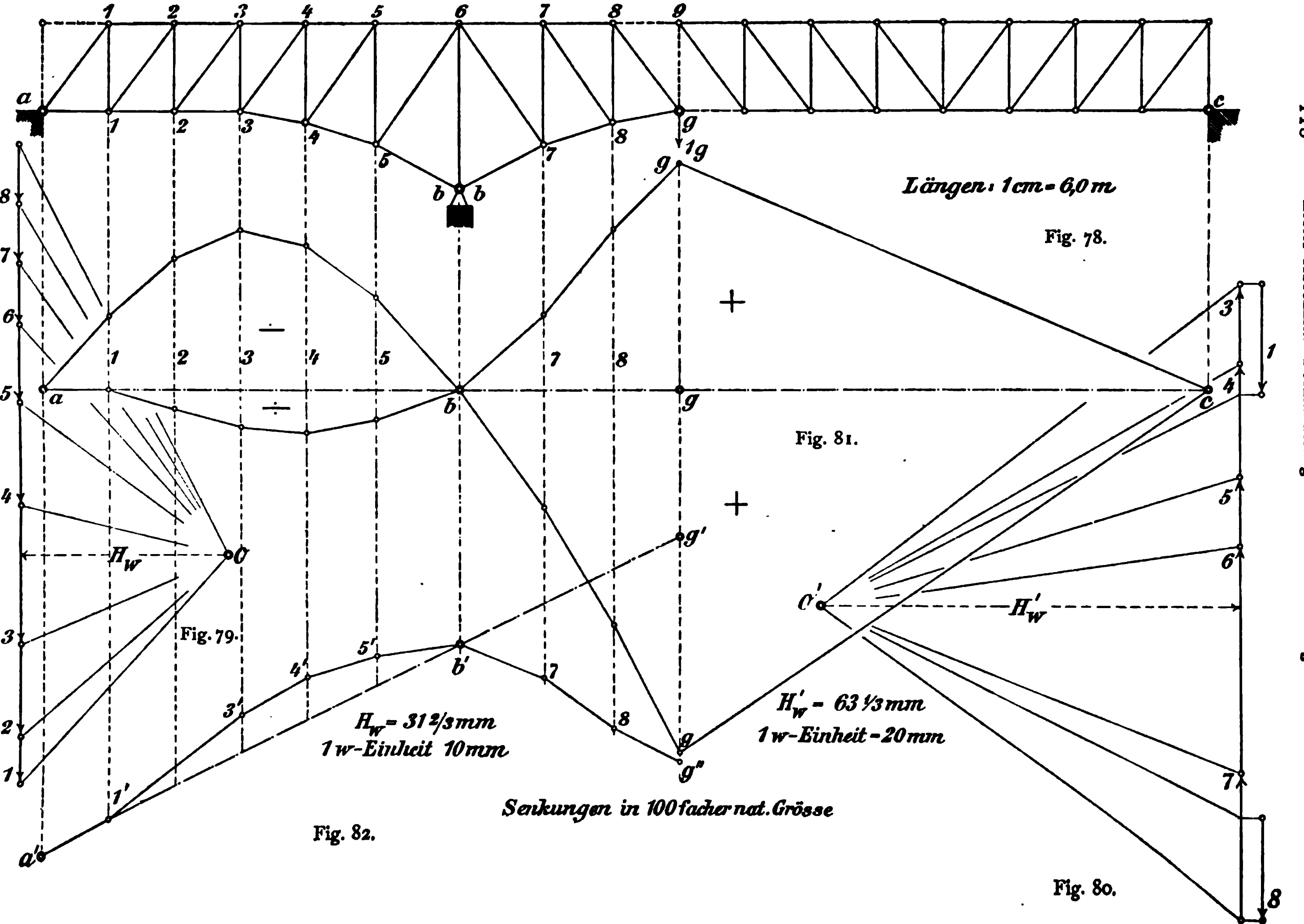


Fig. 78.

Fig. 79.

Fig. 80.

Fig. 81.

Fig. 82.

Zu bemerken bleibt noch, daß die auf die Knoten a und g entfallenden elastischen Kräfte auf die Gestalt der Biegefläche des Untergurtes keinen Einfluß haben, wie eine Betrachtung des mit dem Pole H_w gezeichneten Kraftecks und des zugehörigen Seilecks (Fig. 81) ohne weiteres ergibt.

Die *Polweite* H_w bestimmte sich aus folgenden Erwägungen. Der Längenmaßstab der Fig. 78 ist 1 : 600. Die elastischen Kräfte wurden in 190000facher Vergrößerung aufgetragen. Daraus folgt für die gewählte 100fache Vergrößerung der Senkungen

$$1\ w\text{-Einheit} = \left(\frac{1}{600}\right)\frac{190000}{100} = \frac{19}{6}\,.$$

Aufgetragen wurde eine Einheit gleich 10 mm. Demnach mußte (in Fig. 79)

$$H_w = \frac{19 \cdot 10}{6} = 31\tfrac{2}{3}\ \text{mm}$$

gemacht werden.

Nach erfolgter Darstellung der Biegelinie (Fig. 81) wurde δ_g mit 55 mm abgemessen. Das gibt *in natürlicher Größe*

$$\delta_g = \tfrac{55}{100} = 0{,}55\ \text{mm}.$$

Bei der rechnerischen Nachprüfung ist

$$\bar{1} \cdot \delta_g = \sum \bar{S}^a k$$

anzusetzen. Für die Summe läßt sich aber anschreiben

$$\sum \bar{S}^a k = \sum \bar{S}^a \frac{s}{EF} = \sum \frac{\bar{M}^a s}{EFr^2} = \sum \bar{M} w\,.$$

Mit Hilfe der in der Tabelle bereits berechneten Werte von w und $\bar{M}$ erhält man in Millimetern

$$\sum \bar{M} w = \left(\frac{1\,000}{190\,000}\right)\Big[\frac{60}{19}(14 \cdot 0{,}7032 + 4 \cdot 0{,}15527) + \frac{303{,}25}{19}(1{,}1727) + 20 \cdot 0{,}914 + 12{,}325 \cdot 0{,}9053 + 6 \cdot 0{,}9053\Big],$$

das gibt

$$\delta_g = \sum \bar{M} w = \frac{104\,270}{190\,000} = 0{,}548\ \text{mm}.$$

Tabelle 4. Berechnung der elastischen Kräfte für den Einfluß der Wand.

Stab-nummer	Quer-schnitt F	Quer-kraft $\bar{Q}$	Stabkraft $\bar{S}$: $\frac{Q}{\cos\alpha}$	Stabkraft $\bar{S}$: $\frac{Q}{\cos\alpha}\left(\frac{s}{b}\right)$	Stab-länge s	Elastische Kräfte $w = \frac{\bar{S}s}{EFa}$: $190000\,w$	Feldknoten links	Feldknoten rechts	Summe w: Größe	Summe w: Knoten
	cm²	t	t	t	m					
a—1	80,0	$-\frac{10}{19}$	$+\frac{25}{38}$	—	10,0	+ 1,302	—	—	0,000	a
						— 1,302	—	1	+ 0,833	1
1—1	80,0	$-\frac{10}{19}$	$-\frac{10}{19}$	—	8,0	+ 0,833	1	—		
						— 0,833	—	2		
1—2	80,0	$-\frac{10}{19}$	$+\frac{25}{38}$	—	10,0	+ 1,302	1	—		
						— 1,302	—	2	0,000	2
2—2	80,0	$-\frac{10}{19}$	$-\frac{10}{19}$	—	8,0	+ 0,833	2	—		
						— 0,833	—	3		
2—3	80,0	$-\frac{10}{19}$	$+\frac{25}{38}$	—	10,0	+ 1,302	2	—		
						— 1,302	—	3	— 0,602	3
3—3	80,0	$-\frac{10}{19}$	$-\frac{10}{19}$	—	8,0	+ 0,833	3	—		
						— 0,833	—	4		
3—4	80,0	$-\frac{10}{19}$	—	+ 0,365	10,0	+ 0,700	3	—		
						— 0,700	—	4	— 0,877	4
4—4	80,0	$-\frac{10}{19}$	—	— 0,292	9,0	+ 0,520	4	—		
						— 0,493	—	5		
4—5	100,0	$-\frac{19}{19}$	—	+ 0,082	11,0	+ 0,136	4	—		
						— 0,136	—	5	— 0,714	5
5—5	100,0	$-\frac{10}{19}$	—	— 0,067	11,0	+ 0,117	5	—		
						— 0,096	—	6		
5—6	120,0	$-\frac{10}{19}$	—	— 0,205	13,41	— 0,202	5	—		
						+ 0,202	—	6	— 1,151	6
6—6	120,0	+ 1,0	—	— 0,137	15,0	+ 0,138	6	6		
6—7	120,0	+ 1,0	—	+ 0,372	13,41	— 0,515	6	—		
						+ 0,515	—	7	— 1,222	7
7—7	100,0	+ 1,0	—	— 0,646	11,0	— 0,880	6	—		
						+ 1,067	—	7		
7—8	100,0	+ 1,0	—	+ 0,789	11,0	— 1,303	7	—		
						+ 1,303	—	8	+ 0,688	8
8—8	80,0	+ 1,0	—	— 0,889	9,0	— 1,501	7	—		
						+ 1,583	—	8		
8—g	80,0	+ 1,0	—	+ 1,111	10,0	— 2,198	8	—	0,000	g
						+ 2,198	—	—		
									Summe — 3,045	

Die Werte $\frac{s}{b}$ vgl. in der Tabelle 5.

2. *Einfluß der Wandglieder.* Auch hier rechnen die auf die Knoten a und g entfallenden elastischen Kräfte nicht mit, die Biegelinie ist unmittelbar für den Lastgurt (Obergurt) gezeichnet. Dabei wurde der Ständer 6—6 (nach dem unter **16**, a, 2 angegebenen Verfahren) in zwei Teile zerlegt gedacht, und die seinem Einfluß gleichwertigen beiden elastischen Kräfte im Knoten 6 angebracht. Die vorstehende Tabelle enthält alle für die Darstellung notwendigen Zahlenwerte. Die Wandstabkräfte $\bar{S}$ wurden (nach II. **17**, b) aus den Querkräften Q berechnet, und zwar im Parallelträgerteile aus der Gleichung

$$\bar{S} = \frac{Q}{\cos\alpha}$$

und im Vieleckträgerteile aus

$$\bar{S} = \left(\frac{Q}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{z}{b}\right).$$

Die Abstände z und b sind in der Tabelle 5 angegeben. Sie berechnen sich leicht aus den Trägergrundmaßen.

Tabelle 5. Zur Berechnung der Wandstabkräfte.

Stab-nummer	Querkraft Q t	$\cos\alpha$	z m	b m
3—4 4—4	$-\frac{10}{19}$	0,800 1,000	+ 30,0	54,0
4—5 5—5	$-\frac{10}{19}$	0,818 1,000	— 4,4625	34,7875
5—6	$-\frac{10}{19}$	0,820	— 9,22	28,78
6—7	+ 1	0,820	+ 8,78	28,78
7—7 7—8	+ 1	1,000 0,818	+ 22,4625	34,7875
8—8 8—g	+ 1	1,000 0,800	+ 48,0	54,0

Das Krafteck der elastischen Kräfte mit dem Pole O' (Fig. 80) ist mit der Polweite $H'_w = 2\,H_w$ gezeichnet. Deshalb gilt darin eine Einheit gleich 20 mm. Die Vergrößeruug der in der Fig. 82 dargestellten Biegelinie ist demnach eine 100fache, weil die w, ebenso wie für den Einfluß der Gurte in 190000facher Vergrößerung aufgetragen worden sind.

Die größte Senkung δ_g wurde mit 34 mm abgemessen. Das gibt in *natürlicher* Größe

$$\delta_g = 0{,}34 \text{ mm}.$$

Beim Nachprüfen dieses Wertes ist

$$\bar{1} \cdot \delta_g = \sum \bar{S}^2 k = \frac{1}{E} \sum \bar{S}^2 \frac{s}{F}$$

gerechnet. Das ergab

$$\delta_g = \frac{680}{2000} = 0{,}34 \text{ mm}.$$

3. *Die Grenzwerte der Senkung des Gelenkes.* Die beiden vor erhaltenen Biegelinien sind in der Fig. 81 über einer Wagerechten zusammengetragen worden, so daß die von ihnen begrenzte Fläche die *Einflußfläche der Senkung des Gelenkes* darstellt. Für den Lauf einer wandernden Einzellast zwischen dem Gelenk g und der Stütze c des Endträgers sind beide Grenzlinien (g—c und g'—c) der Einflußfläche Gerade.

Der *positive* Teil der Einflußfläche berechnet sich mit

$$+f_1 = 100\left[\frac{48}{2}(0{,}0892) + \frac{6{,}0}{2}(0{,}060 + 0{,}0892) + \frac{6{,}375}{2}(0{,}0292 + 0{,}060)\right.$$
$$\left. + \frac{7{,}625}{2}(0{,}0292)\right] = 298{,}4 \text{ cm}^2.$$

Der *negative* Teil mit

$$-f_2 = 100\left[\frac{7{,}625}{2}(0{,}0185) + \frac{6{,}375}{2}(0{,}0185 + 0{,}0282) + \frac{6{,}0}{2}(0{,}0282\right.$$
$$\left. + 2 \cdot 0{,}0297 + 2 \cdot 0{,}0227 + 2 \cdot 0{,}0112)\right] = 69{,}6 \text{ cm}^2.$$

Das *Eigengewicht* g des Trägers wurde für 1 m Brückenlänge (nach II. **67**) durchschnittlich auf

$$g = \frac{8}{2} \cdot 0{,}38 = 1{,}52 \frac{\text{t}}{\text{m}}$$

festgesetzt. Die *Verkehrslast* war mit

$$p = \frac{8}{2} \cdot 0{,}4 = 1{,}6 \frac{\text{t}}{\text{m}}$$

gegeben. Daraus folgt jetzt

$$\text{max.} + \delta_g = g(f_1 - f_2) + p f_1 = + 8{,}25 \text{ cm}$$
$$\text{min.} + \delta_g = g(f_1 - f_2) - p f_2 = + 3{,}36 \text{ cm}.$$

18. Die Biegelinie eines beliebigen Stabzuges. Von LAND († 1899), einem Schüler MOHRS, rührt eine Reihe von ausgezeichneten Aufsätzen über Formänderungen elastischer Stabwerke her, worin er u. a. zuerst eine auf *kinematischem* Wege begründete Darstellung der Biegelinien gegeben hat. Verfasser ist allerdings der Ansicht, daß kein Verfahren zur Darstellung von Biegelinien einfacher, durchsichtiger und allgemeiner ist, als das im vorigen mitgeteilte Verfahren von MOHR. Jedoch kann es in Einzelfällen wohl von Nutzen sein, Biegelinien auf anderm Wege zu zeichnen. Das gilt namentlich für *beliebige elastische Stabzüge*. Deren Biegelinien sollen deshalb nachträglich noch allgemein dargestellt werden[1].

Fig. 83.

Fig. 84.

a. Berechnung der elastischen Kräfte w. Wir betrachten zwei aufeinander folgende Stäbe $\overline{lm}$ und $\overline{mn}$. Deren Längen seien s_m und s_{m+1}. Ferner seien (Fig. 83)

φ_m, φ_{m+1} die Neigungswinkel der Stäbe gegen eine durch ihr linkes Ende gelegte Wagerechte. Oberhalb dieser werden die Winkel *positiv* gerechnet,

τ_m der untere *Randwinkel* des Knotens m,

$\Delta\tau_m$ die Änderung dieses Randwinkels.

[1] Nach LAND. Beitrag zur Ermittelung der Biegungslinien ebener elastischer Stabwerke. Civilingenieur 1889, S. 375.

Wenn nun keine andere Formänderung einträte, als eine *Winkel*änderung $+\Delta\tau_m$, so wäre die zur Ermittelung der Biegelinie in m anzubringende, nach unten gerichtete elastische Kraft

$$w'_m = +\Delta\tau .$$

Bestände die Formänderung aber in einer bloßen elastischen *Längen*änderung der beiden Stäbe, wobei der Knoten m festgehalten gedacht würde, so wären die dadurch entstehenden lotrechten Verschiebungen δ'_l und δ'_n der Knoten l und n (Fig. 83) bestimmt mit

$$\delta'_l = +\Delta s_m \cdot \sin\varphi_m ,$$

und

$$\delta'_n = -\Delta s_{m+1} \cdot \sin\varphi_{m+1} .$$

Werden diese Verschiebungen von einer beliebigen Geraden $\overline{g_1 g_2}$ aus in den Knoten l und n, und in entsprechender Richtung aufgetragen (Fig. 84), so erhält man die Seillinie $l'm'n'$, aus welcher die in m' anzubringende elastische Kraft w''_m zu entnehmen ist. Sie ist gleich der zwischen den Geraden $l'm'$ und $m'n'$ eingetretenen *Winkel*änderung. Setzt man also, wie in der Fig. 84 geschehen ist,

$$\sphericalangle\, g_1 m' l' = \omega_1 ,$$
$$\sphericalangle\, g_2 m' n' = \omega_2 ,$$

so berechnet sich die elastische Kraft mit

$$w''_m = \omega_2 - \omega_1$$

oder

$$w''_m = \frac{\Delta s_{m+1} \cdot \sin\varphi_{m+1}}{s_{m+1} \cdot \cos\varphi_{m+1}} - \frac{\Delta s_m \cdot \sin\varphi_m}{s_m \cdot \cos\varphi_m} .$$

Das gibt

$$w''_m = \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg}\varphi_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg}\varphi_m .$$

Bei *gleichzeitiger* Wirkung von $\Delta\tau_m$, Δs_m und Δs_{m+1} berechnet sich die in m anzubringende, lotrecht gerichtete elastische Kraft w_m mit

$$w_m = w'_m + w''_m = +\Delta\tau_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg}\varphi_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg}\varphi_m . \qquad (91)$$

Führt man für $\frac{\Delta s}{s}$ den Gleichwert $\frac{\sigma}{E}$ ein, so geht die Gl. (91) über in

$$E w_m = +E\Delta\tau_m + \sigma_{m+1} \operatorname{tg}\varphi_{m+1} - \sigma_m \operatorname{tg}\varphi_m . \qquad (92)$$

Wird mit τ der *obere* Randwinkel, z. B. der *innere* Randwinkel eines Untergurtstabzuges, bezeichnet und bezeichnet man die *unterhalb* der Wagerechten gelegenen Neigungswinkel mit φ, so ändern sich in der Gl. (91) die Vorzeichen von $\Delta\tau$ und $\operatorname{tg}\varphi$.

Die Winkeländerung $\Delta\tau_m$ bleibt näher festzustellen.

b. Die Randwinkeländerungen.

1. Wir betrachten den allgemeinen Fall eines *Dreieck*stabwerkes. Eins der Dreiecke sei abc in Fig. 85. s_a, s_b, s_c sind die den betreffenden Ecken a, b, c *gegenüber* liegenden Seitenlängen. Die von a auf s_a gefällte Senkrechte sei r_a.

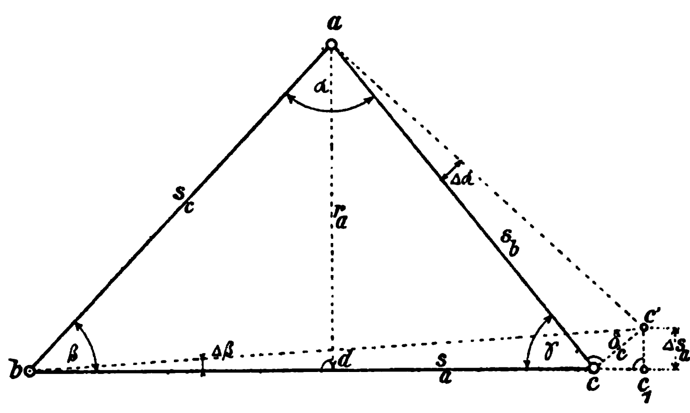


Fig. 85.

Denkt man den Stab s_c festgehalten und *nur den Stab* s_a *seine Länge um* Δs_a *ändern*, so ändern sich auch die Dreieckswinkel entsprechend um $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$ und der Punkt c verschiebt sich nach c', wobei die Verschiebung $\delta_c = \overline{cc'}$ senkrecht zur s_b steht. Also ist

$$\delta_c = s_b \Delta\alpha$$

und die Projektion von δ_c auf s_a gleich Δs_a.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $cc'c_1$ und acd folgt weiter

$$\frac{s_b \Delta\alpha}{\Delta s_a} = \frac{s_b}{r_a}$$

oder

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta s_a}{r_a}. \tag{93}$$

Ferner ist anzuschreiben

$$-\Delta\beta = \frac{\overline{c_1 c'}}{s_a} = \frac{\Delta s_a}{s_a}\operatorname{cotg}\gamma \tag{94}$$

und entsprechend

$$-\Delta\gamma = \frac{\Delta s_a}{s_a}\operatorname{cotg}\beta. \tag{95}$$

Ändern nun *alle drei Stäbe* ihre Länge, so berechnet sich die dann eintretende Winkeländerung $\Delta\alpha$ mit

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta s_a}{r_a} - \frac{\Delta s_b}{s_b}\operatorname{cotg}\gamma - \frac{\Delta s_c}{s_c}\operatorname{cotg}\beta. \tag{96}$$

Für die *graphische Ermittelung von $\Delta\alpha$* kann die Fig. 86 dienen. Darin sind r_a, r_b, r_c drei durch a verlaufende Hilfsgerade, die der Reihe nach auf s_a, s_b, s_c senkrecht stehen und deren Länge durch die s_a mit ihren Verlängerungen begrenzt wird. Bei Verwendung dieser Hilfsgeraden läßt sich die Gl. (96) mit

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta s_a}{r_a} - \frac{\Delta s_b}{r_b} - \frac{\Delta s_c}{r_c} \tag{97}$$

anschreiben.

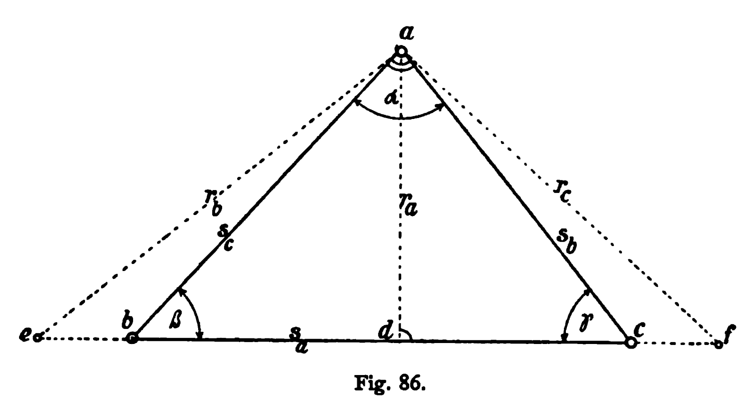


Fig. 86.

Drückt man die Längenänderungen durch die *Stabspannungen* σ_a, σ_b, σ_c aus, so läßt sich die Gl. (97) noch weiter vereinfachen. Man erhält dann, weil allgemein $\frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma}{E}$ ist:

$$E\Delta\alpha = \frac{s_a\sigma_a}{r_a} - \frac{s_b\sigma_b}{r_b} - \frac{s_c\sigma_c}{r_c}. \tag{98}$$

Weitere Umformungen ergeben sich aus der Bedingung

$$s_a = r_a(\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma).$$

Setzt man den daraus zu erhaltenden Wert von r_a in die Gl. (98) ein, so gibt das

$$E\Delta\alpha = \sigma_a(\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma) - \sigma_b\operatorname{cotg}\gamma - \sigma_c\operatorname{cotg}\beta$$

oder

$$E\Delta\alpha = (\sigma_a - \sigma_c)\operatorname{cotg}\beta - (\sigma_a - \sigma_b)\operatorname{cotg}\gamma. \tag{99}$$

2. Wir wenden zuerst die Gleichungen (93), (94) und (95) auf ein Stab*viereck* an (Fig. 87), dessen *Wand*stab s elastisch seine Länge ändert, während seine Umfangsstäbe starr bleiben. Es soll die Änderung des inneren Randwinkels $dab = \tau_a$ berechnet werden.

Der Winkel dab besteht aus den beiden Winkeln α_1 und α_2, von denen jeder in einem andern Dreiecke liegt. Nach vorigem ist also die gesuchte Winkeländerung mit

$$+\Delta\tau_a = \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 = -\frac{\Delta s}{s}(\operatorname{cotg}\beta_1 + \operatorname{cotg}\beta_2)$$

anzuschreiben. Der Ausdruck läßt sich noch vereinfachen. Zieht man nämlich in der Fig. 87 durch a und zu einer der diesem Punkte gegen-

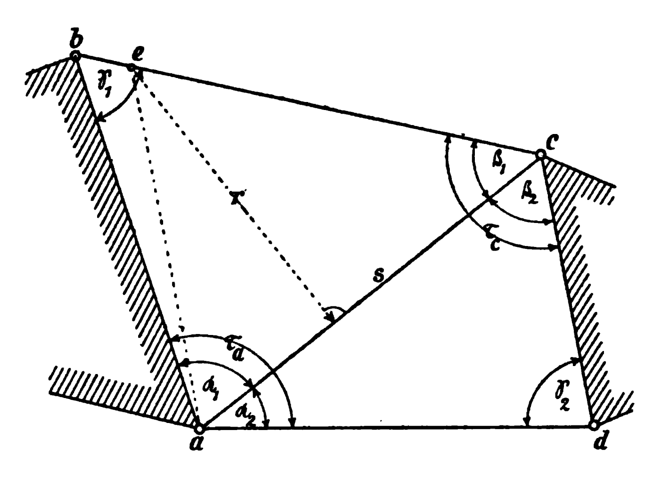


Fig. 87.

überliegenden Seiten, z. B. zur $\overline{cd}$ eine Parallele und legt durch deren Schnittpunkt e mit der andern gegenüberliegenden Seite $\overline{bc}$ eine Senkrechte r zum Wandstabe, so folgt

$$s = r\operatorname{cotg}\beta_1 + r\operatorname{cotg}\beta_2$$

oder

$$r = \frac{s}{\operatorname{cotg}\beta_1 + \operatorname{cotg}\beta_2}$$

und daraus

$$\Delta\tau_a = -\frac{\Delta s}{r}. \qquad (100)$$

Verfasser macht hier darauf aufmerksam, *wie man mit Hilfe der letzten Gleichung die Größen des elastischen Kräfte* $\frac{\Delta s}{r_1}$ und $\frac{\Delta s}{r_2}$, *die bei dem Verfahren von Mohr* (**15**, c) *den Einfluß der Wandstäbe des Fachwerks auf die Knotensenkungen angeben, erklären kann.*

Fig. 88 zeigt das Gelenkviereck eines Schnittfeldes. Die Strebe ac längt sich um $+\Delta s$. Fahrbahn liege am Untergurt. Dann sind in a und d nach MOHR die entsprechenden elastischen Kräfte

$$w_a = +\frac{\Delta s}{r_1}$$

und

$$w_d = -\frac{\Delta s}{r_2}$$

anzubringen, wenn $\overline{ae}$ parallel zur $\overline{de}$ gezogen worden ist.

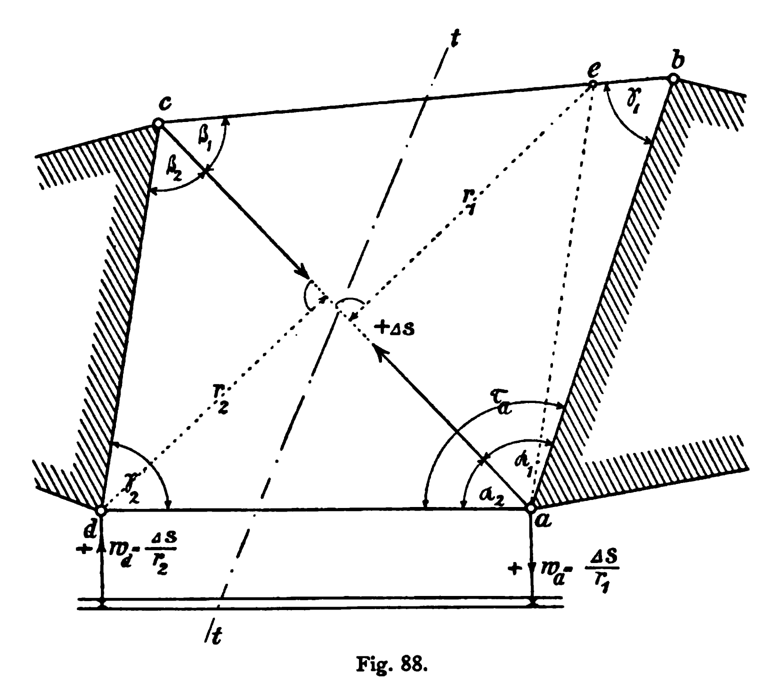


Fig. 88.

Man sieht, daß nach den Gl. (93) und (100)

$$w_a = -\Delta \tau_a$$

und

$$w_d = +\Delta \gamma_2$$

bedeuten. In Worten:

Die den Einfluß der Längenänderung eines Wandstabes darstellenden beiden elastischen Kräfte des Schnittfeldes entsprechen ihrer Größe nach den Änderungen der Randwinkel derjenigen Knoten des Gelenkviereckes, in denen sie (nach MOHR) *angebracht werden. Ihr Vorzeichen ist dem Sinne jener Winkeländerungen entgegengesetzt.*

3. Um die Anwendung der Gl. (99) für die Berechnung der Randwinkeländerungen eines einfachen Fachwerkes (Fig. 89) zu zeigen, wird es genügen den analytischen Ausdruck für $E\Delta\tau_m$ anzuschreiben. Dreieckswinkel und die berechneten Stabspannungen σ sind in beliebiger Reihenfolge in der Figur angeschrieben. Wird der *innere* Randwinkel des Knotens m mit τ_m bezeichnet, so erhält man

$$E(\Delta\alpha_2+\Delta\alpha_4+\Delta\alpha_7)=E\Delta\tau_m=(\sigma_1-\sigma_3)\operatorname{cotg}\alpha_3-(\sigma_1-\sigma_2)\operatorname{cotg}\alpha_1$$
$$+(\sigma_4-\sigma_5)\operatorname{cotg}\alpha_6-(\sigma_4-\sigma_3)\operatorname{cotg}\alpha_5 \quad (101)$$
$$+(\sigma_7-\sigma_5)\operatorname{cotg}\alpha_8-(\sigma_7-\sigma_6)\operatorname{cotg}\alpha_9.$$

Die Winkel der cotg sind immer zwischen den zugehörigen σ *eingeschlossen*. Auf die richtige Einstellung der *Vorzeichen* der cotg ist zu

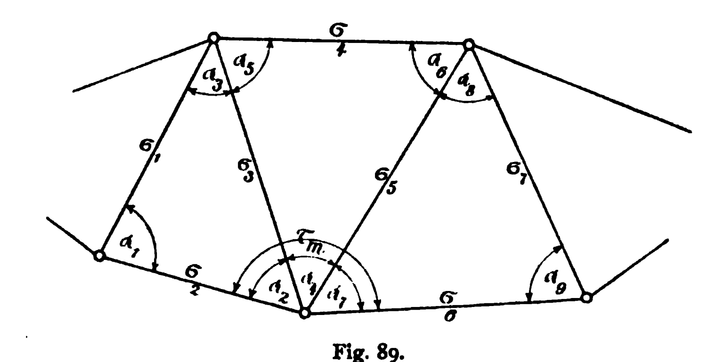


Fig. 89.

achten. Führt man den nach Gl. (101) berechneten Wert von $E\Delta\tau_m$ in Gl. (92) ein, so ist dessen Vorzeichen umzukehren. Das gibt

$$Ew_m = \sigma_{m+1}\operatorname{tg}\varphi_{m+1} - \sigma_m\operatorname{tg}\varphi_m - E\Delta\tau_m. \qquad (102)$$

Mit Hilfe der Gl. (101) und (102) läßt sich, unter Beachtung der entsprechenden Vorzeichen für τ und φ, die Biegelinie für einen *Gurtstabzug* (Obergurt oder Untergurt) darstellen. Dabei ist das Krafteck der elastischen Kräfte (nach **16**) für die Polweite »*Eins*« zu zeichnen. Zeichnet man die w_m um Emal größer als sie wirklich sind, so ist die Polweite gleich »E« zu machen.

c. Bedeutung der Winkel zwischen der Schlußlinie und einer Seite der Biegefläche. Fig. 90 stelle eine Biegefläche dar, die mit wagerechter Schlußlinie ab und einem Pole H_w = »Eins« gezeichnet ist (Fig. 91). Dann läßt sich die trigonometrische Tangente jedes der Winkel α, β, γ und δ durch eine zugehörige *Balkenquerkraft* Q_w

ausdrücken: Bezeichnet man die durch die elastischen Kräfte verursachten Stützenkräfte mit

$$A_w \text{ und } B_w,$$

so erhält man aus der Ähnlichkeit der Dreiecke acc' und Osa' die Bedingung

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_w}{1} = A_w.$$

Ebenso erhält man aus der Ähnlichkeit der Dreiecke bnn' und Osb'

$$-\operatorname{tg}\beta = \frac{B_w}{1} = B_w.$$

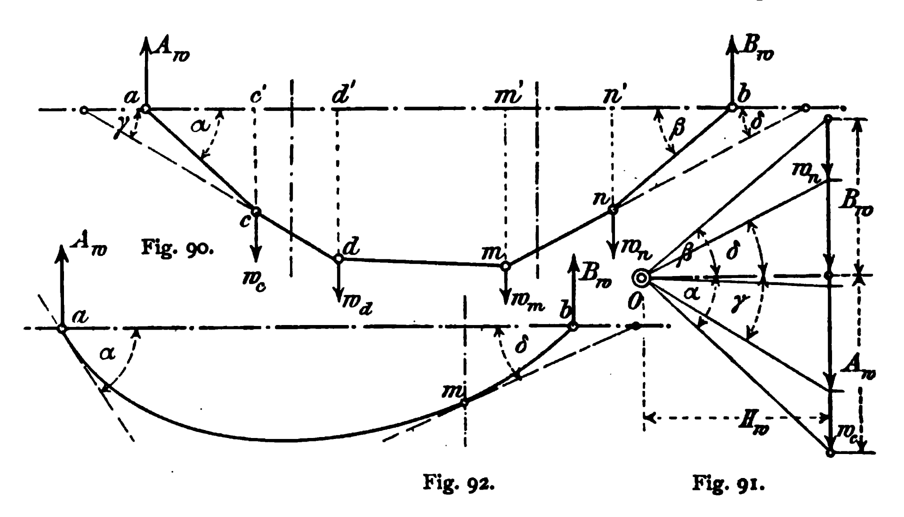
Ferner ist anzuschreiben

$$\operatorname{tg}\gamma = A_w - w_c = Q_{wc}$$

und

$$-\operatorname{tg}\delta = B_w - w_n = Q_{wn},$$

wenn Q_{wc} und Q_{wn} die zugehörigen »*elastischen Querkräfte*« in den Schnitten zwischen c und d oder m und n bedeuten. Für praktische



Aufgaben darf man die trigonometrischen Tangenten der Winkel (wegen ihrer großen Kleinheit) mit den Winkeln selbst vertauschen. Das gibt die Gleichungen

$$\alpha = A_w\ ;\quad \beta = B_w$$
$$\gamma = Q_{wc};\quad \delta = Q_{wn}. \qquad (103)$$

Die gleichen Beziehungen zwischen Tangentenwinkeln und elastischen Kräften w bestehen für *stetige* Belastung (Fig. 92). Daraus folgt allgemein der Satz:

Der Winkel, den eine Tangente im beliebigen Punkte m einer elastischen Linie (oder eine Seite mn einer Biegelinie) mit der Wagerechten einschließt, ist gleich der Querkraft, die von den elastischen Kräften w im lotrechten Schnitte durch m (oder mn) erzeugt wird.

Die äußern Kräfte A_w, B_w oder Q_w sollen weiterhin kurzweg als »*elastische Stützenkräfte*« oder »elastische *Querkräfte*« bezeichnet werden.

19. Beispiele der Biegelinien von Stabzügen.

a. Biegelinie eines Wandstabzuges.

1. Die gesuchte Biegelinie läßt sich erklären *als diejenige Biegelinie, welche die Senkungen aller Knotenpunkte eines Fachwerkes enthält.* Um sie zu finden betrachten wir zunächst eins der Stabdreiecke mit den Knoten l, m und n (Fig. 93).

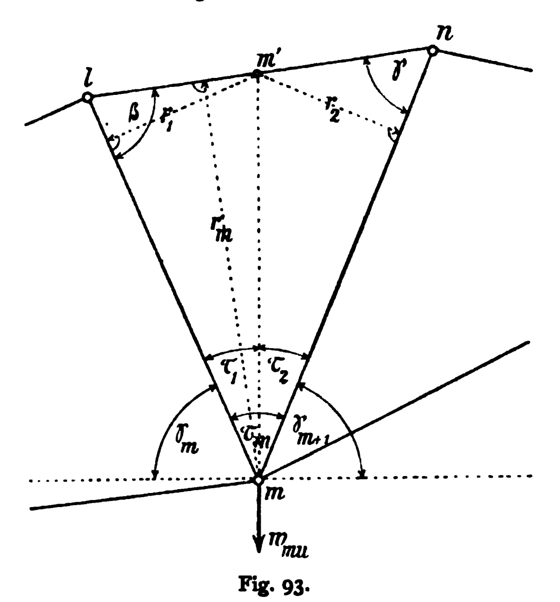


Fig. 93.

Die Längen der Wandstäbe $\overline{lm}$ und $\overline{mn}$ seien (wie unter a) gleich s_m und s_{m+1}; der *innerhalb* des Fachwerks liegende *Randwinkel* des Wandstabzuges in m heiße (wie früher) τ_m. Dann ergibt sich die elastische Kraft w_{mu} für den *Untergurt*knoten m (Fig. 93) aus der Gl. (102) mit

$$w_{mu} = -\Delta\tau_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg}\gamma_{m+1} + \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg}\gamma_m .$$

Bezeichnet man jetzt die Längenänderung des dem Knoten m gegenüberliegenden Obergurtstabes $\overline{ln}$ mit Δo_m, so erhält man aus der Gl. (96)

$$\Delta\tau_m = \frac{\Delta o_m}{r_m} - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{cotg}\gamma - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{cotg}\beta .$$

Führt man außerdem für die Ergänzungen der Winkel γ_m und γ_{m+1} zu 90° (Fig. 93) die Werte τ_1 und τ_2 ein, so daß

$$\operatorname{tg}\gamma_m = \operatorname{cotg}\tau_1$$
$$\operatorname{tg}\gamma_{m+1} = \operatorname{cotg}\tau_2$$

zu schreiben ist, so gibt das

$$w_{mu} = -\frac{\varDelta o_m}{r_m} + \frac{\varDelta s_m}{s_m}(\operatorname{cotg}\tau_1 + \operatorname{cotg}\beta) + \frac{\varDelta s_{m+1}}{s_{m+1}}(\operatorname{cotg}\tau_2 + \operatorname{cotg}\gamma).$$

Der gewonnene Ausdruck läßt sich noch sehr vereinfachen. Zu diesem Zwecke zieht LAND vom Schnittpunkte m' der Lotrechten durch m und des Obergurtstabes $\overline{ln}$ zwei Senkrechte: die eine $r_1 \perp \overline{lm}$, der andere $r_2 \perp \overline{mn}$ und es ist geometrisch

$$s_m = r_1(\operatorname{cotg}\tau_1 + \operatorname{cotg}\beta),$$
$$s_{m+1} = r_2(\operatorname{cotg}\tau_2 + \operatorname{cotg}\gamma).$$

Setzt man dies in obige Gleichung ein, so erhält man schließlich für *eine elastische Kraft des Untergurtes*

$$w_{mu} = -\frac{\varDelta o_m}{r_m} + \frac{\varDelta s_m}{r_1} + \frac{\varDelta s_{m+1}}{r_2}. \tag{104}$$

Und für *eine elastische Kraft des Obergurtes* erhält man nach obigem ohne weiteres

$$w_{mo} = +\frac{\varDelta u_m}{r_m} - \frac{\varDelta s_m}{r_1} - \frac{\varDelta s_{m+1}}{r_2}. \tag{105}$$

Sobald danach die Stablängenänderungen gegeben sind, können die elastischen Kräfte für jeden Obergurt- und Untergurtknoten berechnet und in entsprechender Reihenfolge zum Krafteck zusammengesetzt werden. Das dazu mit der Polweite »Eins« gezeichnete Seileck gibt die Senkungen aller Fachwerksknoten an. Es ist also die *Biegelinie des Wandstabzuges.*

b. Biegelinien für eine beliebige, nicht lotrechte Verschiebungsrichtung.

1. Die von MOHR der Berechnung der elastischen Kräfte zugrunde gelegte Arbeitsgleichung (**15**)

$$\bar{1} \cdot y = \bar{S}\varDelta s$$

gilt auch für eine *nicht* lotrechte Verschiebung y und wenn man den frühern Gang der Rechnung verfolgt, so überzeugt man sich leicht davon, *wie deshalb die Größe einer elastischen Kraft w unabhängig von der gewählten Verschiebungsrichtung ist.* Denn in jedem Falle erhält man die allgemeine Beziehung

$$w = \frac{\varDelta s}{r},$$

worin $\frac{\varDelta s}{r}$ eine *Winkeländerung* des Fachwerkes vorstellt, die allein von der gegebenen Formänderung abhängig ist, gleichviel aus welcher Ursache diese herrührt.

Will man nun eine Biegelinie darstellen, aus welcher alle in einer bestimmten Richtung erfolgten Verschiebungen zu entnehmen sind, so kann man dabei von der für lotrechte Verschiebungen geltenden Biegelinie ausgehen. Wir wollen zeigen, wie man auf solchem Wege z. B. eine sog. *wagerechte Biegelinie* findet, d. h. also eine solche, aus welcher alle wagerechten Knotenverschiebungen entnommen werden können. Es wird sich dann auch zeigen, wie man eine solche Biegelinie unmittelbar darstellt.

Rechnet man wagerechte Verschiebungen nach rechts *positiv*, so wirken auch die positiven w nach rechts, negative nach links. Das zur wagerechten Biegelinie gehörige Krafteck ergibt sich aus dem für lotrechte w gezeichneten durch Drehung um 90^0 nach links. Die entsprechenden Seiten der beiden Seilecke stehen demnach senkrecht aufeinander, ebenso die durch den Stützpunkt a des festen Gelenkes verlaufenden Schlußlinien beider Gebilde[1]. Der Stützpunkt b des Fachwerks sei vorläufig (wie früher) *wagerecht* beweglich, so daß das Fachwerk als Balkenfachwerk anzusprechen ist.

In den Fig. 94—97 ist als Beispiel die wagerechte Biegelinie für den *Obergurt* eines Sichelfachwerks dargestellt. Fig. 95 stellt die lotrechte, Fig. 97 die wagerechte Biegelinie dar, Fig. 96 das für beide benutzte Krafteck der lotrecht gerichteten w. Mit *roten* Linien ist schließlich noch angegeben, wie man die beiden Schlußlinien der Biegelinien findet, wenn sich der Stützpunkt b *auf einer schrägen Gleitbahn verschiebt.*

Man hat beim Zeichnen der Seilecke wohl zu beachten, daß die *Reihenfolge* der elastischen Kräfte, so wie sie durch die Knotennummern angegeben wird, innegehalten wird. Ist b''_0 die wagerechte Projektion des Stützpunktes b auf die durch a'' verlaufende (zur Schlußlinie $a'b'$ senkrecht stehende) Schlußlinie $a''s''$, so ist die wagerechte Verschiebung des Stützpunktes b gleich $b''_0—b''$, ferner die Verschiebung des Knotens 4 gleich $4''_0—4''$.

Ist die Gleitbahn des Punktes b in der Geraden $\overline{gg}$ (Fig. 94) *geneigt* (was mit *roten* Linien dargestellt ist), so findet man die zugehörige wagerechte Verschiebung wie folgt: Man ziehe zur $\overline{bg}$ eine Parallele g_0 durch den Punkt b''_0 (Fig. 97); ferner durch b'' eine Senkrechte zur Stützpunktlinie $\overline{ab}$, welche die vorige Parallele im Punkte g''_0 schneiden möge. Dann ist die *lotrechte* Projektion der Senkrechten $b''g''_0$ gleich

[1] Vgl. dazu LAND, Die Formänderungen ebener elastischer Gebilde usw. Zeitschr. d. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1888, S. 175.

der lotrechten Verschiebung δ'_b des Stützpunktes b nach ***aufwärts.*** Macht man deshalb in der lotrechten Biegefläche (Fig. 95) $b'g' = \delta'_b$ (*abwärts*),

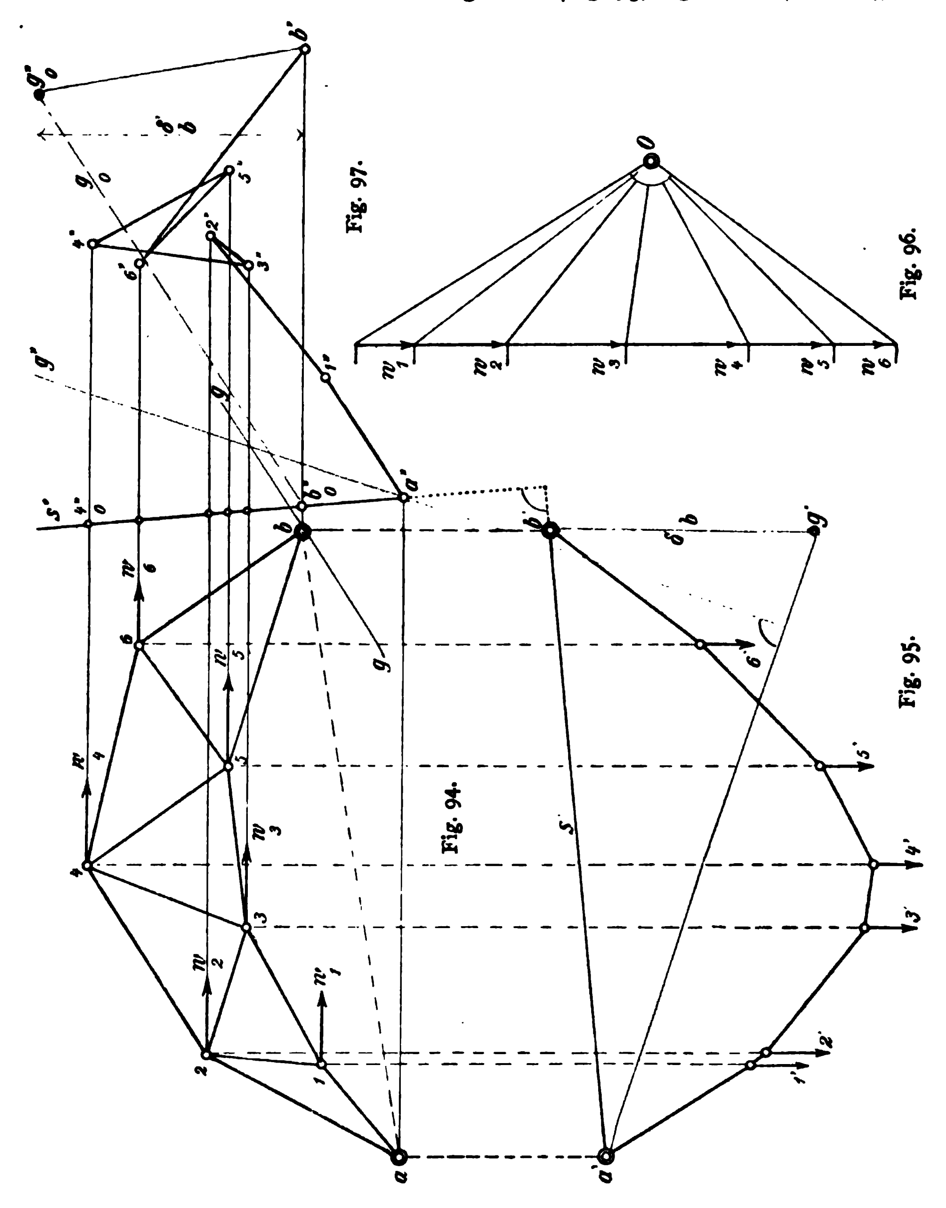


Fig. 94. Fig. 95. Fig. 96. Fig. 97.

so ist $a'g'$ ihre Schlußlinie und somit ist die *Schlußlinie der wagerechten Biegefläche* eine durch a'' zur $a'g'$ gezogene Senkrechte $a''g''$.

Liegen Stäbe des betrachteten Gurtes *wagerecht*, so muß in der wagerechten Biegelinie der wagerechte Abstand der Endpunkte eines solchen Stabes gleich seiner Längenänderung Δs sein. Diese Beziehung kann man auch umgekehrt zur *Darstellung* der wagerechten Biegelinie benutzen.

Sucht man nicht die Biegelinie für lotrechte und wagerechte Verschiebungen, sondern in beliebigen Richtungen, die den Winkel ψ miteinander einschließen, so hat man auch die Kräfte w in diesen Richtungen anzunehmen. Aus entsprechenden Betrachtungen ergibt sich dann, wie auch in diesem allgemeinen Falle die beiden Schlußlinien den Winkel ψ miteinander bilden müssen.

2. Wenn man die Verschiebung δ_a und δ_b eines Stützpunktes a oder b eines Balkenträgers in der Richtung der $\overline{ab}$ *rechnerisch* mit Hilfe der elastischen Kräfte w bestimmen will, so hat man die w parallel zur $\overline{ab}$ wirkend zu denken und erhält dann z. B. für δ_b den Ausdruck

$$\delta_b = \sum wy,$$

wenn y den Hebelarm einer w-Kraft in Bezug auf die $\overline{ab}$ bezeichnet. Denn die Summe der statischen Momente wy ist bekanntlich (nach I. **60**—**61**) gleich der von den äußern Seileckseiten der Biegelinie (Fig. 97) auf der $\overline{ab}$ abgeschnittenen Strecke, vorausgesetzt daß die Polweite des zugehörigen Kraftecks gleich »Eins« war. Ist die Polweite gleich H_w, so ist

$$\delta = \frac{\sum wy}{H_w}$$

anzuschreiben.

In ähnlicher Weise kann man auch irgend eine zur Abzisse a gehörige Ordinate η einer lotrechten Biegelinie rechnerisch darstellen. Man erhält

$$\eta = A_w \cdot a - \sum_0^a w(a-x) = \frac{a}{l}\sum_0^l w(l-x) - \sum_0^a w(a-x).$$

20. Verschiebungspläne für einfache Fachwerke.

a. Das Formänderungsbild eines Dreieckstabwerkes.

1. Wir betrachten zuerst ein beliebig belastetes, im Gleichgewichte befindliches Stabwerk, ohne Rücksicht auf die Art seiner Stützung. Nach erfolgter Formänderung erscheinen nach unsern Voraussetzungen (**15**, a) alle Dreiecke des Stabwerks wieder als Dreiecke. Das Formänderungsbild irgend eines Dreiecks ist daher durch die Lage von zwei seiner Knoten gegeben und dadurch ist auch das Bild der Formänderung des ganzen

Stabwerks bestimmt. Danach vollzieht sich die Darstellung eines Verschiebungsplanes wie folgt: *Aus den gegebenen Verschiebungen der Knoten m und n irgend eines Dreiecks bestimme man die Verschiebung des Knotens o. Dadurch sind die Verschiebungen der Knoten l und p der beiden angrenzenden Dreiecke des Stabwerks gegeben, und so fort* (Fig. 98). Damit ist die Darstellung eines Verschiebungsplanes auf folgende *Grundaufgabe* zurückgeführt:

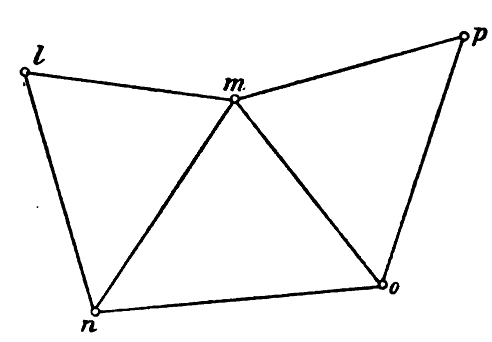


Fig. 98.

Gegeben zwei im Knoten 2 zusammenstoßende Stäbe 1—2 und 2—3. Beide ändern

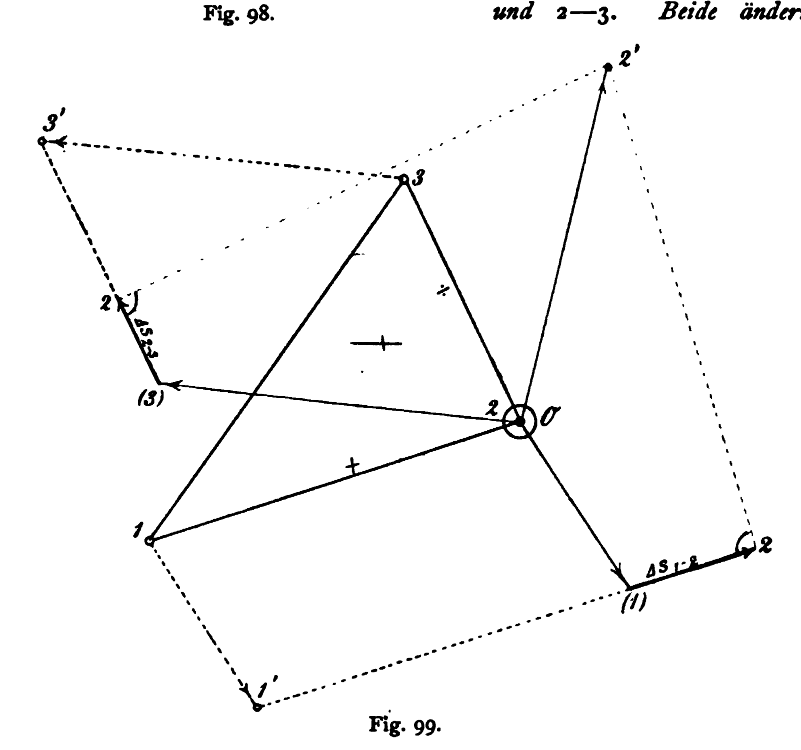


Fig. 99.

elastisch ihre Länge und dabei schiebt sich Knoten 1 *nach* 1', *sowie Knoten* 3 *nach* 3'. *Wohin gelangt der Knoten* 2?

Die gegebenen Verschiebungen 1—1' und 3—3' der Knoten 1 und 3 sind in der Fig. 99 eingezeichnet. Man denke sich jetzt die Bewegung

jedes der beiden Stäbe 1—2 und 2—3 in eine fortschreitende und eine Drehbewegung zerlegt. Während der fortschreitenden Bewegung verschiebt sich jeder Stab parallel zu sich selbst. Dabei ändert er elastisch seine Länge, wie dies in der Fig. 99 durch Eintragen der Strecken Δs_{1-2} und Δs_{2-3} veranschaulicht ist. 1′ und 3′ sind die während der Formänderung eingenommenen *endgültigen Lagen* der Knoten 1 und 3. Würde man nun um diese Festpunkte, mit den Stablängen 1′—2 und 3′—2, je einen Kreisbogen schlagen, so gäbe deren Schnittpunkt den vom Knoten 2 nach erfolgter Formänderung des Dreiecks eingenommenen Ort 2′ an. Weil aber die elastischen Längenänderungen Δs sehr kleine (als differential geltende) Größen sind, so genügt es für praktische Aufgaben, wenn man die beiden Kreisbogen durch zwei Gerade ersetzt, die senkrecht zu den betreffenden Stabrichtungen (1—2 und 2—3) stehen. Diese Geraden tragen in der Fig. 99 beide die Bezeichnung 2—2′.

Mit Bezug auf die in der Figur mit roter Farbe ausgezeichneten notwendigen Darstellungslinien ist danach die *Lösung* der gestellten Grundaufgabe wie folgt zu fassen:

Von einem beliebigen Pole O aus lege man die gegebenen Verschiebungen der Knoten 1 *und* 3 *als Strecken O*—(1) *und O*—(3) *nach Größe und Richtung fest. An die Enden* (1) *und* (3) *dieser Strecken trage man in den betreffenden Stabrichtungen die Längenänderungen* Δs_{1-2} *und* Δs_{2-3}. *Man gewinnt dann zwei Punkte* 2, *in denen auf die Stabrichtungen je eine Senkrechte zu fällen ist. Deren Schnittpunkt* 2′ *gibt den gesuchten Ort der Verschiebung des Knotens* 2 *und der Polstrahl O*—2′ *stellt deren Größe und Richtung dar.*

Durch wiederholte Anwendung der gegebenen Lösung der Grundaufgabe läßt sich jeder Verschiebungsplan zeichnen. Das soll an einem allgemeinen Beispiel gezeigt werden.

2. Für das in der Fig. 100 dargestellte Stabwerk sind die Stabkräfte und daraus die elastischen Änderungen der Stablängen berechnet worden. Die eingeschriebenen Vorzeichen geben den Sinn der zugehörigen Stabkräfte an. Um die Verschiebungen eines der Dreiecke zeichnen zu können schreibt man am einfachsten irgend einem Knoten die Verschiebung »Null« zu und nimmt die Richtung eines der von diesem Knoten ausgehenden Stäbe während der Formänderung als unveränderlich an. Dann sind zwei Verschiebungen eines Stabes gegeben und somit liegt der ganze Verschiebungsplan des Stabwerks fest.

Wir nehmen den Knoten 3 als unverschieblich und die Stabrichtung 3—4 als unveränderlich an. Daher ist der Pol O (Fig. 101) des Planes mit »3′« zu beschreiben, damit (wie angenommen) der Pohlstrahl O — 3′

verschwindet, d. h. die Verschiebung des Knotens 3 gleich Null ausfällt. Der Punkt 4′ ist unmittelbar nach erfolgtem Auftragen der Strecke $O—4' = \Delta s_{3-4}$ gegeben, weil eine Drehung des Stabes 3—4 nicht vorausgesetzt wurde. Durch Auftragen der Verschiebungen 3′—5 und 4′—5,

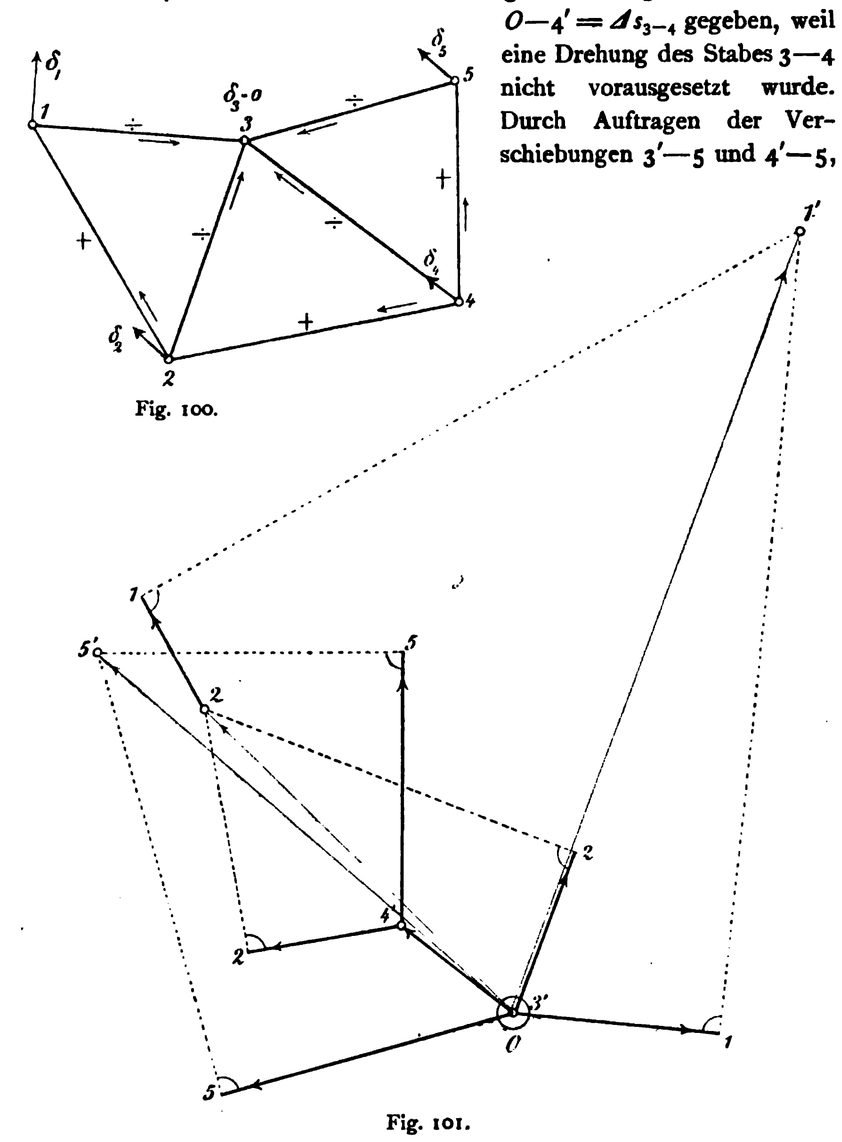


Fig. 100.

Fig. 101.

von 3′ und 4′ aus, erhält man zwei Punkte 5. In diesen ist je eine Senkrechte zu den betreffenden Stabrichtungen (3—5 und 4—5) zu fällen. Deren Schnittpunkt gibt 5′ und damit auch den Strahl $O—5'$,

d. h. Größe und Richtung der Verschiebung des Knotens 5. Auf gleiche Art erhält man die beiden Punkte 2 und daraus 2', sowie schließlich die beiden Punkte 1 und den letzten Punkt 1' des Verschiebungsplanes. *Damit ist das Formänderungsbild des Stabwerkes gegeben, wenn auch noch nicht in derjenigen Lage, in welcher es bei gegebenen Stützenbedingungen erscheinen würde.* Der ohne Rücksicht auf diese Bedingungen gezeichnete Plan heißt deshalb *der erste Verschiebungsplan*, um anzudeuten, daß zur völligen Festlegung der wirklichen Lage eines *gestützten* Fachwerks noch der sog. *zweite Verschiebungsplan* anzugeben ist (vgl. hierüber auch I. **81**).

b. Darstellung des zweiten Verschiebungsplanes.

1. Die Darstellung beginnt mit der Feststellung des *ersten* Planes, ohne Rücksicht auf die Stützenbedingungen. Diese schreiben in der Regel vor, daß *ein* Stützpunkt während der Formänderung *in unveränderter Lage* bleibt. Wenn man will, kann man eine solche Bedingung schon gleich im ersten Plane erfüllen, indem man den Pol O (Fig. 102) mit a' beschreibt, wenn a der erwähnte Stützpunkt ist. Dann ist a' zugleich ein Punkt des zweiten Planes und deshalb auch noch mit a'' zu beschreiben. Hat man aber nicht a sondern einen beliebigen andern Knoten im ersten Plane festgehalten gedacht, so wird darin der Strahl $O—a'$ als Verschiebung von a erscheinen. Die *wirkliche* Verschiebung von a ist aber Null. Um deshalb den Punkt a' des Formänderungsbildes mit a zusammenfallen zu lassen, muß man das Bild nochmals verschoben denken. Das geschieht am einfachsten durch eine augenblickliche Drehung um einen Pol, wobei die zweite Verschiebung von a gleich groß aber entgegengesetzt der ersten Verschiebung $O—a'$ ausfallen muß, wie dies in der Fig. 102 durch die beiden Pfeile angedeutet ist. Um dies im Plane deutlich zu machen, bezeichnet man den Punkt a' auch noch als a''. Somit ist zu sehen, wie sich die Verschiebungen $O—a''$ und $O—a'$ gegenseitig zu Null aufheben. D. h. die *wirkliche Verschiebung* von a ist gleich dem Abstande $a'—a''$ oder gleich Null.

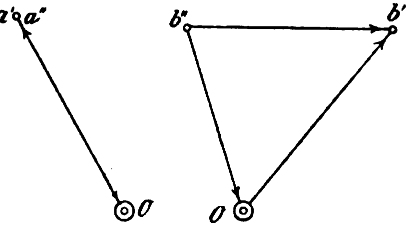


Fig. 102. Fig. 103.

In der nämlichen Weise kann man, um die wirkliche Verschiebung $b'—b''$ zu erhalten, die erste Verschiebung $O—b'$ eines *beweglichen* Stützpunktes mit einer augenblicklichen Drehung des Formänderungsbildes verbinden, wobei der Punkt b' die Verschiebung $O—b''$ ausführt (Fig. 103). b'' ist hier ein Punkt des zweiten Planes. Um die

übrigen Punkte dieses Planes zu erhalten wird man danach deren erste Verschiebungen $O—m'$ je mit einer augenblicklichen Drehbewegung $O—m''$ zusammensetzen, um dadurch die wirkliche Verschiebung $m'—m''$ irgend eines Punktes m festzulegen.

Es wird nun noch zu zeigen sein, wie man in einem gegebenen Falle aus dem Fachwerksbilde den zweiten Plan erhält.

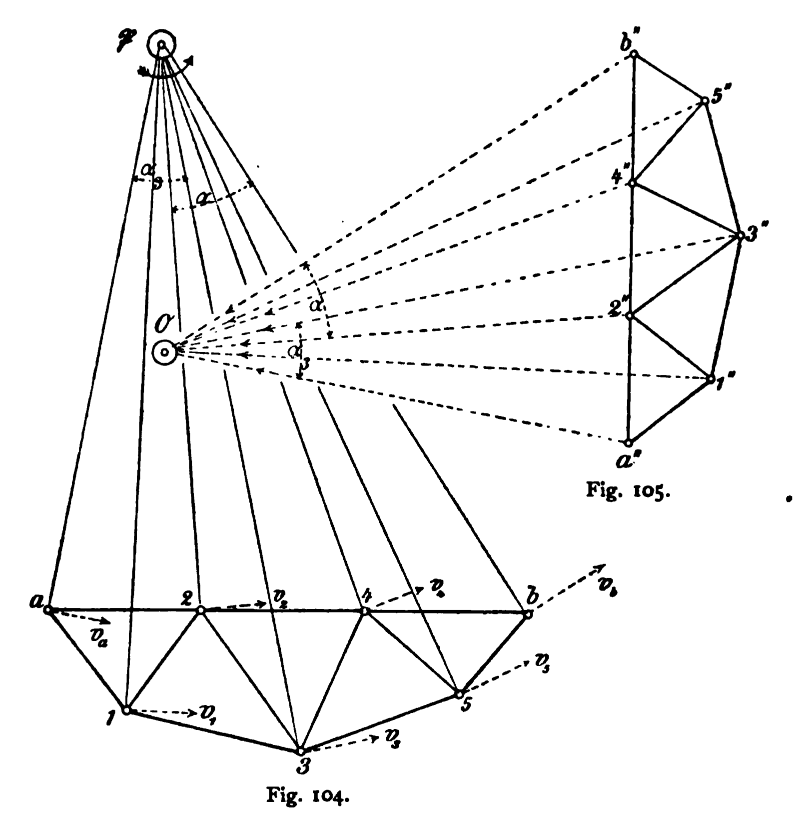


Fig. 105.

Fig. 104.

2. Es sei $\mathfrak{P}$ der Pol, um welchen die Fachwerksscheibe (Fig. 104), den Stützenbedingungen entsprechend, gedreht werden muß. Dann sind die augenblicklichen Verschiebungen v_a, v_1 bis v_b der Fachwerksknoten den betreffenden Polhalbmessern proportional. Trägt man deshalb diese Verschiebungen, nach ihrer Richtung und Größe, als Strahlen auf, die vom Pol des ersten Verschiebungsplanes auslaufen (Fig. 105), so bilden die Punkte a'', $1''$, $2''$ bis b'' Knotenpunkte einer dem gegebenen Fachwerksbilde *ähnlichen* Figur. Das folgt aus den Proportionen

$$\mathfrak{P}—a : \mathfrak{P}—1 : \mathfrak{P}—2 : \cdots : \mathfrak{P}—b = O—a'' : O—1'' : O—2'' : \cdots : O—b''$$

und der Gleichheit der Winkel α zwischen je zwei Polhalbmessern und je zwei der zugehörigen, von O aufgetragenenen Verschiebungsstrecken. Und weil diese *senkrecht* zu den betreffenden Polhalbmessern stehen, so müssen auch alle Seiten der dem Fachwerksbilde ähnlichen Figur senkrecht zu den betreffenden Stabrichtungen des Fachwerks stehen. Danach läßt sich das Wesentliche in der Darstellung des zweiten Verschiebungsplanes in folgende Sätze fassen:

Die vom Pole O des ersten Verschiebungsplanes nach ihrer Richtung und Größe aufgetragenen zweiten Verschiebungen $O—m''$ bilden zusammen, mit der durch deren Endpunkte m'' festgelegten, dem Fachwerksbilde ähnlichen Verschiebungsfigur, den sog. Verschiebungsplan.

Sobald durch die Stützenbedingungen die zweiten Verschiebungen $O—a''$ $O—b''$ festgelegt sind, läßt sich die ähnliche Verschiebungsfigur, deren Seiten jedem senkrecht zu den betreffenden Stabrichtungen des Fachwerks stehen, zeichnen. Damit sind für alle Fachwerkspunkte die zweiten Verschiebungen gegeben und aus deren Verbindung mit den zugehörigen Verschiebungen $O—m'$ des ersten Planes erhält man jede gesuchte wirkliche Verschiebung $m''—m'$. Dabei ist jede erste Verschiebung vom Pole O nach auswärts gerichtet, während jede zweite Verschiebung ihren Pfeil dem Pole zukehrt. Denn in jedem Verschiebungsdreieck richtet sich die wirkliche Verschiebung $m''—m'$ dem Zuge ihrer beiden Seitenverschiebungen entgegen.

21. Übungsaufgaben.

a. Einfacher Parallelträger.

Aufgabe 35. *Der Verschiebungsplan für den* (unter **17**, a) *schon einmal betrachteten Parallelträger mit Strebenfachwerk ist zu zeichnen.*

Stabkräfte (vgl. den Kräfteplan unter **22**, b, Fig. 117) sowie *Vorzeichen und Größe der Stablängenänderungen* sind in der Fig. 106 eingeschrieben.

Fig. 108 gibt *den ersten und zweiten Plan.* Dabei wurde Knoten 6 und die Stabrichtung 6—4 festgehalten gedacht. Pol O fällt danach mit $6'$ und $6''$ zusammen. Von den beiden Punkten b des ersten Planes wurden je eine Senkrechte zu den Verschiebungen $8'—b$ und $9'—b$ gezogen. Ihr Schnittpunkt gibt den Punkt b' des ersten Planes, zugleich aber — weil b ein fester Stützpunkt ist — auch den Punkt b'' des zweiten Planes. Der noch nötige zweite Punkt des zweiten Planes folgte aus der Stützenbedingung bei a, wonach a sich in einer Wagerechten verschiebt. Eine Wagerechte durch a' des ersten Planes trifft die durch b'' gelegte Lotrechte in a''. Durch b'' und a'' ist der zweite Plan gegeben.

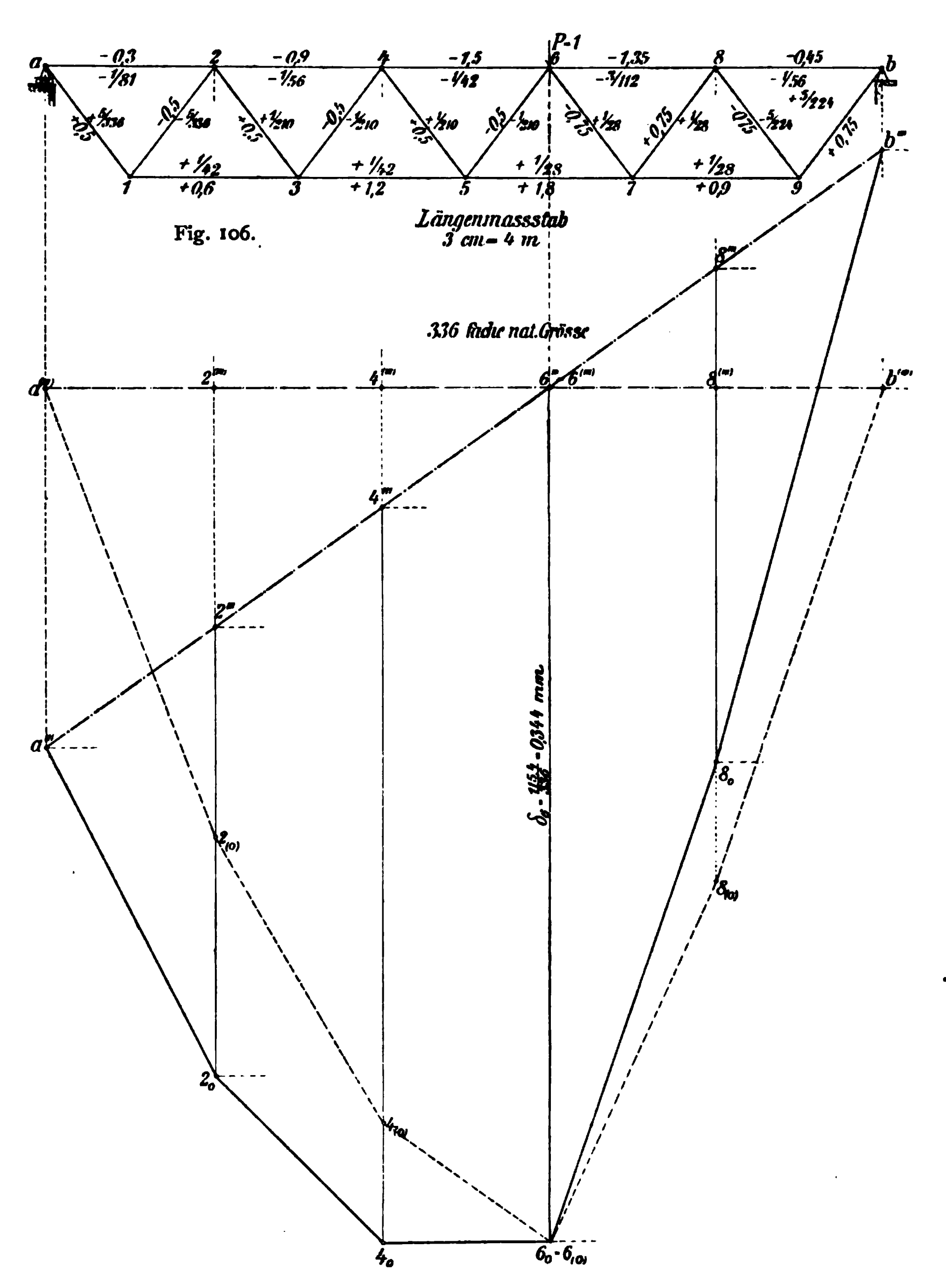


Fig. 106.

Fig. 107.

In Fig. 107 wurde darauf *die Biegefläche des Lastgurtes* dargestellt. Ihre schräge Schlußlinie a'''—b''' findet man durch die Schnittpunkte a''' und b''' der lotrechten und wagerechten Projektionen der Punkte a, b und b'', a''. Ebenso ergeben sich die Eckpunkte 2_0 bis 8_0 der Biegelinie aus den betreffenden lotrechten Projektionen der Knoten 2 bis 8 und den wagerechten Projektionen der Punkte $2''$ bis $8''$ des zweiten Planes. Die gesuchte Durchbiegung des Knotens 6 stellte sich dabei auf 0,344 mm. Früher (in der Aufgabe 33 unter **17**) war rechnerisch 0,388 mm gefunden worden.

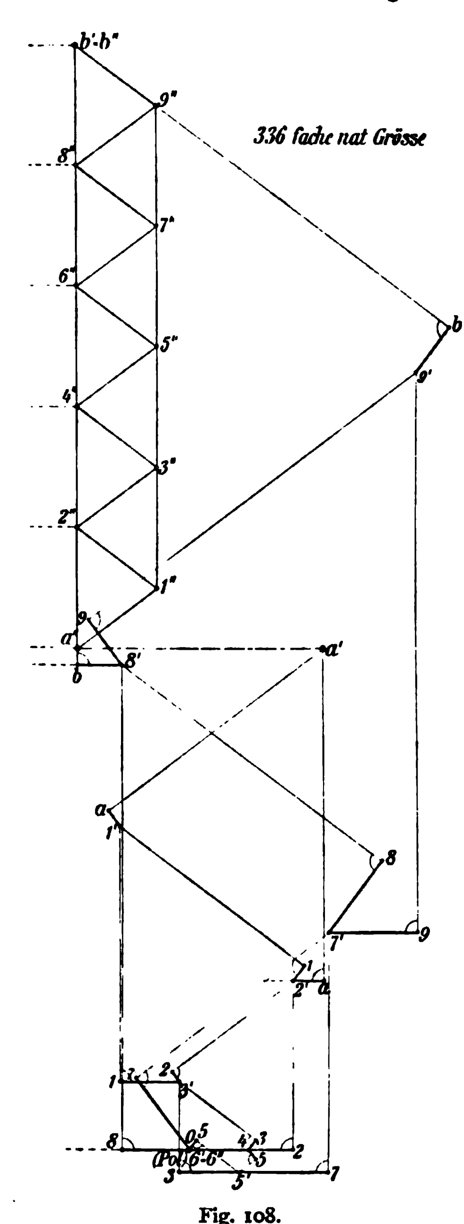


Fig. 108.

Schließlich ist in der Fig. 107 die Biegelinie noch auf eine wagerechte Schlußlinie $a^{('''')}$—$b^{('''')}$ bezogen worden.

b. Dachbinder auf drei Stützen.

Aufgabe 36. *Für den in der* Fig. 109 *dargestellten, durch drei (als starr anzusehende) Stützenstäbe an die Erde geschlossenen Dachbinder soll ein Verschiebungsplan gezeichnet werden.*

Die von irgend einer Belastung verursachten Stablängenänderungen sind ihrem Sinne nach in der Fig. 109 eingeschrieben. In Fig. 110 ist der erste Plan mit schwarzer, der zweite Plan mit roter Farbe ausgezogen. Im ersten Plane ist Knoten 3 mit der Richtung 3—2 festliegend gedacht worden, Pol O und $3'$ fallen also

zusammen. Die Punkte 1′ bis 5′ des ersten Planes fanden sich in bekannter Weise. Für die Darstellung des zweiten Planes sind folgende Bedingungen gegeben:

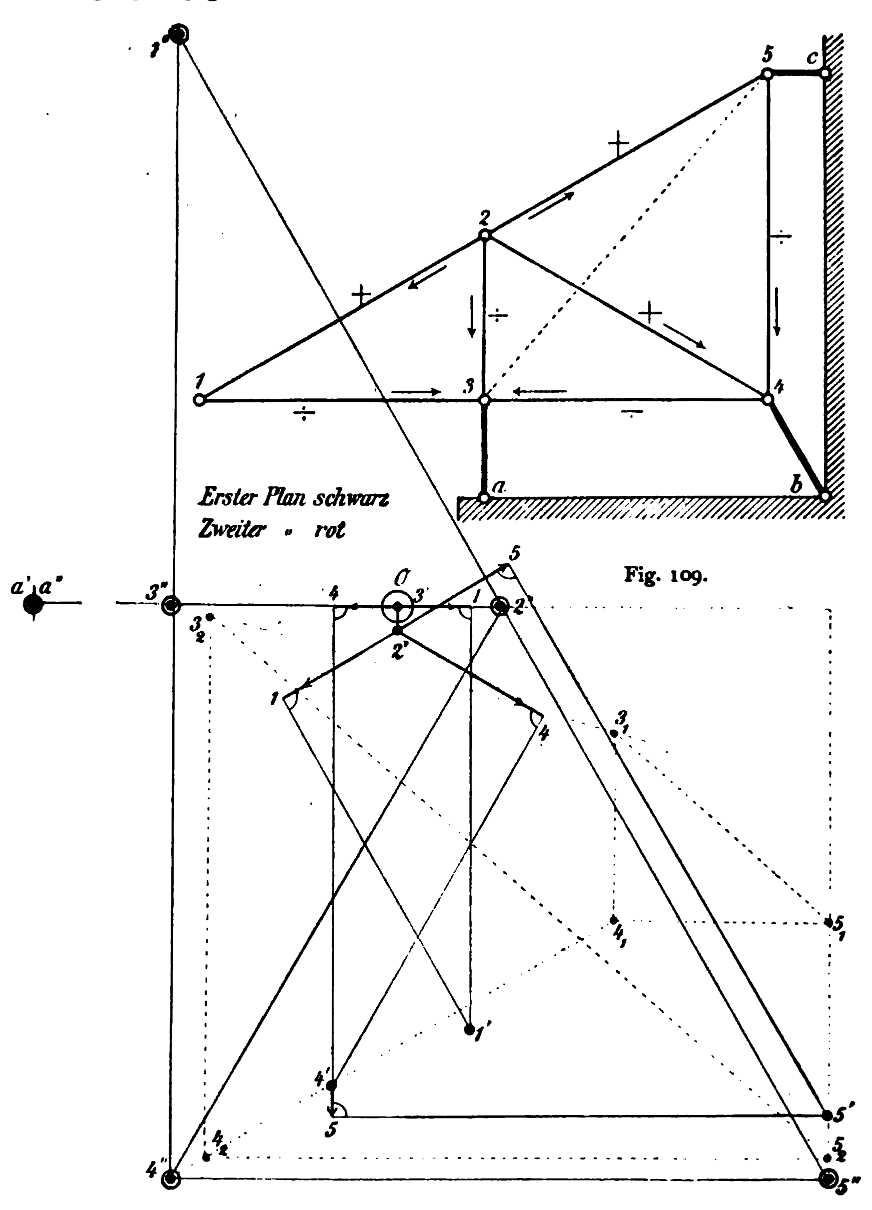


Fig. 109.

Fig. 110.

1. *Die Punkte* $3''$, $4''$ *und* $5''$ *fallen je in eine Gerade, die senkrecht zur Richtung des zugehörigen Stützenstabes steht.*

2. *Die Punkte* $3''$, $4''$ *und* $5''$ *bilden Eckpunkte eines Dreiecks* $3''$—$4''$—$5''$, *das dem Dreieck* 3—4—5 *des Fachwerks ähnlich, dabei aber gegen dieses um* 90^0 *verdreht ist.*

Daraus folgt der zweite Plan: Die beiden Dreiecke 3_1—4_1—5_1 und 3_2—4_2—5_2 sind in der erwähnten Verdrehung an beliebiger Stelle derart gezeichnet, daß ihre Eckpunkte 4_1, 5_1 und 4_2, 5_2 in die betreffenden gegebenen Richtungen $4'$—$4''$ und $5'$—$5''$ fallen. Nach bekanntem Satze (I. **82**, b) muß daher der gesuchte Punkt $3''$ im Schnitte der Richtungen 3_1—3_2 und $3'$—$3''$ liegen. Damit sind auch die Punkte $4''$ und $5''$ des zweiten Planes gefunden.

Wenn zufällig die Stützpunkte 3, 4, 5 nicht Eckpunkte eines Dreiecks gewesen wären, sondern alle drei in einer Geraden lägen, so ändert sich an der ausgeführten Lösung im allgemeinen nichts. In diesem Falle stünde die Gerade $3''$—$4''$—$5''$ senkrecht zur Geraden 3—4—5 und beide würden proportionale Teilung zeigen.

Der Fall, daß die drei Stützenstabrichtungen sich in einem Punkte (auch wenn dieser unendlich fern liegt) schneiden, ist (nach I. **22**) ausgeschlossen.

22. Verschiebungspläne für zusammengesetzte Fachwerke.

a. Ihre Darstellung im allgemeinen.

1. Zusammengesetzte Fachwerke bestehen aus mehreren Scheiben, die durch Zwischengelenke vereinigt und durch Stützenstäbe an die Erde geschlossen sind (I. **31** und II. § 4—5). Dabei müssen von jeder Scheibe mindestens drei Stäbe ausgehen. Auch kann an Stelle eines Zwischengelenkes eine einstäbige Verbindung eingelegt werden.

Man zeichnet hier für jede Scheibe einen besondern *ersten* Verschiebungsplan. Sodann stellt man, von der ersten und letzten Scheibe anfangend, für jede Scheibe den *zweiten* Verschiebungsplan fest. Liefern dabei die Stützenbedingungen der ersten Scheibe gleich *zwei Punkte* der dieser Scheibe ähnlichen Verschiebungsfigur, so ist damit ihr gesamter Plan bestimmt. Das wird immer der Fall sein, wenn die erste Scheibe schon *mit drei Stäben an die Erdscheibe geschlossen ist* (Fig. 111).

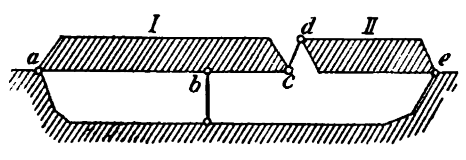


Fig. 111.

Denn dann fällt z. B. das a' des ersten mit dem a'' des zweiten Planes zusammen, wenn a ein festes Gelenk ist. Außerdem ist die Bewegung

des dritten Stützenstabes geometrisch insofern bestimmt, als sich sein Stützpunkt *b* nur senkrecht zur Stabrichtung verschieben kann. Somit ist auch der zweite Punkt *b''* der ähnlichen Verschiebungsfigur gegeben: *b''* ist Schnittpunkt zweier Geraden, von denen die eine durch *a''* verläuft

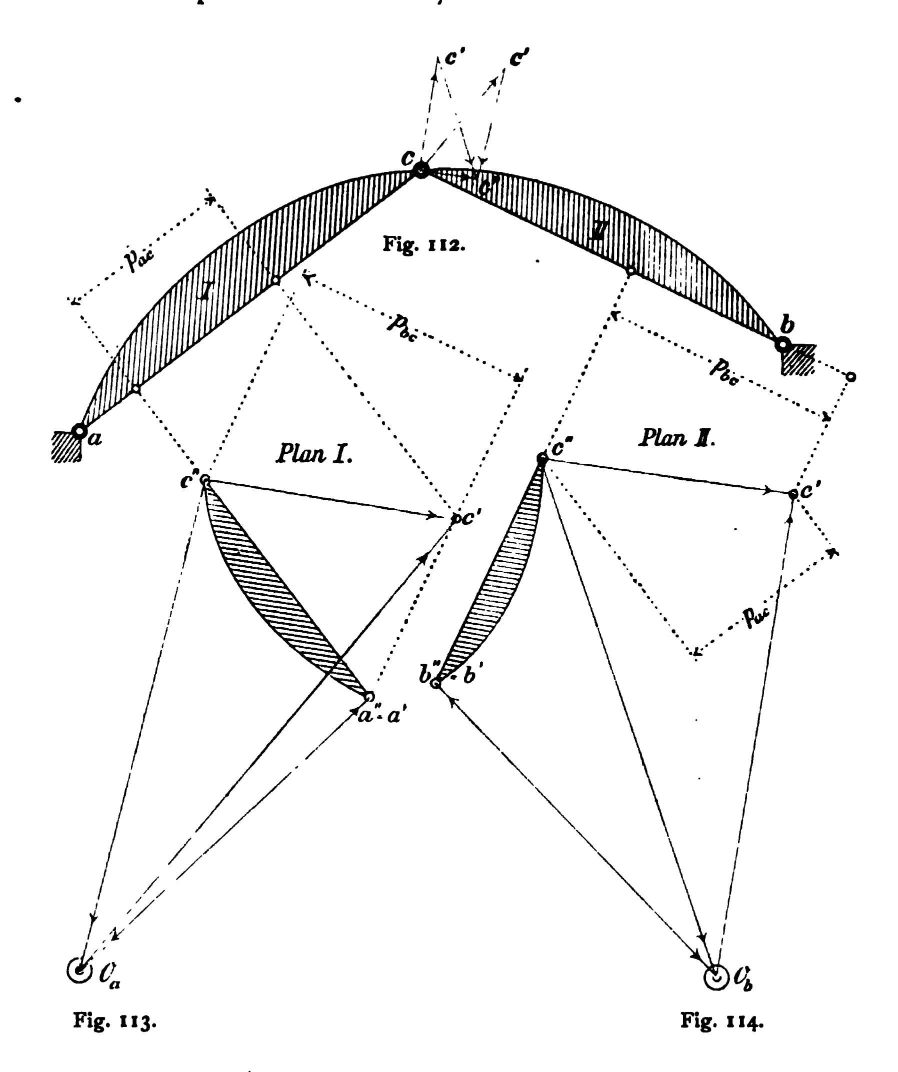


Fig. 113. Fig. 114.

und senkrecht zur Geraden *ab* steht, während die andere von *b'* ausgeht und der Bahn des Stützpunktes *b* parallel ist.

Ist jedoch die Scheibe I, wie in Fig. 112, nur *zweistäbig* an die Erdscheibe geschlossen, so liefern ihre Stützenbedingungen den zweiten

Punkt der ähnlichen Verschiebungsfigur nicht unmittelbar. In solchem Falle muß der fehlende Punkt unter Mitbetrachtung der Stützenbedingungen der Nachbarscheibe II gefunden werden, was in jedem Falle möglich ist.

Sind I und II (Fig. 112) durch ein Gelenk c zweistäbig verbunden, so muß der Punkt c'' in zwei verschiedenen Geraden liegen, von denen die eine dem Plane I (Fig. 113) angehört, also senkrecht zur $\overline{ac}$ steht und durch $a' = a''$ verläuft, während die andere im Plane II liegt, zur $\overline{bc}$ senkrecht steht und durch $b' = b''$ führt (Fig. 114). Außerdem muß aber *die wirkliche Verschiebung* $c''—c'$ für jede der beiden betrachteten Scheiben gleich ausfallen, d. h. *ihre Projektion auf eine feste Richtung muß in den Plänen I und II gleich sein.* Daraus ergibt sich der fehlende zweite Punkt c'' der ähnlichen Verschiebungsfigur beider Pläne wie folgt: Der im Plane I gemessene senkrechte Abstand p_{ac} des Punktes c' von der zur $\overline{ac}$ senkrecht stehenden, durch a' geführten Geraden ist gleich der Projektion der wirklichen Verschiebung $c''—c'$ des Planes I. Man übertrage also p_{ac} parallel zu sich selbst in den Plan II, so daß die Projektion von $c''—c'$, auf eine zur $\overline{ac}$ parallelen Richtung, auch hier gleich p_{ac} wird. *Damit ist der zweite Punkt* c'' *der ähnlichen Verschiebungsfigur des Planes II gegeben.* Dies Verfahren wiederhole man, indem man in gleicher Weise den im Plane II gemessenen Abstand p_{bc} in den Plan I überträgt. Dadurch findet man auch in diesem Plane den fehlenden zweiten Punkt c'' (Fig. 113).

In den Fig. 113—114 sind die Pole O_a und O_b der beiden Pläne I und II angegeben, ebenso mit *roter* Farbe die ersten und zweiten Verschiebungen der Punkte a, b, c der Scheiben. Die eingezeichneten Pfeilrichtungen veranschaulichen die Art der Zusammensetzung der Verschiebungen. Das Gelenk c verschiebt sich danach um die Strecke $c—c'' = c''—c'$. Die Kämpfergelenke a und b erfahren je zwei gleich große aber entgegengesetzt gerichtete Verschiebungen.

2. Besitzt das Fachwerk mehr als zwei Scheiben, so werden die gegebenen Stützenbedingungen immer genügen, um für jede Scheibe, wie beschrieben, *zwei Punkte* der ihr ähnlichen Verschiebungsfigur und damit ihren gesamten Verschiebungsplan festzulegen. Im allgemeinen werden dabei zu unterscheiden sein (Fig. 115)

zweistäbige Stützen in Verbindung mit der Erdscheibe (a),
einstäbige » » » » » » (b),
zweistäbige Zwischengelenke . . . . (c),
einstäbige Scheibenverbindungen . . . . (d).

Wir wiederholen dazu:

Zweistäbige Stützen in Verbindung mit der Erde geben unmittelbar einen Punkt $a' = a''$ des zweiten Verschiebungsplanes der betreffenden Scheibe.

Einstäbige Stützen gleicher Art geben eine der Bahn ihres Stützpunktes b parallele Gerade, die durch b' des ersten Planes der zugehörigen Scheibe verläuft. Besitzt eine Scheibe drei solcher Stützen, deren Richtungen sich nicht in einem Punkte treffen, so ist ihr Gesamtverschiebungsplan unmittelbar gegeben, wie dies (unter **21**, b) bereits gezeigt worden ist. Danach gibt jeder der drei Stützpunkte a, b, c eine Gerade, in welcher a'', b'', c'' zu suchen sind. Das geschieht mit Hilfe der weiteren Bedingung, wonach das Dreieck $a''b''c''$ dem betreffenden Dreieck abc des Fachwerks ähnlich sein muß. Liegen die Punkte a, b, c in einer Geraden, so muß die zu dieser senkrecht stehende Gerade $a''—b''—c''$ mit der $a—b—c$ proportionale Teilung haben.

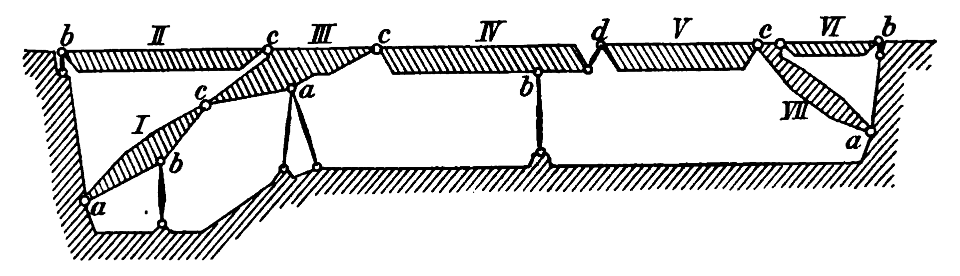


Fig. 115.

Zweistäbige Zwischengelenke geben, wie erläutert, für jeden zweiten Plan der betrachteten Nachbarscheiben *einen* Punkt ihrer Verschiebungsfigur, weil die wirkliche Verschiebung $c''—c'$ des Gelenkes in beiden Plänen gleich sein muß.

Einstäbige Scheibenverbindungen geben für jeden ersten Plan der zugehörigen Scheiben eine durch den Punkt d' laufende, zur Stabrichtung senkrecht stehende Gerade.

Aus obigem folgt allgemein:

Ein ohne die Erdscheibe n Scheiben zählendes zusammengesetztes Fachwerk besitzt mindestens $3n$ Stützenstäbe, so daß für jede Scheibe drei Stützenbedingungen zur Verfügung stehen. Diese genügen, um in jedem Falle in beschriebener Weise zwei Punkte der einer Scheibe ähnlichen Verschiebungsfigur des zweiten Planes und damit die Gesamtverschiebungen festzulegen.

b. Beispiel eines Auslegeträgers.

Aufgabe 37. *Für den* (unter **17**, b) *schon einmal behandelten Auslegeträger soll aus einem Verschiebungsplane die Einflußlinie der Senkung des Gelenkes g abgeleitet werden.*

Im Kräfteplane der Fig. 118 sind die *Stabkräfte* des Auslegeträgers (Fig. 119) dargestellt. Die Fig. 116—117 beziehen sich auf die erste Aufgabe unter **21**, a.

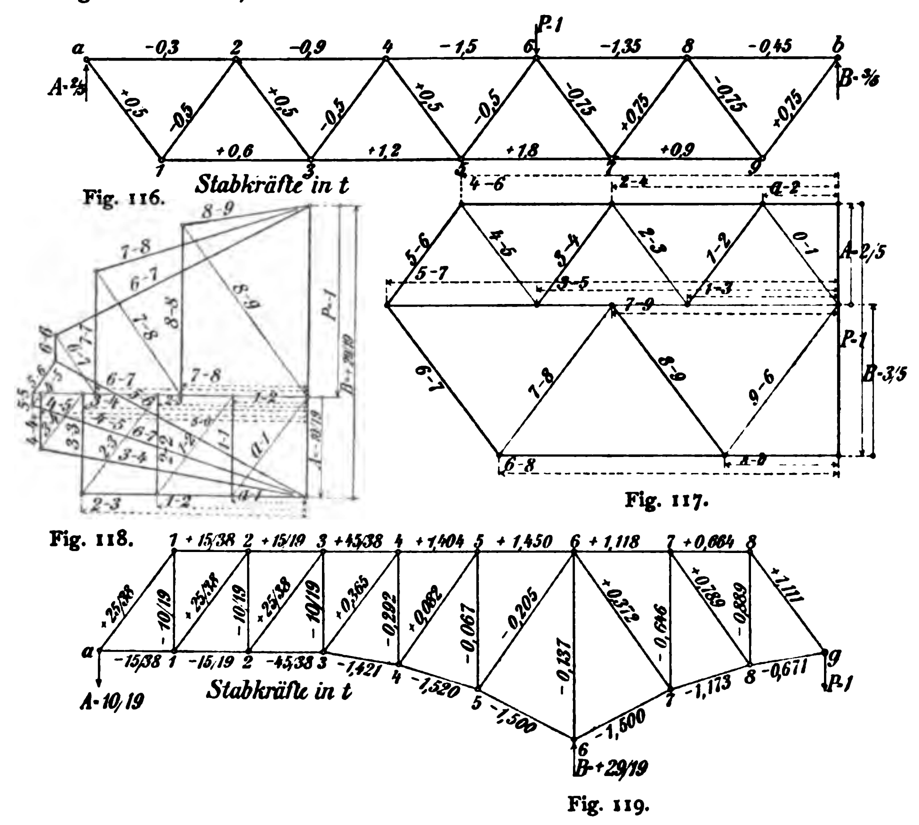


Fig. 116. Fig. 117. Fig. 118. Fig. 119.

Fig. 120 enthält das Trägerschema mit den eingeschriebenen *Stablängenänderungen.* Fig. 123—124 geben den ersten und zweiten Verschiebungsplan. Dabei wurde der erste Plan in zwei Teilen gezeichnet, um Unklarheiten in der Darstellung zu vermeiden. Fig. 123 enthält die ersten Verschiebungen der Knoten *links*, Fig. 124 diejenigen *rechts* von dem festgehalten gedachten Ständer 4_o—4_u. In Fig. 121 ist die *Biegelinie des Lastgurtes für den Auslegeträger* dargestellt, während Fig. 122 die gesamte Biegefläche veranschaulicht, den Endträger *gc* einbegriffen.

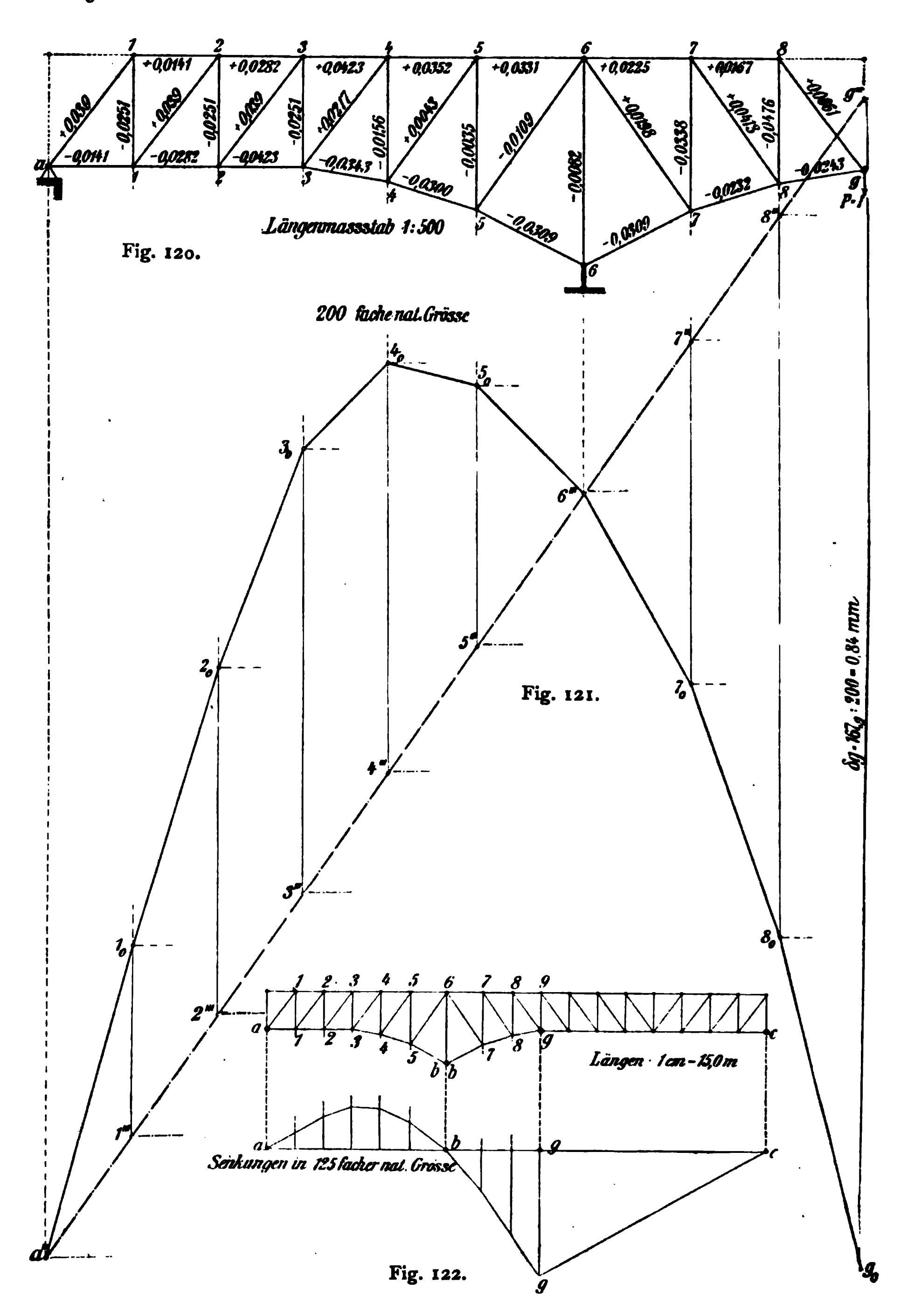


Fig. 120.

Fig. 121.

Fig. 122.

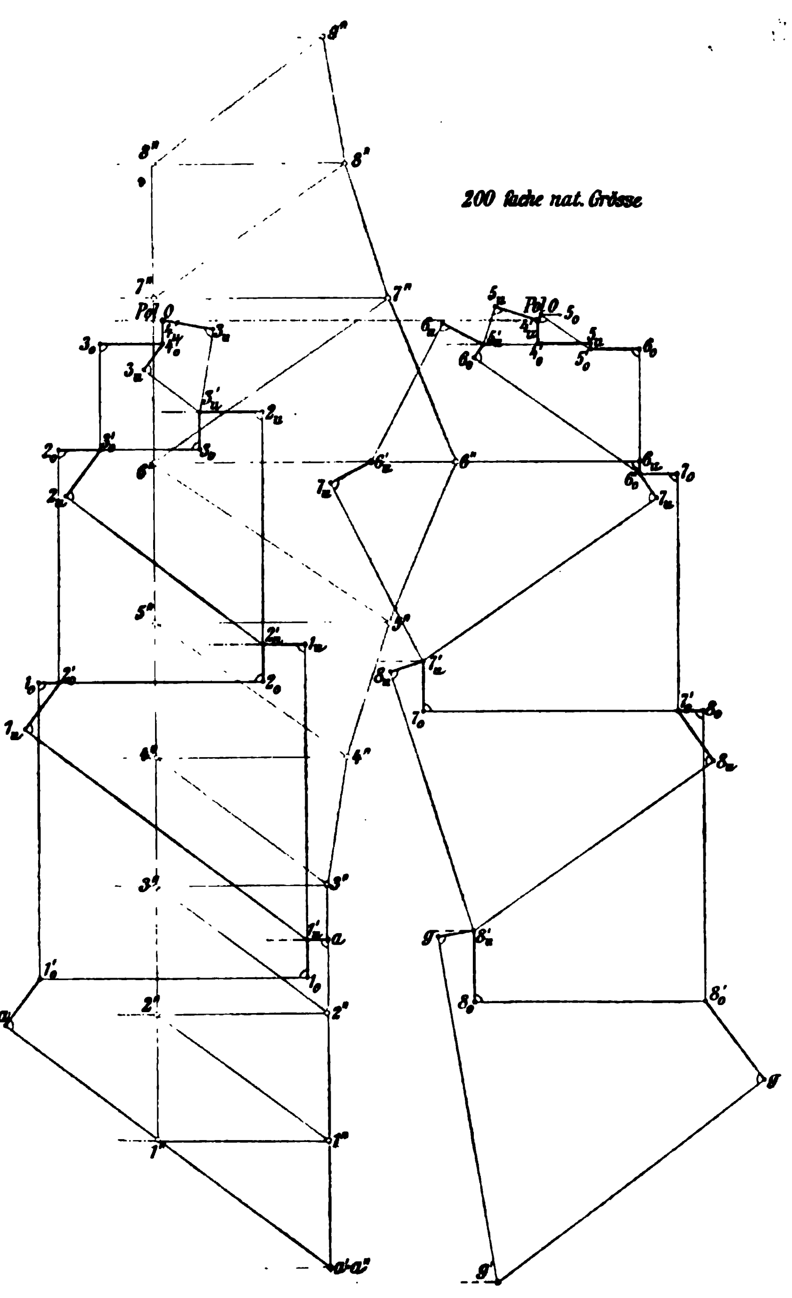


Fig. 123.

Fig. 124.

Der zweite Plan in Fig. 123 ist durch *rote* Farbe ausgezeichnet. Seine wagerechte Projektion auf die betreffenden Knotenlotrechten a bis g gibt die Schlußlinie a'''—g''' und die Eckpunkte 1_0—8_0 der gesuchten Biegelinie. Die Senkung im Gelenkpunkte g fand sich danach mit

$$\delta_g = 0{,}84 \text{ mm},$$

was mit den früheren Rechnungen (unter **17**, b) gut übereinstimmt.

§ 5. Formänderungen, Tragkraft und Spannungen beim Knicken gerader Stäbe.

Es kommen hier hauptsächlich jene Belastungsfälle der Festigkeitslehre in Betracht, in denen die Spannungen des Stabes nur mit Hilfe der Gleichung der *elastischen* Linie zu berechnen sind. Der wesentliche Unterschied in der Behandlung solcher Fälle, gegenüber den in den ersten beiden Bänden (I. § 14—18 und II. § 6) gelösten Aufgaben, besteht darin, daß bei diesen die betrachteten Stäbe als *starr* angesehen werden durften, was bei jenen unzulässig ist, weil hier das starre mit dem elastischen Gleichgewicht (I. **2**, b) nicht mehr vertauscht werden darf.

In allen hier zu betrachtenden Fällen handelt es sich aber, wie früher (I. **99**) darum, den Einfluß einer *Achsen*kraft, *Längs*kraft oder *Quer*kraft oder von Verbindungen dieser *äußern* Kräfte festzustellen.

23. Der durch eine Achsenkraft gedrückte gerade Stab.

a. Ursachen und Gestalt der Formänderung. Wir betrachten einen Stab, der lotrecht aufgestellt ist, so daß auch die Massenkraft seines Eigengewichtes in der Stabachse wirkt. Wäre der Stab durchweg isotrop, vollkommen gerade und auf Druck genau im Schwerpunkte seiner Endquerschnitte belastet, so würde er während der Formänderung bis zur Grenze seiner Festigkeit (I. **3**) *gerade* bleiben müssen. Wäre jedoch die Achsenkraft größer als jene Grenze, so träte eine Zerstörung des Stabes durch Zermalmen, Ineinanderschieben der Fasern, durch Übergang in den plastischen Zustand oder dergl. ein. *Biegungen wären dabei ausgeschlossen.*

In praktischen Fällen wird aber mindestens *eine* der gemachten Voraussetzungen (isotroper Stoff, genaue Geradheit und Achsenbelastung) nicht erfüllt. Infolgedessen können sich die Druckspannungen des Stabes *nicht gleichmäßig* über jeden Querschnitt verteilen. Sie geben daher zusammen ein *Moment* in Beziehung auf die Stabachse. Dadurch biegt sich der Stab, und war die Achsenkraft entsprechend groß, so kann diese *Biegung* zur Zerstörung des Stabes führen. Das ist ein Vorgang, den man das *Knicken* nennt.

Je nach der Art oder Häufung der Zufälligkeiten, wie sie bei der Druckbelastung eines geraden Stabes durch eine Achsenkraft unvermeidlich sind, wird der Biegungsvorgang in einem und demselben betrachteten Falle wechselnd erscheinen. Das Gesetz, nach welchem der kleinste Biegungswiderstand in derjenigen Kraftebene erfolgt, die der kleinsten *Kernweite* entspricht (I. **112**), gilt hier also durchaus nicht immer. Jedoch fällt die Knickrichtung erfahrungsmäßig wohl meistens in oder in die Nähe der Richtung des kleinsten Trägheitshalbmessers.

Wegen der Zufälligkeit der Biegungsursachen ist eine genaue statische Ermittelung der *Spannungen* im vorliegenden Falle unmöglich. Sie gelingt nur unter der *Annahme*, daß die Kraftebene durch die kleinste Kernweite des betrachteten Querschnittes verläuft.

Die beim Knicken erzeugten Spannungen werden *Knickspannungen* genannt. Unter der *Knickkraft* wird hier diejenige Größe der Achsenkraft P verstanden, bei welcher das elastische Gleichgewicht des gebogenen Stabes noch gewahrt bleibt. Wird P größer als diese Knickkraft, so wachsen die Biegungspfeile der elastischen Linie so lange, bis infolge Überschreitens der Festigkeit an den *Rändern* das *Zerknicken* des Stabes eintritt. Der *Sicherheitsgrad* (I. **12**) gegen das Zerknicken wird gewöhnlich mit 4 bis 5 angesetzt, d. h. also die Achsenkraft darf höchstens $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$ so groß werden, als die berechnete Knickkraft. Näheres über diesen Punkt ist unter **24**, c zu vergleichen.

Es liegt auf der Hand, daß das Knicken eines Stabes nur dann eintreten kann, wenn das Verhältnis seines Querschnittes F zur Länge l klein genug ist. Und weil die Richtung des Ausknickens mit derjenigen des kleinsten Biegungswiderstandes zusammenfällt, so wird auch das Verhältnis des Trägheitshalbmessers r zur Länge l einen Maßstab für die Möglichkeit des Knickens abgeben, wie weiterhin noch mehr ausgeführt wird.

Je nachdem als Ursache des Knickens eine *Achsenkraft* oder eine *Längskraft* (I. **106**) auftritt, soll in den folgenden Berechnungen eine *reine* und eine *zusammengesetzte Knickfestigkeit* unterschieden werden. Der allgemeinere Fall ist die Druckbelastung durch eine Längskraft, die bekanntlich immer *außer dem Mittel* der Endquerschnitte angreift. Dieser Fall läßt sich einerseits statisch insofern schärfer fassen, als hier die Richtung des Ausknickens von vornherein durch die *Kraftlinie* (I. **104**, b) der Endquerschnitte festgelegt ist. Anderseits kann man aus ihm den besondern Fall der reinen Knickfestigkeit ableiten, wenn man den Hebelarm der Längskraft in bezug auf den Schwerpunkt der Endquerschnitte gleich Null setzt, wodurch die Längskraft in eine Achsenkraft übergeht.

Wir ziehen es aber aus geschichtlichen Gründen vor, mit dem Falle der reinen Knickfestigkeit zu beginnen. Denn obwohl dessen erstmalige theoretische Behandlung durch EULER[1] schon weit über ein Jahrhundert hinter uns liegt, so steht EULERS Theorie heute immer noch im Vordergrunde des Interesses. Auch werden die Knickformeln EULERS heute ihrer Einfachheit wegen mit Recht noch viel benutzt, obwohl an neuern Formeln kein Mangel ist (**28**).

b. Die Hauptfälle der reinen Knickfestigkeit.

1. *Freie in der Achse geführte Stabenden.* Man denke sich beide Enden a und b eines prismatischen Stabes lotrecht in einer Festigkeitsmaschine eingespannt (Fig. 125). Dabei ist es natürlich unmöglich, ein gewisses Einspannungs*moment* zu vermeiden. Wir wollen aber eine *reibungslose* Einspannung voraussetzen. Aus den angegebenen Gründen sei eine Anfangsbiegung eingetreten, deren elastische Linie in der YZ-Kraftebene des kleinsten Widerstandes zu liegen kommt. l sei die infolge der Achsenkraft P *verkürzte Stablänge* im Augenblicke des elastischen Gleichgewichtes. In praktischen Fällen, sei im voraus bemerkt, kann l auch als die ursprüngliche, ungebogene Stablänge angesehen werden. Der Biegungspfeil in einer Höhe z vom Koordinatenursprunge a sei y.

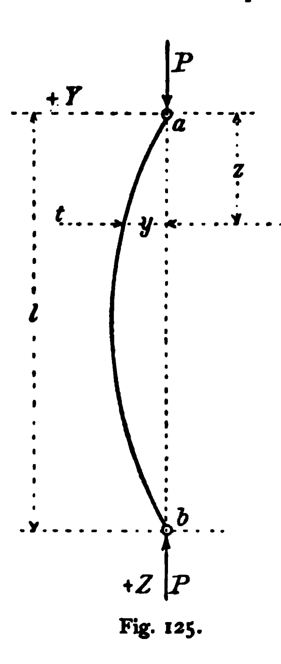


Fig. 125.

Unter Vernachlässigung der Zusammendrückung des Stabes lautet (nach § 2) die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$EJ\frac{d^2y}{dz^2} = -Py.$$

Setzt man darin die Unveränderlichen

$$\frac{P}{EJ} = N^2,$$

so erhält man die Differentialgleichung

$$1) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = -N^2y,$$

[1] EULER. *De curvis elasticis.* Additamentum I. des berühmten Werkes »Methodus inveniendi lineas curvas«. 1744, Lausanne u. Genf. — Vgl. auch »Geschichtliche Rückblicke« im zweiten Abschnitte.

deren Lösungen allgemein in der Form

$$y = A \sin Nz + B \cos Nz$$

erscheint. Die Unveränderlichen A und B sind aus der Art des gegebenen Falles zu bestimmen: Für $z = 0$ ist auch $y = 0$, also

$$0 = +B.$$

Daraus folgt

$$y = A \sin Nz.$$

Weil der Belastungsfall zur Stabmitte symmetrisch liegt, so wird dort der größte Biegungspfeil eintreten, y wird aber am größten für $\sin Nz = 1$. Bezeichnet man $\max y$ mit δ, so folgt weiter

$$\delta = A.$$

Somit lautet die *Gleichung der elastischen Linie*

$$2) \qquad y = \delta \sin Nz.$$

Das ist die Gleichung einer *Wellenlinie*, deren größte Biegungspfeile δ für

$$Nz = \frac{n\pi}{2}$$

und deren Nullpunkte für

$$Nz = n\pi$$

eintreten, wenn n eine ganze Zahl bedeutet. Eine Wellenlänge λ enthält danach einen Berg $+\delta$ und ein Tal $-\delta$, so daß für

$$z = \lambda$$

und

$$n = 2\pi,$$

die erste Wellenlänge mit

$$3) \qquad N\lambda = 2\pi$$

bestimmt ist.

Es ist aber auch für $z = l$ die Biegung $y = 0$, und die Gleichung der elastischen Linie gibt für diese Grenze

$$0 = \delta \sin Nl;$$

δ kann nicht Null sein, folglich muß

$$\sin Nl = 0$$

werden. Das heißt mit andern Worten, es ist

$$4) \qquad Nl = n\pi.$$

Aus den Gleichungen 3) und 4) berechnet sich die Wellenlänge mit

$$5) \qquad \lambda = \frac{2l}{n}.$$

Das gibt für die Zahlen $n = 1$ bis 3 die nachstehend dargestellten Möglichkeiten der elastischen Linie (Fig. 126—128).

$n = 1$	2	3
$\lambda = 2l$	l	$\frac{2}{3}l$
Fig. 126.	Fig. 127.	Fig. 128.

Die Fälle für $n = 2$ und 3 können aber nur eintreten, wenn die mit m bezeichneten Zwischenpunkte des Stabes, wie in den Fig. 127—128 angedeutet, in irgend einer Art konstruktiv derart festgehalten werden, daß sie während der gesamten Formänderung in der Stabachse liegen bleiben. Für den zu behandelnden Belastungsfall ist demnach

$$n = 1 \tag{6}$$

zu setzen. Somit folgt weiter

$$Nl = \pi$$

und

$$N^2 = \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{P}{EJ},$$

woraus mit

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{106}$$

die Knickformel EULERS erhalten wird.

Ist P gleich oder kleiner als der nach der Gl. (106) berechnete Wert, so ist elastisches Gleichgewicht vorhanden, es kann also kein Knicken eintreten. Ist dagegen P größer, so erfolgt Zerstörung durch Knicken. Um sich dagegen zu schützen rechnet man bei ruhender Belastung gewöhnlich mit mindestens vierfacher Sicherheit. In praktischen

Fällen setzt man genau genug $\pi^2 = 10$ und erhält danach für einen Sicherheitsgrad s

$$\max P = \frac{10\,EJ}{s\,l^2}, \tag{107}$$

worin für J das *kleinste* Trägheitsmoment des Querschnittes einzusehen ist.

2. *Ein Stabende eingespannt, das andere frei beweglich.* Dieser Hauptfall ist ohne weiteres aus dem vorigen abzuleiten. Denn im Gleichgewichte des vorigen Falles ändert sich nichts, wenn man den

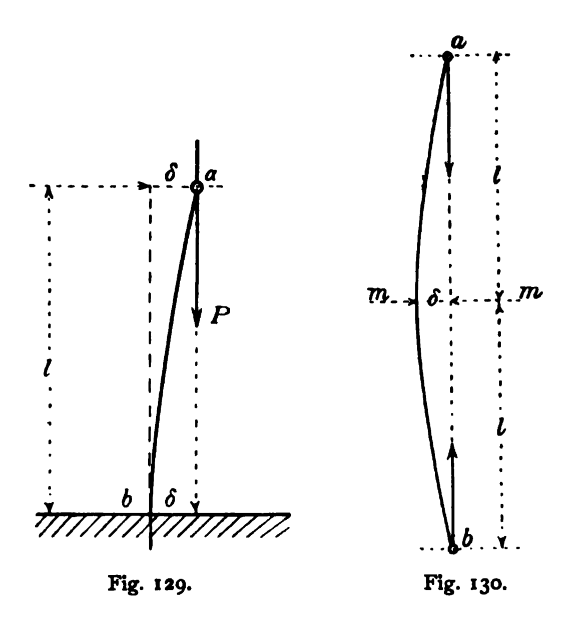


Fig. 129. Fig. 130.

Stab in der Mitte bei m (Fig. 130) eingespannt denkt. Die elastische Linie für $\overline{ab} = l$ in der Fig. 129 ist die nämliche wie für die Länge $\overline{am} = l$ in der Fig. 130. Setzt man somit in die obige Hauptgleichung (106) statt l die Länge $2l$ ein, so erhält man mit

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{4\,l^2} \tag{108}$$

Eulers Knickformel für die vorliegende Belastungsart, und für $s$fache Sicherheit, sowie $\pi^2 = 10$

$$\max P = \frac{2{,}5\,EJ}{s\,l^2}. \tag{109}$$

3) *Eingespannte, in der Achse geführte Stabenden.* Dieser Hauptfall (Fig. 131) stimmt überein mit der Einspannung eines Probestabes in der Festigkeitsmaschine, wobei die Stabenden durch Reibung zwischen entsprechenden Einspannvorrichtungen gehalten werden. Wegen der Symmetrie der Belastung entstehen hier infolge der Formänderung an beiden Stabenden gleiche Momente M_a, die der Biegung *entgegen* wirken. Das Gesamtmoment M in einem Querschnitte der Koordinaten y, z ist demnach mit

$$M = -M_a + P_y$$

anzuschreiben.

Setzt man

$$M_a = P\delta_0,$$

so erhält man als Differentialgleichung der elastischen Linie

$$EJ\frac{d^2y}{dz^2} = -P(y - \delta_0),$$

die für

$$u = y - \delta_0$$

und

$$N^2 = \frac{P}{EJ}$$

in

$$1) \quad \frac{d^2u}{dz^2} = -N^2u$$

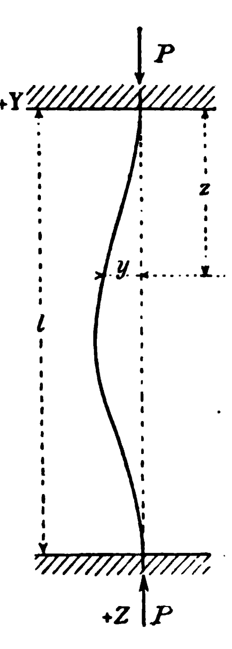


Fig. 131.

übergeht. Die Gl. 1) gibt wie im 1. Hauptfalle eine Lösung in der allgemeinen Form von

$$u = A\sin Nz + B\cos Nz$$

oder (umgeschrieben) von

$$y = \delta_0 + A\sin Nz + B\cos Nz.$$

Daraus gewinnt man die Bedingung

$$\frac{dy}{dz} = AN\cos Nz - BN\sin Nz.$$

Die Unveränderlichen A und B erhält man durch Einsetzen der Grenzen:

$$\text{für } z = 0 \text{ ist } y = 0 \text{ und } \frac{dy}{dz} = 0.$$

Das gibt

$$B = -\delta_0$$
$$A = 0$$

und die *Gleichung der elastischen Linie* in der Form

$$2)\qquad y = \delta_0 (1 - \cos Nz).$$

Aus 2) gewinnt man die Bedingung

$$\frac{dy}{dz} = \delta_0 (N \sin Nz).$$

Es ist aber auch

$$\text{für } z = l \text{ hier } y = 0 \text{ und } \frac{dy}{dz} = 0.$$

Dadurch erhält man die weiteren Bedingungen

$$0 = \delta_0 (1 - \cos Nl),$$
$$0 = \delta_0 (N \sin Nl).$$

Weil δ_0 nicht gleich Null sein kann, folgt schließlich

$$\cos Nl = 1,$$
$$\sin Nl = 0.$$

Diese Bedingungen werden erfüllt für

$$Nl = 0,\quad 2\pi,\quad 4\pi,\quad 8\pi \text{ usw.},$$

allgemein also für

$$3)\qquad Nl = 2n\pi.$$

Für die Wellenlinie der Gl. 2) tritt der größte Biegungspfeil in der Stabmitte ein für $\cos Nz = -1$, so daß

$$\max y = 2\delta_0 = \frac{2 M_a}{P}$$

angeschrieben werden kann. Die *Wendepunkte* der elastischen Linie berechnen sich aus

$$M = M_a - Py = 0$$

mit

$$y = \frac{M_a}{P} = \delta_0.$$

Die *Wellenlänge* λ bestimmt sich danach, wie im 1. Hauptfalle, aus der Bedingung

$$4)\qquad N\lambda = 2\pi.$$

Durch Verbindung der Gleichungen 3) und 4) erhält man schließlich die Wellenlänge λ mit

$$5)\qquad \lambda = \frac{l}{n}.$$

Das gibt für die Zahlen $n = 1$ und $n = 2$ die in den Fig. 132—133 dargestellten Möglichkeiten des Verlaufs der elastischen Linie.

$n = 1$	2
$\mathfrak{l} = l$	$\frac{l}{2}$

Fig. 132. Fig. 133.

Der Fall für $n = 2$ kann nur eintreten, wenn der mit m bezeichnete Zwischenpunkt des Stabes (Fig. 133) gegen seitliche Verschiebung gesichert ist. Für den vorliegenden Fall ist demnach

$$6) \qquad n = 1$$

zu setzen und (nach Gl. 3)

$$Nl = 2\pi.$$

Somit ist hier die Formel Eulers mit

$$P = \frac{4\pi^2}{l^2} EJ \qquad (110)$$

anzuschreiben, oder (bei $s$facher Sicherheit)

$$\max P = \frac{40 EJ}{s l^2}. \qquad (111)$$

4. *Ein Stabende eingespannt, das andere in der Achse frei geführt* (Fig. 134). Um den Punkt a frei und *reibungslos* in der Achse zu führen muß auf ihn, nach der Seite der elastischen Biegung hin, eine wagerechte Stützenkraft H ausgeübt werden. Im Zustande des elastischen Gleichgewichtes ist danach das Moment für einen Punkt der Koordinaten y, z mit

$$M = Py - Hz$$

anzuschreiben. Setzt man

$$Hz = P\delta_0,$$

so gibt das, wie im vorigen Falle

$$EJ\frac{d^2 y}{dz^2} = -P(y - \delta_0)$$

und

$$y = \frac{H}{P}z + A \sin Nz + B \cos Nz.$$

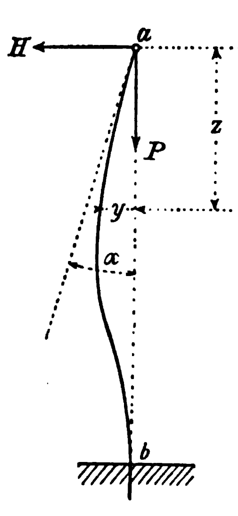


Fig. 134.

Für

$$z = 0 \text{ und } y = 0$$

folgt daraus

$$B = 0,$$

für

$$z = l \text{ und } y = 0$$

$$A = -\frac{Hl}{P \sin Nl}.$$

Die Gleichung der elastischen Linie lautet sonach

$$y = \frac{H}{P}\left\{z - \frac{l \sin Nz}{\sin Nl}\right\}.$$

Das gibt die Bedingung

$$\frac{dy}{dz} = \frac{H}{P}\left\{1 - \frac{Nl \cos Nz}{\sin Nl}\right\}.$$

Zunächst ist hierin, um H zu bestimmen, die Grenze

$$\text{für } z = l \text{ ist } \frac{dy}{dz} = 0$$

einzusetzen. Das gibt

$$0 = \frac{H}{P}\left\{1 - \frac{Nl \cos Nl}{\sin Nl}\right\}.$$

Weil H nicht Null sein kann, so folgt

$$3) \qquad Nl = \operatorname{tg} Nl.$$

Nach einem der bekannten Näherungsverfahren für transzendente Gleichungen findet man folgende Lösungen

$$\begin{aligned} Nl &= 0 \\ Nl &= 4{,}493\,(257^\circ\,27'\,12'') \\ Nl &= 7{,}725\,(442^\circ\,37'\,28'') \\ Nl &= 10{,}904\,(624^\circ\,45'\,37'') \end{aligned}$$

usw.

Hier kommt nur die kleinste auf $Nl = 0$ folgende Wurzel der Gl. (3) in Betracht. Für diesen Fall erhält man demnach die Formel EULERS mit

$$P = (4{,}493)^2 \frac{EJ}{l^2}$$

und für s-fache Sicherheit (112)

$$\max P = \frac{20\,EJ}{s\,l^2}.$$

Vergleicht man schließlich die Tragkraft P in den 4 Hauptfällen, so findet man bei gleicher Stablänge l ihr Verhältnis zueinander wie

$$4 : 1 : 16 : 8 .$$

Wenn man in den abgeleiteten EULER-Formeln den *Trägheitshalbmesser* r des Querschnittes F und die *Achsenspannung*

$$\sigma_s = \frac{P}{F}$$

einführt, so erhält man für die 4 Hauptfälle (und $\pi^2 = 10$) die Gleichungen

	Fall 1	2	3	4
$\sigma_s =$	$10 \frac{Er^2}{sl^2}$	$2{,}5 \frac{Er^2}{sl^2}$	$40 \frac{Er^2}{sl^2}$	$20 \frac{Er^2}{sl^2}$
	Fig. 135.	Fig. 136.	Fig. 137.	Fig. 138.

wenn dabei s den Sicherheitsgrad vorstellt.

24. Kritik der Euler-Formeln.

a. Unbestimmtheit des Biegungspfeiles und der Spannungen.

1. Die von EULER gegebene Differentialgleichung der elastischen Linie zeigt in ihrer allgemeinen Form

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = N^2 (\delta_0 - y)$$

eine auffallende Eigentümlichkeit. Ist die Gleichung nämlich für eine bestimmte Gestalt der elastischen Linie erfüllt, so ist sie dies auch noch, wenn sämtliche Biegungspfeile y proportional wachsen. *Die Größe der Durchbiegung ist danach unbestimmt.* Deshalb ist es auch nicht möglich, die von der Knickkraft P verursachten Spannungen ohne Probieren zu bestimmen.

LAGRANGE hat gezeigt, wie man auch den Biegungspfeil der Knicklinie berechnen kann[1]. In einer Arbeit über die Gestalt der Säulen

[1] WINKLER, Abriß der Geschichte der Elastizitätslehre. Technische Blätter. 1871. S. 22. — Vgl. auch die »*Geschichtlichen Rückblicke*« in der Abteilung II.

(Turiner Akademie 1770 bis 1773) beleuchtet er die Formänderung einer knickenden Säule, stellt eine genaue Differentialgleichung auf und integriert mit Hilfe einer Reihe. So erhält er *für den Biegungspfeil* δ, bei frei beweglichem obern Stabende, die Gleichung

$$\delta^2 = \frac{16 EJ}{P}\left[\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{P}{EJ}} - 1\right]. \tag{113}$$

Auch GRASHOF[1] hat nachgewiesen, daß die Knickkraft P vom Biegungspfeile δ abhängig ist. Nach der von ihm aufgestellten Gleichung wächst P mit δ nur sehr unbedeutend. Wie man die Knicklinie durch einiges Probieren graphisch darstellen kann, hat zuerst VIANELLO[2] gezeigt.

Die EULER-Formeln nehmen danach in der Festigkeitslehre eine Ausnahmestellung ein. Denn bei allen Festigkeitsaufgaben ist es sonst Brauch mit einer zulässigen Spannung (I. **7**) zu rechnen, während EULER die Tragkraft oder Knickkraft P unmittelbar findet, ohne die dadurch verursachten Knickspannungen zu bestimmen.

Die Richtigkeit der EULER-Formeln steht aber wohl heute fest, trotz aller im Laufe der Zeit in dieser Hinsicht wiedergekehrten Zweifel. Das hat am ausführlichsten und schärfsten ZIMMERMANN in einer sehr lesenswerten Schrift[3] klargelegt.

b. Einfluß der Schubspannungen und der elastischen Zusammendrückung des Stabes. Der Einfluß der Schubspannungen auf die Gestalt der elastischen Knicklinie und somit auch auf die Knickkraft ist in der Regel verschwindend klein. Das hat ENGESSER[4] ausführlich bewiesen. Am größten ist ihr Einfluß bei solchen Querschnitten, die ihre kleinsten Breiten in der Schwerachse zeigen (z. B. I-Profile u. dgl.) und er wächst mit abnehmendem Verhältnis von $l : r$, wenn r den Trägheitshalbmesser bedeutet.

Auch der Einfluß der von EULER vernachlässigten elastischen Zusammendrückung der Stablänge ist unerheblich für praktische Aufgaben. Um dies auf kürzestem Wege genau genug nachzuweisen, führe man bei der Ableitung der EULER-Formeln, wie das Verfasser (unter **23**, b) getan

---

[1] GRASHOF, Festigkeitslehre, 1866, S. 112.

[2] VIANELLO, Graphische Untersuchung der Knickfestigkeit gerader Stäbe. Zeitschr. des Ver. deutsch. Ing. 1898, S. 1436.

[3] ZIMMERMANN, Über den Sicherheitsgrad der Baukonstruktionen. Centralbl. der Bauverw. 1886. Sonderabdruck.

[4] ENGESSER, Die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Centralbl. der Bauverw. 1891, S. 483.

hat, anstatt der ursprünglichen Längen l diejenige Länge des Stabes ein, die er im Augenblicke des elastischen Gleichgewichtes besitzt. Dann werden die Ordinaten y der elastischen Linie nicht mehr von der Zusammendrückung des Stabes beeinflußt. Sie sind dann nur noch von den durch die *Momente* der Achsenkraft herbeigeführten Formänderungen abhängig. Die Formeln EULERS gelten danach (genauer genommen) nur für

$$l = l - \Delta l$$

oder

$$l = l\left(1 - \frac{P}{EF}\right).$$

Für den ersten Hauptfall müßte demnach die Formel genauer

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2\left(1 - \frac{P}{EF}\right)^2}$$

lauten. Setzt man darin die *Achsenspannung*

$$\frac{P}{F} = \sigma_s, \tag{114}$$

so gibt das

$$P = \frac{\pi^2 E^3 J}{l^2(E - \sigma)^2}. \tag{115}$$

Weil nun $(E - \sigma)$ in praktischen Fällen ohne Bedenken gleich E gesetzt werden kann, so wird an Stelle der nach Gleichung (115) ermittelten genaueren Knickkraft P der EULERsche Wert gesetzt werden dürfen. Dieser Wert von P entspricht sogar der *wirklichen Knickkraft* P_k noch mehr, als jener genauere *größere* Wert. Eine bleibende Formänderung oder der Bruch des Stabes tritt nämlich erfahrungsmäßig schon etwas früher ein, als die *theoretische* Knickkraft P erreicht ist, denn die zum Bruche führende Knickkraft P_k ist immer *kleiner* als jene. Danach hat für praktische Fälle die Berücksichtigung der Zusammendrückung des Stabes keine wesentliche Bedeutung.

KÜBLER hat in einer lehrreichen Arbeit[1] versucht, den Einfluß der elastischen Zusammendrückung gegenüber der durch reine Momente verursachten Formänderung als erheblich hinzustellen. Obwohl er dabei von einwandfreien statischen Voraussetzungen ausgeht, so leidet doch

[1] KÜBLER. Beitrag zur Knick-Elastizität und -Festigkeit. Zeitschr. für Mathematik und Physik. 1900. 45. Band, Heft 5—6.

seine mathematische Durchführung der Lösung an großen Ungenauigkeiten. Deshalb hat auch er (nach Verfassers Ansicht) den Beweis von der Erheblichkeit der elastischen Zusammendrückung nicht erbracht.

c. Theoretische und wirkliche Knickkraft[1]. Um einen ungefähren Vergleich zwischen den beiden bezeichneten Werten der Knickkraft zu erhalten, soll zuerst ein Stab mit einer anfänglichen Krümmung betrachtet werden, deren Pfeil gegenüber den Querschnittsmaßen sehr klein ist. Der Stab bildet dann einen so flachen Bogen, daß man diesen als Sinuslinie ansehen darf. Deren Ordinaten u geben die Gleichung

$$u = f_0 \sin \pi \frac{z}{l}, \tag{116}$$

worin f_0 den Pfeil der Bogenmitte bedeutet (Fig. 139).

Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet nach vorigem

$$EJ \frac{d^2 y}{dz^2} = -P(u + y)$$

oder

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{P}{EJ}\left(y + f_0 \sin \pi \frac{z}{l}\right).$$

Daraus findet man in bekannter Weise (**23**) die Gleichung der elastischen Linie mit

$$y = \frac{f_0 \sin \pi \frac{z}{l}}{\pi^2 \frac{EJ}{Pl^2} - 1},$$

Fig. 139.

der größte Wert von y tritt für $\pi \frac{z}{l} = \frac{\pi}{2}$, d. h. für

$$z = \frac{l}{2}$$

ein. Danach ist

$$f = \max y = \frac{f_0}{\frac{P_e}{P} - 1}, \tag{117}$$

wenn

$$P_e = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

eingesetzt wird.

---

[1] Föppl. Vorlesungen über technische Mechanik. III. Band. 2. Aufl. S. 371.

Die Gleichung (117) läßt erkennen, einerseits wie der ursprüngliche sehr kleine Biegungspfeil f_0 des Stabes sich vergrößert, wenn die Achsenkraft, von Null ab wachsend, sich allmählich dem Werte P_e der EULERschen Knickkraft nähert und anderseits, wie damit die Knickgefahr näher rückt. Die Gleichung zeigt außerdem auch, daß selbst bei verschwindend kleiner ursprünglicher Krümmung des Stabes die theoretische Knickkraft EULERS eine Grenze bedeutet, über welche hinaus der Stab, um seine Zerstörung durch Knicken zu verhüten, nicht belastet werden darf.

Die größte *Randspannung* wird in der Stabmitte erzeugt. Sie ist (nach I. **107**) mit

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 \pm \frac{(f+f_0)e}{r^2}\right) \tag{118}$$

anzuschreiben, wenn e den Abstand der Randfaser von der zur Nulllinie parallelen und der Kraftlinie zugeordneten Achse XX bedeutet und wenn r der auf die XX bezogene Trägheitshalbmesser ist.

Setzt man darin den Wert von f aus Gl. (117) ein, so erhält man

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 \pm \frac{e f_0 P_e}{r^2 (P_e - P)}\right). \tag{119}$$

Für praktische Berechnungen tritt die *wirkliche* Knicklast P_k schon ein, wenn σ die *Proportionalitäts*grenze (I. **4**, c) erreicht hat, denn von diesem Augenblicke an gilt das Elastizitätsgesetz nicht mehr, auf das sich die Formel für σ stützt. Es besteht daher auch das elastische Gleichgewicht nicht mehr in dem Sinne, wie es eine Knickformel ausdrücken sollte, denn die Biegungspfeile wachsen vom bezeichneten Augenblicke an schneller, als in der EULERschen Formel vorausgesetzt worden und infolgedessen wird auch die Zerstörung des Stabes schon bei einer Belastung erfolgen, die kleiner als P_e ist.

Setzt man danach σ gleich der Spannung an der Proportionalitätsgrenze und $P = P_k$, so erhält man aus der Gl. (119) einen ungefähren Anhalt für das Verhältnis zwischen P_e und P_k. Man findet

$$P_k = \frac{\sigma F + (c+1) P_e}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma F + (c+1) P_e}{2}\right)^2 - \sigma F P_e},$$

worin

$$\frac{e f_0}{r^2} = c$$

gesetzt worden ist. Von den beiden danach zu erhaltenden Werten P_k gilt *der kleinere*, d. h. der Wurzelausdruck ist *stets negativ* zu nehmen.

Für $f_0 = 0$, d. h. für einen ursprünglich geraden Stab, erhält man $c = 0$ und

$$P_k = \left(\frac{\sigma F + P_e}{2}\right) \pm \left(\frac{\sigma F - P_e}{2}\right)$$

und daraus

$P_k = P_e$ für den Fall, daß $\sigma F > P_e$ ist,
$P_k = \sigma F$ - - - - $\sigma F < P_e$ ist.

Für den Fall der *reinen Achsenlast* gilt also auch hier der theoretische Wert P_e der Formeln EULERS als wirkliche Knickkraft. Auch erkennt man, daß nur der einfache Fall einer *Druck*belastung vorliegt, wenn die von der Achsenkraft P_e erzeugte Spannung σ sich *gleichmäßig* über die Querschnittsfläche verteilt und dabei die *Proportionalitäts*grenze nicht überschreitet. Damit ist rein theoretisch bewiesen, daß in *praktischen* Fällen, in denen niemals eine gleichmäßige Spannungsverteilung über alle Stabquerschnitte vorausgesetzt werden darf, die theoretische Knickkraft EULERS stets etwas größer sein muß, als die wirkliche Knickkraft P_k, selbst wenn man mit einer reinen Achsenkraftbelastung rechnen wollte.

FÖPPL[1] berechnet für ein gleichschenkliges Winkeleisen Nr. 7 von 9 mm Stärke, das einen anfänglichen Krümmungspfeil von 1 mm besitzt, bei $E = 2110 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$ und $\sigma = 2{,}0 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$

bei $l = 2$ m: $\sigma F = 23{,}6$ t; $P_e = 11{,}8$ t; $P_k = 10{,}4$ t;
- $l = 3$ m: $\sigma F = 23{,}6$ t; $P_e = 5{,}2$ t; $P_k = 5{,}0$ t.

25. Gültigkeitsgrenzen der Euler-Formeln.

a. Ergebnisse von Versuchen. Die EULERformel gilt nur für Spannungen innerhalb der Proportionalitätsgrenze. Deshalb lassen sich ihre Gültigkeitsgrenzen am einfachsten und schärfsten auf rein *theoretischem* Wege festlegen. Dessenungeachtet hat man geglaubt, diese Grenzen durch Versuche feststellen zu müssen. Schon der verstorbene BAUSCHINGER, der Vorgänger FÖPPLS in der Leitung der mechanisch-technischen Versuchsanstalt der technischen Hochschule in München, stellte bei seinen Knickversuchen eine gute Übereinstimmung mit den EULER-Formeln fest. Auf gleichem Gebiete hat besonders TETMAJER gewirkt, der frühere Leiter der Versuchsanstalt des Polytechnikums in Zürich, der (1905) als Rektor der technischen Hochschule in Wien gestorben ist.

[1] FÖPPL, Festigkeitslehre. 3. Aufl. S. 372.

WINKLER verlegte die Gültigkeitsgrenzen der EULERformel an jene Stelle, für welche

$$y = \frac{P}{F} = D,$$

d. h. gleich der Druckfestigkeit wird. Es liegt aber auf der Hand, daß die Grenzen viel enger zu ziehen sind, weil bei ihrer Festsetzung nicht die Druckfestigkeit sondern die Proportionalitätsgrenze zugrunde zu legen ist, was die Versuche TETMAJERS bestätigt haben, oder richtiger gesagt, *was sie bestätigen mußten.*

Führt man in die Ausdrücke für die Knickkraft P den *Trägheitshalbmesser* r ein, so erhält man für den 1. Hauptfall die Gleichung

$$\frac{P}{F} = \pi^2 E \left(\frac{r}{l}\right)^2. \tag{120}$$

Setzt man darin die *Achsenspannungen*

$$\frac{P}{F} = y$$

und

$$\frac{l}{r} = x,$$

so erhält man mit

$$x^2 y = \pi^2 E$$

die Mittelpunktsgleichung einer *kubischen Hyperbel*, bezogen auf rechtwinklige Koordinaten (Fig. 140). Die y bedeuten also *Achsen*spannungen, unter Annahme gleichmäßiger Verteilung. Die x geben verschiedene Verhältnisse zwischen Stablänge und Trägheitshalbmesser an. Für kleine Werte von x, d. h. also für solche Stäbe, deren Dicke gegenüber ihrer Länge groß ist, liefert die EULER-Hyperbel sehr große Spannungen. Die *theoretischen Gültigkeitsgrenzen* treten danach für diejenigen Werte von x ein, deren Ordinaten y die Achsenspannung an der Proportionalitätsgrenze angeben. Dem Verfasser will es danach scheinen, als ob die Bestimmung der Gültigkeitsgrenzen durch einen Versuch, wenig praktischen Wert hätte, denn die Versuchsergebnisse müssen ja — nahezu wenigstens —

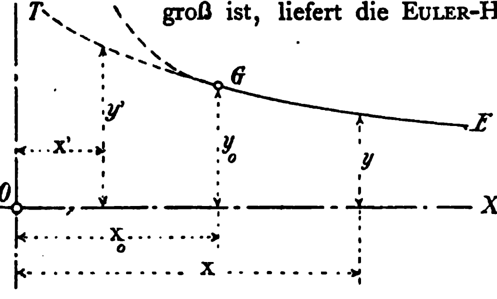


Fig. 140.

denjenigen Zahlen entsprechen, die man (mit Hilfe der Proportionalitätszahlen) einfacher und genauer aus der EULER-Hyperbel abgreifen kann.

TETMAJER fand bei seinen Versuchen für die Gültigkeitsgrenzen der EULER-Formeln folgende Zahlen.

Tabelle 6.

	Baustoff	Dehnungszahl E t/cm²	Grenze $x \gtreqless \frac{l}{r}$
1	*Holz*	100	100
2	*Gußeisen* . . .	1000	80
3	*Schweißeisen* . .	2000	112
4	*Flußeisen* . . .	2150	105
5	*Mittelharter Stahl* verschiedener Gattung . . .	2250	90

Weil diese Zahlen mit dem nach obigem zu ermittelnden *theoretischen* Gültigkeitsgrenzen sehr gut stimmen, so ist damit wieder *ein neuer Beweis für die Brauchbarkeit und Richtigkeit der Eulerformel geliefert.*

Leider fallen nun die in der letzten Spalte obiger Tabelle angegebenen Werte von $\frac{l}{r}$ *gerade für die gebräuchlichsten Abmessungen von Konstruktionsstäben aus Holz und Eisen außerhalb der Gültigkeitsgrenzen.* Denn Verhältnisse von $l : r$ *über* 80 sind für Stützen, Säulen, Pfeiler, gedrückte Konstruktionsglieder u. dgl. äußerst selten. In vielen Fällen, namentlich für Hochbauten, schreibt ja schon die Rücksicht auf das gute Aussehen *viel kleinere* Werte vor.

Danach verliert die EULERformel auf dem Gebiete der Baukonstruktionen viel von ihrer sonstigen Bedeutung und es wird notwendig, *außerhalb* ihrer Gültigkeitsgrenzen andere Formeln an ihre Stelle zu setzen. Deren Besprechung folgt unter **26**. An dieser Stelle finde nur noch ein kurzer Hinweis auf die Formeln TETMAJERS Platz.

In der Fig. 140 sei EE die erwähnte kubische Hyperbel der Gleichung

$$y = \pi^2 E \left(\frac{r}{l}\right)^2 . \tag{121}$$

x_0, y_0 im Punkte G der EULER-Hyperbel mögen für irgend einen Baustoff die Gültigkeitsgrenze angeben. Dann bedeutet GT eine Linie, deren Koordinaten x', y' aus den Ergebnissen der obigen Versuche abzuleiten

sind. TETMAJER findet im allgemeinen GT als eine *Parabel*[1], setzt aber an deren Stelle für Holz und schmiedbares Eisen angenähert eine *Gerade*. In welcher Weise er mit Hilfe der Ordinaten y' die Stabquerschnitte berechnet, wird weiterhin (unter **29**) ausführlich angegeben. Dabei wird auch gezeigt werden, wie groß die Unterschiede in den berechneten Abmessungen ausfallen, wenn einerseits die EULERformel, anderseits die Formeln von TETMAJER benutzt werden.

b. Grenzen zwischen Druck- und Knickfestigkeit.

Man kann allgemein die Frage stellen, bei welcher Grenze des Verhältnisses von $l:r$ die Möglichkeit des Knickens aufhört und nur noch die reine Druckfestigkeit in Rechnung gestellt zu werden braucht. Es sei

m der Sicherheitsgrad gegen Druck und Knicken,

D die Druckfestigkeit (für die Einheit der unveränderlich angenommenen Querschnittsfläche F).

Dann ist für die gesuchte Grenze, und für frei geführte Stabenden anzuschreiben

$$mP = DF = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

woraus für

$$J = Fr^2$$

die Bedingung

$$\frac{l}{r} \lesseqgtr \pi \sqrt{\frac{E}{D}} \tag{122}$$

folgt. Das gibt für die wichtigsten Baustoffe folgende Werte von $\frac{l}{r}$.

Tabelle 7. Grenzwerte zwischen der Druck- und Knickfestigkeit.

Baustoff	Dehnungszahl E in $\frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$	Druckfestigkeit D in $\frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$	$\frac{l}{r} \lesseqgtr$	Eulerformel gültig für $\frac{l}{r} \geqq$
Holz	100	0,28	60	100
Gußeisen (feinkörnig). . .	1000	8,00	35	80
Schweißeisen .	2000	3,50	86	112
Flußeisen. . .	2150	4,00	73	105
Mittelharter Stahl . . .	2250	6,00	61	90

[1] Festigkeitslehre, 3. Aufl. S. 399.

Die in der vorletzten Spalte der Tabelle 7 aufgeführten Zahlen haben wenig praktische Bedeutung, weil sie nicht erkennen lassen, bei welcher *untern* Grenze von $l:r$ ein Stab überhaupt *knicksicher* ist. Oberhalb dieser Grenze würde die Berechnung nach der *Geraden*formel TETMAJERS oder einer dafür besser zu gebrauchenden *Parabel*formel (**28**) zu erfolgen haben.

26. Zusammengesetzte Knickfestigkeit. Sobald an Stelle der Achsenkraft eine drückende *Längs*kraft tritt, oder wenn außer der Achsenkraft noch Lasten *quer* zur Stabachse wirken oder Verdrehungen vorkommen, wandelt sich die *reine* Knickfestigkeit in eine *zusammengesetzte* um.

a. Der durch eine Längskraft gedrückte gerade Stab.

1. *Ein Stabende eingespannt, das andere frei* (Fig. 141). Wir behalten hier die bekannten Bezeichnungen des ersten Bandes (I. § 15—16) bei. Die drückenden und biegenden äußern Kräfte bestehen aus der Achsenkraft P und dem Momente M der Längskraft. Die Achsenkraft P erzeugt eine *Achsenspannung*

$$\sigma_s = \frac{P}{F}. \qquad (123)$$

Das Moment der Längskraft ist für einen Punkt der Koordinaten u, z mit

$$M = P(\delta + v - u)$$

anzuschreiben (Fig. 141). Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet demnach

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = + \frac{P}{EJ}(\delta + v - u).$$

Die Achsenspannung σ_s hat auf die Gestalt der elastischen Linie keinen Einfluß, weil — wie unter **23** — $\overline{ab} = l$ die zusammengedrückte Stablänge im Zustande des elastischen Gleichgewichtes vorstellen soll. Die Richtung der Längskraft wird während der Formänderung als lotrecht bleibend angesehen. Für

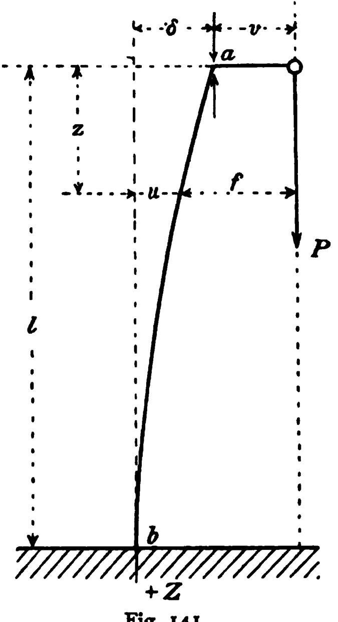


Fig. 141.

$$N^2 = \frac{P}{EJ}$$

und

$$f = (\delta + v - u)$$

erhält man dann

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -\frac{d^2 u}{dz^2}$$

oder

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -N^2 f.$$

Das gibt, wie früher

$$f = \delta + v - u = A \sin Nz + B \cos Nz.$$

Für $z = 0$ wird auch $u = 0$ und

$$B = \delta + v.$$

Für $z = 0$ ist ferner auch $\frac{du}{dz} = 0$, woraus sich die Unveränderliche A bestimmt, mit

$$-\frac{du}{dz} = A = 0.$$

Die Gleichung der elastischen Linie lautet demnach

$$u = (\delta + v)(1 - \cos Nz). \tag{124}$$

Für $z = l$ ist $u = \delta$ und

$$\delta = (\delta + v)(1 - \cos Nl)$$

oder aufgelöst

$$\delta = v\left(\frac{1}{\cos Nl} - 1\right)$$

und

$$\delta + v = \frac{v}{\cos Nl}.$$

Setzt man den Wert für N ein, so erhält man

$$\max f = \delta + v = \frac{v}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)} \tag{125}$$

und für die *Gleichung der elastischen Linie*

$$u = \frac{v}{\cos Nl}(1 - \cos Nz). \tag{126}$$

Sind die Festigkeitseigenschaften und Abmessungen eines Stabes bekannt, so kann die Gl. (125) dazu dienen, den Wert von $\delta + v$ für den *gefährlichsten Querschnitt* zu berechnen. Zu dem Zwecke verwandelt man am bequemsten $\cos Nl$ in eine Reihe und erhält dann bei Berücksichtigung von ihren drei ersten Gliedern

$$\max f = \delta + v = \frac{v}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{\sigma_s}{E} + \frac{1}{24}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{\sigma_s}{E}\right]^2}, \tag{127}$$

wenn

$$N^2 = \frac{P}{EJ}; \quad \frac{P}{F} = \sigma_s$$

und

$$J = Fr^2$$

eingesetzt wird.

2. *Beide Enden in der Stabachse frei geführt* (Fig. 142).

Für $l = \frac{l}{2}$ erhält man hier aus der Gl. (127)

$$\max f = \delta + v = \frac{v}{1 - \frac{1}{8}\left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{\sigma_s}{E} + \frac{1}{384}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{\sigma_s}{E}\right]^2}. \quad (128)$$

Über die Verwertung der Gleichungen (127—128) für praktische Aufgaben vgl. unter **29**.

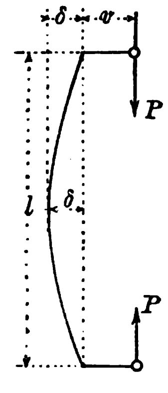


Fig. 142.

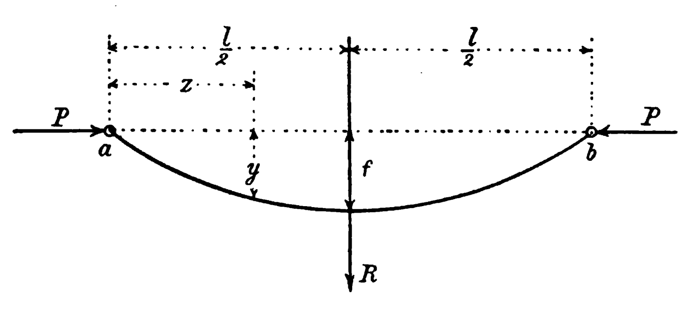


Fig. 143.

b. Der durch eine Achsenkraft und quer zur Achse belastete Stab (Fig. 143). Wenn, wie angenommen werden soll, die quer zur Achse $\overline{ab}$ gerichtete Kraft eine in der Stabmitte angreifende Einzellast R ist, so ist das Moment für einen Schnitt z, y mit

$$M = Py + \frac{R}{2} z$$

anzuschreiben. Aus

$$EJ \frac{d^2 y}{dz^2} = -\left(Py + \frac{R}{2} z\right)$$

findet man (nach vorigem) die Gleichung der elastischen Linie mit

$$y = A \sin Nz + B \cos Nz - \frac{R}{2P} z.$$

Wegen der Symmetrie des Belastungsfalles fällt die elastische Linie für beide Stabhälften gleich aus. Danach bestimmen sich die Veränderlichen A und B: Aus $z = 0$ und $y = 0$ folgt

$$B = 0$$

und für $z = \frac{l}{2}$ und $\frac{dy}{dz} = 0$ erhält man

$$A = \frac{R}{2PN\cos\left(\frac{Nl}{2}\right)}.$$

Die größte Senkung f in der Stabmitte ergibt sich daraus mit

$$f = \frac{R}{2PN}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{Nl}{2}\right) - \frac{Nl}{2}\right). \tag{129}$$

Ersetzt man darin $\operatorname{tg}\left(\frac{Nl}{2}\right)$ durch eine Reihe, von welcher genau genug die ersten drei Glieder zu nehmen sind, und setzt außerdem für N seinen bekannten Wert ein, so folgt

$$f = \frac{Rl^3}{48EJ}\left(1 + \frac{Pl^2}{10EJ}\right). \tag{130}$$

Föppl bezeichnet den vor der Klammer stehenden Faktor, weil dieser die für $P = 0$ entstehende Senkung darstellt, mit f_0 und setzt $10 = \pi^2$. Dann erhält er die Beziehung

$$f = f_0\left(1 + \frac{P}{P_e}\right), \tag{131}$$

worin

$$P_e = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

die *theoretische* Knickkraft nach Euler bedeutet.

Läßt man in der Gl. (131) P von Null bis P_e wachsen, so wächst dabei der Biegungspfeil in der Stabmitte von f_0 bis $2f_0$. Es ist aber wohl zu beachten, daß vor Eintritt einer solchen Senkung bereits eine Überschreitung der Proportionalitätsgrenze hat stattfinden können.

Die Randspannungen im gefährlichsten Querschnitte berechnen sich (nach I. **107**) aus

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \left(Pf + \frac{Rl}{4}\right)\frac{e}{J}, \tag{132}$$

wenn e den Abstand der Randfaser von der zur Nulllinie parallelen und der Kraftlinie zugeordneten Schwerpunktsachse des Querschnittes bedeutet.

Vgl. die Übungsaufgaben unter **29**.

27. Ältere Knickformeln des 19. Jahrhunderts.

a. Schwarz-Rankine. Diese Formel ist zu verschiedenen Zeiten gefunden und gebraucht worden. Heute wird sie meist als die Rankinesche bezeichnet. Sie lautet

$$P = \frac{\sigma_d F}{1 + \gamma \left(\frac{l}{r}\right)^2},$$

worin l die Stablänge, σ_d die zulässige Druckspannung, r den kleinsten Trägheitshalbmesser und $F = \frac{J}{r^2}$ den zugehörigen Querschnitt bedeutet. γ ist eine für eine Reihe von Querschnitten aus Versuchen zu ermittelnde Erfahrungszahl. Bei der Ableitung der Formel setzt man (aus den unter **23**, a angegebenen Gründen) eine drückende *Längskraft* P voraus, also keine Achsenkraft. Deren Hebelarm v wird aller Wahrscheinlichkeit nach um so größer ausfallen, je länger der Stab und je kleiner der Abstand e der Randfaser von der Stabachse ist. Deshalb setzt man

$$v = \gamma \frac{l^2}{e}.$$

Man erhält dann (nach I. **107**, b) für eine Randspannung die Gleichung

$$\sigma_d = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{ve}{r^2}\right),$$

woraus durch Einsetzen des Wertes für v

$$\sigma_d = \frac{P}{F}\left(1 + \gamma \frac{l^2}{r^2}\right)$$

oder

$$P = \frac{\sigma_d F}{1 + \gamma \left(\frac{l}{r}\right)^2} \tag{133}$$

gefunden wird.

Rankines Knickformel hat den unleugbaren Vorzug, daß darin die zulässige Knickkraft P von der zulässigen Druckspannung σ_d abhängig gemacht wird. Dieser Vorzug wird aber reichlich durch die Schwierigkeit aufgehoben, welche in jedem Falle die zutreffende Festsetzung der Erfahrungszahl γ macht. Wenn γ für eine große Reihe von gebräuchlichen Querschnitten *unveränderlich* wäre, so ginge es noch an. Wie Tetmajer[1] nachgewiesen hat, ist aber das Gegenteil der Fall: γ ist keineswegs eine allein von der Beschaffenheit des Baustoffes abhängige Zahl. Sie wird

[1] Festigkeitslehre. 3. Aufl. S. 352, 401 und 410.

vielmehr auch von der Querschnittszahl und der Größe des unvermeidlichen aber unberechenbaren Hebelarmes v der Achsenkraft P beeinflußt. Wenn danach die RANKINE-Formel sich auch nicht auf rein wissenschaftlichem Grunde aufbaut, so ist es doch zulässig und bequem, sie in allen praktischen Fällen anzuwenden, in denen die Zahl γ durch Versuche genau genug ermittelt worden ist. TETMAJER selbst gibt auf Grund seiner Versuche folgende *Mittelwerte von* γ an.

Tabelle 8. Erfahrungszahl γ der Knickformel von SCHWARZ-RANKINE[1].

Baustoff	*Holz* (lufttrocken)	*Gußeisen* (liegend gegossen)	Schmiedbares Eisen		
			Schweißeisen	Flußeisen	Konstruktionseisen im Mittel
für $\frac{l}{r}$ =	20 bis 200	20 bis 150	20 bis 250	20 bis 250	20 bis 250
ist γ =	0,000 23	0,000 70[2]	0,000 16	0,000 14	0,000 15

Man vergleiche auch den Zusammenhang der RANKINE-Formel mit der von OSTENFELD vorgeschlagenen Knickformel (unter 28).

b. W. RITTER-ASIMONT-LANG.

1. Soweit bekannt, gebührt dem Prof. W. RITTER[3] in Zürich das Verdienst, die Gleichungen NAVIERS durch die Einführung der *Kernweite* vereinfacht zu haben.

Allgemein lautet (nach I. **107**) die Gleichung einer Spannung

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 \pm \frac{v y}{r_x^2}\right),$$

wobei v, y und r_x folgende Bedeutungen haben:

v senkrecht gemessener Abstand des Angriffspunktes der Längskraft P von der der Kraftlinie zugeordneten Schwerachse XX des Querschnittes,

y der in gleicher Weise gemessene Abstand eines Flächenpunktes $dx\,dy$,

r_x der auf die XX bezogene Trägheitshalbmesser.

[1] Vgl. Angaben über ältere Knickversuche in MEHRTENS, Mechanik fester Körper. Handbuch der Baukunde. Band I. Abt. I. S. 601.

[2] Nach des Verfassers Ansicht ist diese Zahl für Gußeisen als *Mittel*wert zu hoch gegriffen. Denn übereinstimmend geben andere Forscher, wie HODGKINSON, LAISSLE und SCHÜBLER, SCHAROWSKY, BAUSCHINGER *viel weniger an*: nämlich *im Mittel* 0,000 40. Vgl. hierzu die Übungsaufgaben (**29**).

[3] RITTER. Eine neue Festigkeitsformel. Civil-Ingenieur, 1876. Bd. 22. S. 309.

Die Umrißpunkte a und i, in denen die größten *Rand*spannungen σ_a und σ_i auftreten, liegen in Parallelen zur zugeordneten Achse, die bekanntlich der *Nullinie* parallel ist. Bedeutet nun ferner

y_n den Abstand einer den Querschnitt in a oder i berührenden Parallelen zur Nullinie,

k den Abstand eines in der Kraftlinie liegenden Kernpunktes,

so ist (nach I. **108**)

$$r_x^2 = - k y_n. \tag{134}$$

Aus dieser bekannten Beziehung gewinnt man für jede der beiden *Randspannungen* die einfache Gleichung

$$\sigma_{\max} = \sigma_s \left(1 + \frac{\delta + v}{k}\right), \tag{135}$$

worin, wie früher,

$$\sigma_s = \frac{P}{F}$$

die *Achsenspannung* des Stabes vorstellt, während v entweder ein zufälliger (unmeßbarer) Hebelarm von P oder der wirkliche Hebelarm der Längskraft ist. Diese Gleichung hat in neuerer Zeit für die Knickfestigkeit besondere Bedeutung gewonnen und zwar sowohl für die *reinen* ($v = 0$) als auch die *zusammengesetzten* Fälle ($v = v$). Deshalb hielt es Verfasser für angezeigt, hier auch derjenigen Männer zu gedenken, die zuerst damit rechneten.

2. Prof. ASIMONT[1] in München entwickelte ebenfalls die obige Gl. (135). Außerdem vereinfachte er die Formel von RANKINE, worüber in der angegebenen Quelle nachzulesen ist[2].

3. Prof. LANG[3] in Hannover gibt obige Gl. (135) in der Form

$$\sigma_{\max} = \sigma_s \left[1 + \frac{\alpha}{E} \sigma_s \left(\frac{l}{k_0}\right)^2\right]$$

und erhält daraus

$$\delta + v = \frac{\alpha}{E} \sigma_s \frac{l^2}{k_0}. \tag{136}$$

Die Erfahrungszahl α bleibt aus Elastizitätsversuchen, bei denen es auf die Ermittelung von δ ankommt, zu bestimmen. v ist für den Fall der *reinen* Knickfestigkeit unfreiwillig, zufällig und unmeßbar, darf aber ohne merklichen Fehler gleich Null gesetzt werden. k_0 ist *die kleinste Kernweite*, die (nach I. **112**) *der gefährlichsten Lage der Kraftlinie des Querschnittes entspricht.*

[1] ASIMONT, Zeitschr. f. Baukunde 1880. S. 30.

[2] Zeitschr. des bayer. Arch.- u. Ingen.-Ver. 1876—77. S. 120. — Auch in MEHRTENS, Mechanik fester Körper, a. o. O. S. 602.

[3] Rigaer Industrie-Zeitg. 1883, Nr. 23 und 1884, Nr. 22.

28. Neuere Knickformeln.

a. TETMAJER.

1. Wie (unter **25**, a) bereits ausführlich dargelegt wurde, ist es das besondere Verdienst TETMAJERS, die Grenzen der Gültigkeit der EULER-Formel durch zahlreiche Knickversuche festgelegt zu haben. Innerhalb dieser Grenzen rechnet TETMAJER deshalb nach der EULER-Formel, für die außerhalb der untern Grenze liegenden *kleinen* Werte des Verhältnisses von $l:r$ benutzt er aber eine *Geraden*formel, die er aus seinen Versuchen abgeleitet hat. Danach gestalten sich die Berechnungen TETMAJERS bei *reiner* Knickfestigkeit wie folgt, wobei Verfasser die stellenweise etwas umständliche *Bezeichnungs*weise TETMAJERS nicht immer beibehalten hat.

Bezeichnet man die *Knickfestigkeit* mit K und die *Druckfestigkeit* mit D, so führt TETMAJER eine sog. *Vermittelungszahl* α ein, die das Verhältnis von $K:D$ festlegt. Also

$$\alpha = \frac{K}{D} = \frac{\text{Knickfestigkeit}}{\text{Druckfestigkeit}}. \tag{137}$$

Ist ferner (wie früher) P_k die *wirkliche* Knickkraft im Augenblicke des Knickens, so ist

$$K = \frac{P_k}{F}$$

und

$$\alpha = \frac{P_k}{FD}.$$

Die EULERformel läßt sich danach in der Gestalt

$$K = \frac{P_k}{F} = \pi^2 E\left(\frac{r}{l}\right)^2 = \alpha D$$

anschreiben.

Wählt man den *Sicherheitsgrad* gegen Knicken gleich m und sind

$$\sigma_k = \frac{K}{m},$$

$$\sigma_d = \frac{D}{m}$$

die *zulässigen* Spannungen gegen Knicken und Druck, so folgt weiter

$$\sigma_k = \alpha \sigma_d. \tag{138}$$

In einem praktischen Falle sind D und m gegeben. P_k ist entweder nach der EULERformel oder nach der Geradenformel zu berechnen. Daraus folgen α und σ_k. Durch Probieren kann man dann

dem Querschnitte F solche Abmessungen geben, daß σ_k die zulässigen Grenzen nicht überschreitet. Näheres unter den Übungsaufgaben (**29**) und in den Tabellen (**30**).

2. Tritt an Stelle der Achsenkraft eine *Längs*kraft, handelt es sich also um einen Fall der *zusammmengesetzten* Knickfestigkeit, so schlägt TETMAJER das folgende Rechnungsverfahren ein.

Die Grundlage des Verfahrens bilden (für den Fall eines freien und eines eingespannten Stabendes) die beiden Gl. (127) und (128). Jene lautet

$$\delta + v = f_{\max} = \frac{v}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{\sigma_s}{E} + \frac{1}{24}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{\sigma_s}{E}\right]^2}, \tag{139}$$

worin für praktische Aufgaben das letzte Glied des Nenners ohne Bedenken fortgelassen werden kann

und
$$\sigma_{\max} = \sigma_s \left(1 + \frac{f_{\max}}{k}\right). \tag{140}$$

Es bedeuten (nach **26**)

v: Hebelarm der Längskraft P,
δ: Biegungspfeil am freien Stabende,
$\sigma_s = \frac{P}{F}$: Achsenspannung des Stabes,
k: eine der beiden Kernweiten,
$\sigma_{\max}$: eine Randspannung im gefährlichsten Querschnitte (in der Einspannung).

v und k können in der Kraftlinie des Querschnittes oder senkrecht zu der der Kraftlinie zugeordneten Achse XX gemessen werden.

Wenn die Gleichung für $\sigma_{\max}$ bis zur Knickgrenze gültig wäre, so müßten die danach berechneten Randspannungen Zahlenwerte gleich der Zug- oder Druckfestigkeit (Z oder D) geben. Die Gleichung gilt aber nur bis zur Proportionalitätsgrenze. Um sie aber auch bis zur Knickgrenze brauchbar zu machen, setzt TETMAJER

$$\sigma_{\max} = \frac{Z}{\alpha} \text{ oder } \frac{D}{\alpha}, \tag{141}$$

je nachdem eine Zug- oder Druckspannung in Frage kommt. Er bestimmt hier also die *Vermittelungszahl* α für *Druck* aus der Bedingung

$$\alpha = \frac{Dk}{\sigma_s (f + k)}. \tag{142}$$

Hierin ist bekanntlich die Kernweite

$$k = \frac{r_x^2}{y_n}.$$

Für schmiedbares Eisen kann $Z = D$ gesetzt werden.

Wesentlich für die Rechnung sind die aus den Versuchen TETMAJERS gewonnenen (unter **30** a angegebenen) Werte der Vermittelungszahlen α.

Der etwas umständliche Rechnungsgang gestaltet sich nach obigem wie folgt:

Man nimmt eine passende Achsenspannung σ_s' an, so daß

$$\sigma_s' < \sigma_s,$$

berechnet

$$F = \frac{mP}{\sigma_s'},$$

wobei der Sicherheitsgrad $m = 4$ bis 5 zu nehmen ist. Dann setzt man einen geeigneten Querschnitt des Inhaltes F zusammen, berechnet r und $\frac{l}{r}$, sowie

$$k = \frac{r}{y_n},$$

worin y_n den Abstand zwischen einer zur Nullinie (oder zur zugeordneten Achse XX) parallelen Berührungsgeraden des Querschnittumrisses und der Schwerachse XX bedeutet.

Damit hat man auch

$$f_{\max} = \frac{v}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{\sigma_s}{E}}$$

gefunden, wenn man das dritte Glied des Nenners in Gl. (139) fallen läßt. Somit ist

$$\sigma_{\max} = \sigma_s'\left(1 + \frac{f_{\max}}{k}\right)$$

gegeben. Schließlich ist zu probieren, ob das berechnete

$$\sigma_{\max} = \frac{D}{\alpha} \text{ oder} = \frac{Z}{\alpha}$$

ist. Trifft dies annähernd zu, so kann der gefundene Querschnitt beibehalten werden, sonst muß dieser durch nachträgliches Probieren den obigen Bedingungen bestens angepaßt werden. Näheres in den Übungsaufgaben unter **29**.

b. OSTENFELD.

1. Prof. OSTENFELD an der Technischen Hochschule in Kopenhagen hat in den Jahren 1898 und 1902 zwei sehr beachtenswerte Arbeiten über die Knickfestigkeit geliefert[1] und dabei das Verfahren TETMAJERS in manchen Punkten verbessert und vereinfacht. Zunächst handelt es sich hier um die *reine* Knickfestigkeit.

TETMAJER benutzt für die wichtigsten Konstruktionsstäbe und für die unterhalb der Gültigkeitsgrenzen der EULERformel liegenden wichtigsten Verhältnisse von $l:r$ eine *Geraden*formel, nur für Gußeisen kommt er zu einer *Parabel*formel (vgl. die Tabelle unter **30**, a). OSTENFELD hält mit Recht allgemein eine Parabelformel für zweckmäßiger und weist nach, wie mit der von J. B. JOHNSON[2] vorgeschlagenen Parabelgleichung

$$\sigma_s = \frac{P}{F} = \sigma_{\max} - \gamma\left(\frac{l}{r}\right)^2 \tag{143}$$

eine mindestens ebenso große Genauigkeit erzielt wird, wie mit den Geradenformeln TETMAJERS. In der JOHNSONformel ist

$$\sigma_{\max} = \frac{D}{\alpha},$$

wie im vorigen. α entspricht der Vermittelungszahl der Tabelle 9.

OSTENFELD legt außerdem ausführlich dar, wie jene Formel auch noch besondere Vorzüge gegenüber derjenigen TETMAJERS besitzt:

1) Die Parabelformel berührt die EULERlinie EE der Fig. 140. Sie enthält daher nur die eine Unveränderliche $\sigma_{\max}$, weil γ aus der Bedingung der Berührung abgeleitet werden kann.

Man erhält für den Berührungspunkt

$$\gamma = \frac{(\sigma_{\max})^2}{4\pi^2 E}$$

und

$$\left(\frac{l}{r}\right)^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_{\max}}. \tag{144}$$

Dagegen sind die beiden Unveränderlichen der Geradenformel voneinander unabhängig.

2) $\sigma_{\max}$ darf mit hinreichender Genauigkeit gleich der *Streck- oder Fließgrenze* des Baustoffes angenommen werden. Dagegen läßt sich

---

[1] OSTENFELD. Exzentrische und zentrische Knickfestigkeit. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1898, S. 1462. — Derselbe. Einige Bemerkungen über die Bestimmung der Abmessungen exzentrisch und zentrisch beanspruchter Säulen. Daselbst 1902, S. 1858.

[2] JOHNSON, Modern framed structures. New-York 1894, S. 148.

kein ähnlicher Zusammenhang zwischen den beiden Unveränderlichen der Geradenformel und den Eigenschaften des Baustoffes nachweisen.

Aus 1) und 2) folgt, daß man für einen Baustoff, für welchen noch keine Ergebnisse aus Knickversuchen vorliegen, sofort und genau genug die richtige Parabelformel anschreiben kann, während man in gleichem Falle von den Unveränderlichen der Geradenformel nichts weiß.

2. Für Schweißeisen und Flußeisen gibt OSTENFELD, unter Benutzung der Versuchsergebnisse TETMAJERS, die Parabelformel in folgender Gestalt

$$\sigma_k = \sigma_s \left[1 - \frac{1}{30000}\left(\frac{l}{r}\right)^2\right]. \tag{145}$$

Darin ist σ_k die zulässige Knickspannung bei m-facher Sicherheit, also

$$\sigma_k = \left(\frac{1}{m}\right)\frac{P}{F}$$

und

$$\sigma_s = \frac{1}{m}\sigma_{\max}.$$

Für Flußeisen, wenn dessen Streck- oder Fließgrenze gleich $2{,}7\ \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2}$ und $m = 4$ gesetzt wird, erhält man danach

$$\sigma_k = 700\left[1 - \frac{1}{30000}\left(\frac{l}{r}\right)^2\right]. \tag{146}$$

3. Um den Rechnungsgang möglichst ohne viel Probieren durchführen zu können schlägt OSTENFELD die Einführung folgender Bezeichnungen vor

$$\frac{P}{\sigma_s} = F_0, \qquad F = \beta r^2. \tag{147}$$

Das gibt

$$\sigma_k = \frac{P}{F} = \sigma_s\left(1 - \frac{\beta l^2}{30000 F}\right)$$

und

$$F = F_0 + \frac{\beta l^2}{3}, \tag{148}$$

wenn l in Metern und F, F_0 in cm eingeführt werden. Setzt man für β seinen Wert in Gl. (148), so erhält man

$$F = F_0 + \frac{F}{3}\left(\frac{l}{r}\right)^2.$$

Nach Gl. (144) ist für die JOHNSON-Parabel

$$\left(\frac{l}{r}\right)^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_{\max}}.$$

Das gibt für Flußeisen, mit $E = 2150 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$ und $\sigma_{max} = 2{,}7 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$

$$\frac{l}{r} = 125$$

als *Gültigkeitsgrenze*. Für $\frac{l}{r} = 122{,}5$ folgt aus der Gl. (148)

$$F = 2 F_0. \tag{149}$$

Damit hat OSTENFELD ein sehr einfaches (ausreichend genaues) Kennzeichen für die Gültigkeitsgrenze seiner Parabelformel gefunden. Es lautet:

Je nachdem

$$F \lesseqgtr 2 F_0$$

ist die Parabel- oder EULER-*Formel anzuwenden.*

Die Größe

$$\beta^{1} = \frac{F}{r^2} = \frac{F^2}{J_{min}}$$

ist eine reine Zahl und für geometrisch ähnliche Querschnitte unveränderlich. β wird sich demnach z. B. für die Normalwalzprofile gleicher Hauptform mit den Profilnummern nur wenig ändern. Man erkennt übrigens, wie β ein Maß für die Sparsamkeit der Querschnittsform bedeutet: *Je kleiner β, bei gegebenem J, desto kleiner F, d. h. desto geringer die Aufwendung an Baustoff.*

4. Die von OSTENFELD gemachten Angaben über die Größe der Zahl β für verschiedene wichtige Querschnitte vgl. in der Tabelle unter **30**, a, 3.

5. Bei der Berechnung der *zusammengesetzten* Knickfestigkeit rechnet OSTENFELD mit der Gl. (139) und führt das dadurch bestimmte f_{max} in die Gl. (140) ein. Er erhält dann nach verschiedenen Umformungen und Vereinfachungen, worüber die angegebene Quelle (1898) nachzulesen ist, für die *Achsen*spannung σ_s den Ausdruck

$$\sigma_s = \frac{\sigma_{max}}{1 + \frac{v}{k} + \gamma \left(\frac{l}{r}\right)^2}, \tag{150}$$

worin γ eine durch Versuche festzustellende Vermittelungszahl bedeutet und σ_s also annähernd *die gleichzeitig mit der größten Randspannung σ_{max} auftretende Achsenspannung* vorstellt. Die neue Formel ist zuerst von v. EMPERGER vorgeschlagen worden, wenn auch ohne Herleitung

[1] Die Hilfsgröße β ist zuerst (1893) von CL. FIDLER eingeführt worden in: A practical treatise on bridge-construction. London. 3. Aufl. 1901, S. 160—167.

aus den grundlegenden Gl. (139) und (140). Man sieht, daß sie insofern allgemein aufgebaut ist, als sie für $v = 0$ in die Formel RANKINES übergeht, also in gewissem Sinne auch den Sonderfall der *reinen* Knickfestigkeit in sich schließt. Daraus wäre zu schließen: Weil einerseits die Herleitung der Formel durch OSTENFELD auf einwandfreiem Wege aus den mathematischen Grundlagen der Knickfestigkeit — das sind die Gl. (139) und (140) — erfolgt ist und weil sie anderseits für $v = 0$ auch auf den Fall der reinen Knickfestigkeit anwendbar ist, *so gewinnt dadurch die Bedeutung der Formel* RANKINES[1]. Um die von v. EMPERGER vorgeschlagene und von OSTENFELD näher begründete Formel der Gl. (150) völlig brauchbar zu machen, fehlen nur noch einwandfreie Vermittelungszahlen γ für alle in Frage kommenden praktischen Fälle. Vorläufig genügen für den Gebrauch wohl die von TETMAJER für die Vermittelungszahl γ der RANKINE-Formel ermittelten Werte (Tabelle 8). Für schmiedbares Eisen wäre danach im Mittel

$$\gamma = 0{,}00015 \tag{151}$$

einzusetzen.

Setzt man für m-fache Sicherheit, wie früher

die zulässige *Rand*spannung $\sigma_{\max} = \frac{D}{\alpha m}$,

- - *Knick*spannung $\sigma_k = \frac{\sigma_s}{m} = \frac{P}{mF}$,

so erhält man die obige Formel in der Gestalt

$$\sigma_k = \frac{\sigma_{\max}}{1 + \frac{v}{k} + \gamma\left(\frac{l}{r}\right)^2} \tag{152}$$

oder auch

$$\sigma_{\max} = \sigma_k\left[1 + \frac{v}{k} + \gamma\left(\frac{l}{r}\right)^2\right]. \tag{153}$$

Für schmiedbares Eisen kann man (nach TETMAJER) hierbei setzen.

Tabelle 9. Erfahrungswerte nach TETMAJER.

Baustoff	D oder Z t/cm² im Mittel	α im Mittel	$\sigma_{\max} = \frac{D}{\alpha}$ oder $\frac{Z}{\alpha}$ t/cm²	γ
Schweißeisen	3,50	1,15	3,04	0,00016
Flußeisen	4,40	1,30	3,38	0,00014

Man vergleiche hierzu die ausführlichen Tabellen 11 und 12 (unter **30**).

[1] Vgl. auch eine ähnliche Herleitung der RANKINE-Formel in KROHN, Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 400.

6. Durch Einführung der Zahl

$$\beta = \frac{F}{r^2} = \frac{F^2}{J_{\min}}$$

und der Größe

$$F_0 = \frac{P}{\sigma_{\max}}$$

bringt OSTENFELD die Gl. (150) in die für den praktischen Gebrauch bequeme Form

$$F = F_0\left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta}{F_0}(v y_n + \gamma l^2)}\right]. \qquad (154)$$

Darin ist y_n der Abstand der am meisten gespannten Randfaser von der der Kraftlinie des Querschnittes zugeordneten Schwerachse. Näheres in den folgenden Übungsaufgaben.

29. Übungsaufgaben.

a. Vorbemerkungen über die Knicklänge. Beim Gebrauch der EULER-Gleichungen und anderer Knickformeln wird vorausgesetzt, daß bei der Bewegung der *freien* Stabenden keinerlei Reibungshindernisse oder dergl. auftreten. Sind beide Stabenden frei geführt, so denkt man sich z. B. jedes Ende mit einem reibungslosen Gelenke versehen (I. **15**). In den wirklichen Konstruktionen, und selbst bei Knickversuchen in der Festigkeitsmaschine, wird diese Voraussetzung aber nie ganz erfüllt. Man wird deshalb an jedem freien Stabende das Vorhandensein eines mehr oder weniger großen Momentes zu berücksichtigen haben. Sind die Stabenden in Wirklichkeit mit Gelenken versehen, so ist es Gebrauch, diese als reibungslos wirkend anzusehen und, im Hinblick auf die durch das unvermeidliche Reibungsmoment verursachte *Vergrößerung* der Knickkraft, einen entsprechend *niedrigen* Sicherheitsgrad zu wählen. Bei Konstruktionen aus *Holz* (und wohl auch aus *Gußeisen*) wird die Lastübertragung aber am freien Stabende häufig durch *stumpfen Stoß*, ohne Beihilfe von Schrauben oder dergl. bewirkt, derart daß eine wirkliche *Einspannung* (I. **14**) nicht vorhanden ist. In solchen Fällen ist die dadurch herbeigeführte Vergrößerung von P am einfachsten durch Einführung einer *entsprechend kleinen Knicklänge* l zu berücksichtigen.

Ist ein Stab, wie es in europäischen Eisenkonstruktionen die Regel bildet, an beiden *Knoten*enden (I. **14**) *vernietet*, so müßte er eigentlich so berechnet werden, als ob er an jedem Ende *eingespannt* wäre. Das geschieht aber gewöhnlich nicht. Man rechnet nämlich die von den Einspannungen herrührenden Vergrößerungen oder Verkleinerungen der

in bekannter Weise (unter Annahme *reibungs*loser Knotengelenke) ermittelten Stabkräfte (*Achsen*kräfte) zu den *Nebenspannungen* (Zweiter Abschnitt). So kommt es, daß die Einspannungen auch bei der Berechnung der *Knickfestigkeit* eines Konstruktionsstabes als reibungslose Gelenke angesehen werden. Ob dann der dabei gebräuchliche Sicherheitsgrad $m = 4$ bis 5 nicht zu hoch bemessen ist, dürfte allgemein schwer zu entscheiden sein. Berechtigt erscheint die Annahme einer so hohen Sicherheit nur im Hinblick auf den Umstand, daß in den vernieteten Stabenden die Stabkraft in der Regel keine reine Achsenkraft, sondern vielmehr eine mehr oder weniger außerhalb des Stabmittels angreifende Längskraft ist.

Nach obigen kann in besondern Fällen die rechnungsmäßige Knicklänge l der EULER-Formeln (S. 162) gewählt werden:

für *stumpfen Stoß* oder *Flächenlagerung* an beiden Enden (bei Holz oder Gußeisen) . . . . . 0,90 bis 0,85 l

- *Niet*anschlüsse der beiden Enden in Fachwerken, je nach der Lage des Falles . . . 0,70 bis 1,00 l
- einmalige vernietete Kreuzung eines Stabes der Länge l in zweiteiligen Wandgliederungen etwa 1,80 l.[1]

b. Holz und Gußeisen.

Aufgabe 38. *Ein* 4,5 m *langer, im Querschnitt quadratischer Holzpfosten* (Fig. 144), *ist unten mit stumpfen Stoß auf einen Quader gestützt, während das obere Ende von Zangen umfaßt wird, die eine Achsenkraft von* 25,0 t *übertragen. Die Abmessungen des Pfostens bei* 5*facher Sicherheit gegen Knicken sind nach* TETMAJER, EULER *und* RANKINE *zu berechnen.*

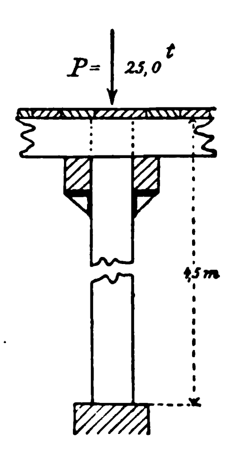


Fig. 144.

Nach der Tabelle 7 ist die Druckfestigkeit D des Nadelholzes mit

$$D = 0{,}280 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$$

anzuschreiben. Das gibt eine zulässige Druckspannung

$$\sigma_d = \frac{0{,}280}{5} = 0{,}056 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}.$$

TETMAJER nimmt in diesem Falle freie Führung beider Enden an, wobei wegen des untern stumpfen Stoßes

$$l = 0{,}85 \cdot 4{,}5 = 3{,}825 \text{ m}$$

angesetzt wird.

[1] Vgl. die Versuche in TETMAJER, Festigkeitslehre, 3. Aufl. S. 397.

Das Verhältnis der Länge von 4,5 m zur Seitenbreite b des Quadratquerschnittes ist in der Regel innerhalb gewisser Grenzen durch praktische Rücksichten festgelegt. Nimmt man vorläufig

$$\frac{b}{l} = \frac{1}{15}$$

an, so berechnet sich aus

$$b^2 r^2 = \frac{b^4}{12}$$

der Trägheitshalbmesser mit

$$r = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

und das Verhältnis

$$1) \qquad \frac{l}{r} = 52 .$$

Diese Zahl liegt (nach Tabelle 11, **30**) *außerhalb der Gültigkeitsgrenze* der EULER-Gleichung. Für $\frac{l}{r} = 50$ ist nach der Tabelle 11 die Vermittelungszahl $\alpha = 0{,}7$. Die zulässige Knickspannung ergibt sich danach mit

$$\sigma_k = 0{,}7 \cdot \sigma_d = 0{,}7 \cdot 0{,}056 = 0{,}039 \, \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2}$$

und der Pfostenquerschnitt mit

$$F = \frac{P}{\sigma_k} = \frac{25{,}0}{0{,}039} = 641{,}0 \ \mathrm{cm}^2 ,$$

d. h.

$$2) \qquad b = 25{,}3 \ \mathrm{cm}.$$

Dem entspricht ein Trägheitshalbmesser

$$r = 7{,}31 \ \mathrm{cm}$$

oder ein Verhältnis

$$\frac{l}{r} = 52{,}3 ,$$

was sich mit der obigen Annahme 1) befriedigend deckt.

2. Wenn man die EULER-Gleichung benutzt, *obwohl der obige Fall* (nach TETMAJER) *außerhalb ihrer Gültigkeitsgrenzen liegt*, so erhält man, bei 5facher Sicherheit, nach der Gl. (107) für den ersten Hauptfall

$$\max P = \frac{10 \cdot EJ}{5 \cdot 382{,}5^2} = \frac{10 \cdot 100 \cdot 25{,}3^4}{12 \cdot 5 \cdot 382{,}5^2}$$

oder

$$\max P = 47 \ \mathrm{t}.$$

Das gäbe eine Achsenspannung

$$\sigma_s = \frac{P}{F} = \frac{47\,000}{641} = 73 \text{ atm.}$$

Danach liefert die EULER-Gleichung offenbar hier eine zu große Tragkraft.

3. Aus der RANKINE-Formel

$$\max P = \frac{\sigma_d \cdot F}{1 + \gamma\left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

erhält man bei gleicher Knicklänge und 5 facher Sicherheit

$$\max P = \frac{\frac{1}{5} \cdot 0{,}28 \cdot 641}{1 + 0{,}000\,23 \cdot 52{,}3^2} = 22 \text{ t},$$

wenn die Erfahrungszahl γ aus der Tabelle 8 (**24**) mit 0,000 23 entnommen wird.

Man sieht, wie die RANKINE-Formel hier zweifellos noch viel richtigere Ergebnisse liefert als die EULER-Formel.

Aufgabe 39. *Eine gußeiserne* 4 m *hohe, am untern Ende eingespannte Hohlsäule, am obern Ende frei an der Achse geführt, soll bei* 5 *facher Sicherheit eine Achsenlast von* 50 t *tragen. Welche Abmessungen muß sie* (nach EULER und TETMAJER) *erhalten?*

Hier liegt der 4. Hauptfall vor: .

$$\max P = \frac{20 EJ}{5 \cdot l^2}$$

oder

$$J = \frac{5 l^2 \cdot P}{20 E}.$$

Das gibt für $E = 1000$

$$J = \frac{5 \cdot 400^2 \cdot 50}{20\,000} = 2000 \text{ cm}^4.$$

Aus den im *Anhange* gegebenen Tabellen 16—17 (**30**) entnimmt man die für vorliegenden Fall passenden Abmessungen. Es kämen in Frage Säulen mit

	Durchmesser d cm	Wandstärke δ cm	Querschnittsfläche F cm²	Trägheitsmoment J cm⁴
1)	16,5	1,5	70,69	2008
2)	16,0	2,0	87,97	2199
3)	15,0	2,5	98,18	1994

Nimmt man die Druckfestigkeit des Gußeisens (nach Tabelle 7) mit $8 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2}$, so berechnet sich die Achsenspannung für die Säule 1) mit

$$\sigma_s = \frac{P}{F} = \frac{50000}{70,69} = 707 \text{ atm.}$$

Streng genommen soll σ_s die zulässige Knickspannung σ_k nicht überschreiten. Diese bestimmt man am besten nach TETMAJER und der Tabelle 11 (**30**) aus

$$\sigma_k = \alpha \sigma_d .$$

Dabei braucht man das Verhältnis $\frac{l}{r}$. Dafür erhält man nach a

$$\frac{l}{r} = \frac{0,71 \cdot l}{\sqrt{\frac{J}{F}}} = \frac{0,71 \cdot 400}{\sqrt{\frac{2008}{70,69}}} = 54.$$

Die Gültigkeitsgrenze der EULER-Formel liegt aber für Gußeisen etwa bei 80. Die Vermittelungszahl α ist nach der Tabelle 11 unter **30**

$$\text{für } \frac{l}{r} = 54$$

genau genug

$$\alpha = 0,348.$$

Das gibt

$$\sigma_k = 0,348 \cdot \frac{8000}{5} = 557 \text{ atm.}$$

Die mit 707 atm vorhin berechnete *Achsen*spannung übersteigt demnach die zulässige Knickspannung. Somit müßten die gewählten Abmessungen für die Säule noch vergrößert werden.

c. Schmiedbares Eisen.

Aufgabe 40.[1] *Eine flußeiserne (an beiden Enden in der Achse geführte) Säule von 7,5 m Länge trägt eine Achsenkraft von 50 t. Ihr Querschnitt besteht aus zwei* U*-Eisen, die soweit voneinander abstehen, daß $J_x = J_y$ wird. Welche deutsche Normalprofile sind zu wählen, wenn die beiden* U*-Eisen durch Querverbindungen zu einem einheitlichen Querschnitte verbunden werden und der Sicherheitsgrad gleich 4 sein soll?*

1. Maßgebend ist die Gl. (145)

$$\sigma_k = 700\left(1 - \frac{l^2}{30000\, r^2}\right).$$

---

[1] Nach OSTENFELD.

Ferner ist nach Gl. (147 und 148)

$$F_0 = \frac{P}{\sigma_z} = \frac{50000}{700} = 71 \text{ cm}^2$$

und

$$F = F_0 + \frac{\beta l^2}{3} = 71 + \frac{1,2 \cdot 7,5^2}{3} = 93,6 \text{ cm}^2,$$

worin β nach der Tabelle 13 (**30**) von OSTENFELD vorläufig zu 1,2 angesetzt worden ist.

Weil nun F kleiner als $2 F_0$ ist, so gilt die *Parabel*formel. Zwei **U**-Eisen Nr. 26 geben $F = 96,6$ cm² und dafür berechnet sich

$$\beta = \frac{F^2}{J_{\min}} = \frac{96,6^2}{9646} = 0,97.$$

Diesen Wert oben eingesetzt gibt

$$F = 71 + 0,97 \cdot 18,8 = 89,3 \text{ cm}^2.$$

Danach kann die gewählte Nr. 26 beibehalten werden.

2. Der Trägheitshalbmesser des Querschnitts berechnet sich mit

$$r = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{9646}{93,6}} = 10,1.$$

Daraus

$$\frac{l}{r} = \frac{750}{10,1} = 75$$

und

$$\sigma_k = 700\left(1 - \left(\frac{1}{30000}\right) 75^2\right) = 569 \text{ atm}.$$

Nach TETMAJER Tabelle 11 (**30**) ist die Vermittelungszahl α

$$\text{für } \frac{l}{r} = 70\colon\ \alpha = 0,606,$$

$$\text{„ } \frac{l}{r} = 80\colon\ \alpha = 0,576.$$

Im Mittel für $\frac{l}{r} = 75$ also

$$\alpha = 0,588.$$

Die Druckfestigkeit D des Flußeisens ist nach derselben Tabelle gleich $3,8 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$, daher *zulässig*

$$\sigma_k = \alpha \cdot \frac{D}{4} = 0,588 \cdot 0,95 = 559 \text{ atm}.$$

Man sieht daher schließlich, wie die nach der *Parabel*formel berechnete *zulässige Knickspannung* σ_k im vorliegenden Falle mit den Versuchszahlen TETMAJERS sehr gut stimmt.

Aufgabe 41. *Eine schweißeiserne* (*an beiden Enden frei drehbare*) *nnd* 8,9 m *lange Säule mit einem Kreisringquerschnitt trägt eine Längskraft P von* 36,0 t, *die in einem Abstande* $v = 3{,}55$ cm *vom Kreisringmittel angreift. Welche Abmessungen muß sie* (nach OSTENFELD und TETMAJER) *erhalten, wenn 4fache Sicherheit verlangt wird?*

In der von OSTENFELD für den praktischen Gebrauch hergerichteten Formel Gl. (154)

$$F = F_0 \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta}{F_0} (v y_n + \gamma l^2)} \right]$$

ist

$$F_0 = \frac{P}{\sigma_{\max}},$$

$$\beta = \frac{F^2}{J_{\min}}.$$

Ferner ist (aus der Tabelle 8) für Schweißeisen

$$\gamma = 0{,}00016$$

zu entnehmen, sowie auch die *zulässige Randspannung*

$$\sigma_{\max} = \frac{D}{4\alpha} = \frac{3{,}04}{4} = 0{,}76 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}.$$

Das gibt

$$F_0 = \frac{36\,000}{760} = 47{,}4 \text{ cm}^2.$$

Der Wert von β muß zuerst nach der von OSTENFELD gegebenen Tabelle 13 (**30**, a) geschätzt werden. Zu diesem Zwecke nehmen wir vorläufig (nach unserer Tabelle 16 (**30**, b) für den Kreisringquerschnitt

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Durchmesser} & 2\varrho = 25 \text{ cm} \\ \text{Wandstärke} & \delta = 2 \text{ cm}\end{array}\right\} \text{ oder } \delta = 0{,}16\,\varrho.$$

Dafür ist aus der Tabelle 13 (**30**, a) durch Interpolation

$$\beta = 1{,}85$$

zu finden. Der Abstand der Randfaser vom Querschnittsmittel ist danach vorläufig mit

$$y_n = 12{,}5 \text{ cm}$$

einzusetzen. Daraus berechnet sich

$$F = 47{,}4 \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1{,}85}{47{,}4} (3{,}55 \cdot 12{,}5 + 0{,}00016 \cdot 890^2)} \right] = 146{,}4 \text{ cm}^2.$$

Die vorläufig angenommene Querschnittsfläche ist allerdings nur 144,51 cm² groß. Der Unterschied zwischen beiden Zahlen ist aber so gering, daß eine nochmalige Rechnung nicht notwendig erscheint.

Zur *Nachprüfung* berechnen wir nochmals die wirklich eintretende *Knickspannung* aus der Gl. (139)

$$f_{\max} = \frac{v}{1 - \frac{1}{8}\left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{\sigma_s}{E}},$$

worin $f_{\max} = \delta + v$ den Hebelarm der Längskraft P in der Stabmitte nach erfolgter Biegung vorstellt.

Wir erhalten

$$v = 3{,}55 \text{ cm},$$

$$r = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{9628}{144{,}51}} = 8{,}16 \text{ cm},$$

$$r^2 = 66{,}6 \text{ cm}^2,$$

$$\left(\frac{l}{r}\right)^2 = \frac{792\,100}{66{,}6} = 11\,893,$$

$$\sigma_s = \frac{36{,}0}{144{,}51} = 0{,}249 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2},$$

$$E = 2000 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2},$$

oder

$$f_{\max} = \frac{3{,}55}{1 - \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{0{,}249}{2\,000}\right) 11\,893} = 4{,}35 \text{ cm}.$$

Daraus nach Gl. (140) die größte Randspannung

$$\sigma_{\max} = \sigma_s \left(1 \pm \frac{f_{\max}}{k}\right).$$

Darin ist

$$k = \frac{r^2}{y_n} = \frac{66{,}6}{12{,}5} = 5{,}328 \text{ cm}.$$

Die größte Randspannung ist ein *Druck*, und er berechnet sich mit

$$\sigma_{\max} = 249 \left(1 + \frac{4{,}35}{5{,}328}\right) = 452 \text{ atm}.$$

Die Biegungsspannung am Rande bleibt danach bedeutend unter der oben auf 760 atm festgelegten Grenze. TETMAJER, der die obige Aufgabe nach seinem Verfahren behandelt, erhält

$$\sigma_s = 274 \text{ atm},$$
$$f_{\max} = 4{,}40 \text{ cm},$$
$$\sigma_{\max} = 500 \text{ atm},$$

wobei er

$$2\varrho = 25{,}0 \text{ cm},$$
$$\delta = 1{,}8 \text{ cm}$$

zu Grunde legt[1].

Aufgabe 42[2]. *Ein flußeiserner gerader Stab, kreisförmigen Querschnittes, der 50mal länger als sein Durschmesser d und spannungslos ist, wird an beiden Enden durch Gelenke gefaßt* (Fig. 145) *und darauf gleichmäßig erwärmt. Bei welcher Temperatur und Spannung beginnt er sich zu biegen und wie wächst die Spannung mit zunehmender Temperatur?*

1. Erwärmt man den Stab über diejenige Temperatur hinaus, bei welcher er spannungslos ist, um t Grad, so ist nach dem Elastizitätsgesetze die in ihm entstehende Temperaturspannung (nach I. **8** und **4**, b)

$$\sigma_t = \alpha_t t E,$$

wenn α_t die Temperaturdehnung für 1° C. vorstellt. Im Augenblicke, wo die Biegung beginnt, ist die elastische Linie durch die Gl. (124)

$$y = \delta\,(1 - \cos Nz) \qquad (155)$$

bestimmt, worin $v = 0$ gesetzt und

$$N^2 = \frac{P}{EJ}$$

ist.

Fig. 145.

Daraus findet man

$$\frac{dy}{dz} = N\delta \sin Nz$$

und daraus das Bogenelement

$$ds = dz\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} = \left(1 + \frac{N^2\delta^2 \sin^2 Nz}{2}\right) dz,$$

wenn das Quadrat des letzten Gliedes als verschwindend vernachlässigt wird.

[1] Festigkeitslehre. 3. Aufl. S. 376.

[2] MEHRTENS, Handbuch der Baukunde. I. Band. S. 604.

Die zu einer Wellenlänge λ gehörige Abszisse z ist (nach Gl. 3 unter **23**, b) allgemein gleich $\frac{2\pi}{N}$. Deshalb ist die Bogenlänge s einer Welle mit

$$s = \int_{Nz=0}^{Nz=2\pi} \left(1 + \frac{N^2\delta^2 \sin^2 Nz}{2}\right) dz$$

oder

$$s = \frac{2\pi}{N} + \frac{N\delta^2}{2} \int_{Nz=0}^{Nz=2\pi} \sin^2(Nz)\, N dz.$$

Das gibt

$$s = \frac{2\pi}{N}\left(1 + \frac{N^2\delta^2}{4}\right).$$

Die Verlängerung Δz der Stabachse auf einer Strecke z infolge der Biegung beträgt danach

$$\Delta z = \frac{2\pi}{N}\left(1 + \frac{N^2\delta^2}{4}\right) - \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{N}\left(\frac{N^2\delta^2}{4}\right).$$

Daraus folgt der Ausdruck der *Dehnung* mit

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta z}{\left(\frac{2\pi}{N}\right)} = \frac{N^2\delta^2}{4}.$$

Diese Dehnung setzt sich zusammen aus der Temperaturdehnung für t Grad und der entgegengesetzt gerichteten Zusammendrückung infolge der von der Temperaturdehnung verursachten Achsenkraft P. Daraus folgt

$$1) \qquad \frac{N^2\delta^2}{4} = \alpha_t t - \frac{\sigma_s}{E},$$

wenn σ_s die Achsenspannung vorstellt. Das gibt

$$\delta = \frac{2}{N}\sqrt{\alpha_t t - N^2 r^2},$$

wenn r der Trägheitshalbmesser ist.

Im vorliegenden besondern Falle ist die Wellenlänge (nach Fig. 126) gleich $2l$, also

$$2) \qquad \delta = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\alpha_t t - \left(\frac{\pi r}{l}\right)^2}.$$

Die durch die Biegung hervorgerufene größte Spannung ist (nach Gl. 135)

$$3) \qquad \sigma_{\max} = \sigma_s\left(1 + \frac{\delta}{k}\right),$$

worin k die Kernweite bedeutet.

Die Biegung beginnt mit einer Temperaturerhöhung um t_1 Grad, für welche $\delta = 0$ sein muß. Das gibt nach 2)

$$4)\qquad t_1 = \frac{\pi^2 r^2}{\alpha_t l^2}. \qquad (156)$$

Die Biegung beginnt demnach mit der Achsenspannung

$$5)\qquad \sigma_s = \alpha_t t_1 E.$$

2. Die erstgestellte Frage ist damit beantwortet. Für $\alpha_t = 0{,}000012$ und $\pi^2 = 10$ erhält man

$$t_1 = \frac{10\left(\frac{d^2}{16}\right)}{0{,}000012 \cdot (50\,d)^2} = 20{,}9 \text{ Grad.}$$

Die zweite Frage beantwortet sich wie folgt: Setzt man in 1) für N^2 seinen Wert $\frac{\pi^2}{l^2}$, so gibt das

$$\frac{\pi^2 \delta^2}{4 l^2} + \frac{\sigma_s}{E} = \alpha_t t$$

oder in Verbindung mit 5)

$$\frac{\pi^2 \delta^2}{4 \alpha_t l^2} = t - t_1$$

und, in Verbindung mit 4)

$$\left(\frac{\delta}{2r}\right)^2 = \frac{t - t_1}{t_1} = \frac{4\delta^2}{d^2}.$$

Nach 3) ist ferner

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_s} - 1 = \frac{\delta}{k} = \frac{8\delta}{d}.$$

Wird das Verhältnis der größten Biegungsspannung σ_{max} zur Achsenspannung σ_s gleich m gesetzt, so folgt

$$6)\qquad t - t_1 = \frac{(m-1)^2}{16} \cdot t_1.$$

Aus 5) berechnet sich

$$\sigma_s = 0{,}000012 \cdot 20{,}9 \cdot 2000 = \text{rund } 0{,}500 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}.$$

Nimmt man die Proportionalitätsgrenze des Flußeisens mit $2{,}5 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$ an, so würde, um eine solche größte Biegungsspannung in der Stabmitte zu erzeugen, noch eine Temperaturerhöhung über t_1 hinaus von

$$t - t_1 = \left(\frac{2,5}{0,5} - 1\right)^2 \frac{20,9}{16} = 20,9 \text{ Grad}$$

eintreten. Die Gesamttemperatur würde danach

$$t = 41,8 \text{ Grad}$$

betragen.

Der dabei eintretende Biegungspfeil δ berechnet sich nach 2).

d. Stein und Stein-Eisen.

1. In der Regel wird man bei Pfeilern oder Stützen aus Stein und Stein-Eisen das Verhältnis von $\frac{l}{r}$ klein genug halten, um eine Gefahr des Knickens auszuschließen. Nach dem vom Verbande deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine und dem deutschen Betonvereine aufgestellten Entwurfe für »*Vorbereitung, Ausführung und Prüfung von Eisenbetonbauten*« ist die Knickgefahr ausgeschlossen, wenn die Stützen folgende Abmessungen erhalten:

Tabelle 10. Kleinste Durchmesser d oder Breiten b von Säulen, oder Stützen.

Achsenspannung σ_s in atm	Runde Säulen min. d	Rechteckige Stützenquerschnitte min. b
30	$\frac{1}{18} l$	$\frac{1}{21} l$
35	$\frac{1}{17} l$	$\frac{1}{20} l$
40	$\frac{1}{16} l$	$\frac{1}{19} l$
45	$\frac{1}{15} l$	$\frac{1}{18} l$
50	$\frac{1}{14} l$	$\frac{1}{17} l$

Steinerne Stützen von obigem Längenverhältnisse brauchen auf Knickfestigkeit nicht untersucht zu werden, wenn nur eine *Achsenkraft* zur Wirkung gelangt. Ihre Berechnung erfolgt nach den (unter I. **124**) entwickelten Gl. (135) bis (139). Ist eine am Hebelarm x angreifende *Längskraft* vorhanden, so kommen die dortigen Gl. (140) und (141) in Betracht.

2. Maßgebende Versuche über die Knickfestigkeit von Stein- und Steineisenstützen fehlen zur Zeit noch[1]. Auch liegt es nach den voraufgegangenen Betrachtungen (**25**—**27**) auf der Hand, daß für so wenig

[1] Tetmajer. Festigkeitslehre. 3. Aufl. 1905. S. 402.

elastische Stützen, wie es Steinsäulen oder dgl. in der Regel sind, die Berechnung nach der EULER-Formel nicht am Platze ist. Hier empfiehlt sich am meisten die RANKINE-Formel (**27**) oder eine der (unter **28**) gegebenen Formeln. Allerdings fehlt es dabei auch an zuverlässigen Werten der *Vermittelungszahl* γ. Jedoch wäre es wohl möglich, besonders für *Betoneisen*stützen, die Zahl γ in der Weise zu erhalten, daß man (nach I. **124**) den Betoneisenquerschnitt F_b in einen *gleichwertigen Eisen*querschnitt F_e verwandelte und für diesen die Vermittelungszahl γ aus den für Eisen vorliegenden Knickversuchen entnimmt. Denn rein theoretisch — abgesehen von dem verschiedenen, noch nicht ausreichend geklärten Verhalten zwischen Eisen und Beton während der gemeinsamen elastischen Biegung — muß in beiden Fällen, ob man mit F_e oder F_b rechnet, die Knickkraft P gleich groß ausfallen.

Denn (nach I. **124** Gl. (139)) ist anzuschreiben

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = \frac{F_e}{F_b}. \tag{157}$$

Bei der Biegung ist

$$\sigma_b = \frac{M_k}{F_b k_b}$$

und

$$\sigma_e = \frac{M_k}{F_e k_e},$$

wenn M_k das Kernmoment (I. **112**) und k_b, k_e die betreffenden Kernweiten vorstellen. Daraus folgt

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = \frac{F_e k_e}{F_b k_b}$$

und in Verbindung mit Gl. (157)

$$k_e = k_b.$$

Die Kernweiten beider gleichwertigen Querschnitte sind also gleich, *deshalb sind es auch die Trägheitshalbmesser r*. Somit hat man (rein theoretisch) zwei RANKINE-Formeln für die Berechnung zur Verfügung, nämlich

$$P = \frac{\sigma_b F_b}{1 + \gamma\left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

und

$$P = \frac{\sigma_e F_e}{1 + \gamma\left(\frac{l}{r}\right)^2}. \tag{158}$$

In beiden Gleichungen sind γ, l und r gleiche Werte. Entscheidend für die Anwendung der Formeln wäre die Festsetzung des Verhältnisses der Dehnungsmaße für Beton und Eisen.[1] Das schwankt heute noch etwa innerhalb der Grenzen

$$\frac{1}{10} \text{ und } \frac{1}{15}\cdot$$

Für den vorliegenden Fall der Knickfestigkeit empfiehlt sich wohl — aus Sicherheitsgründen — den kleinsten Wert zu wählen, weil dann die zulässige Druckspannnng σ_b innerhalb angemessener Grenzen bleibt. Die Vermittelungszahl γ der RANKINE-Formel müßte aus *Durchbiegungsversuchen an der Proportionalitätsgrenze des Eisens* bestimmt werden.

Nimmt man an, daß das Eisen im Augenblicke des Knickens höchstens an seiner Fließgrenze angelangt sein darf und setzt diese, wie früher, mit etwa

$$3{,}0 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2}$$

fest, so würde damit die Druckfestigkeit des Betons auf

$$\frac{3{,}0}{15} = 0{,}20 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^2}$$

begrenzt werden. Bei *fünf*facher Sicherheit gäbe das

$$\sigma_b = 40 \text{ atm}; \quad \sigma_e = 600 \text{ atm}.$$

Die Vermittelungszahl γ wäre für den gleichwertigen Eisenquerschnitt F_e (nach Tabelle 8 unter **27**) durchschnittlich mit

$$\gamma = 0{,}00015$$

einzusetzen sein.

3. Aufgabe 43. *Der in der* Fig. 146 *dargestellte Betoneisenquerschnitt einer* 10 m *hohen Stütze* (vgl. I. **124**, a) *trägt eine Achsenlast von* 30 t. *Er ist* 30×30 cm *breit und durch* 8 *Rundeisen von je* 20 mm *Durchmesser, deren Mittel* 25 mm *vom Betonrande liegen, verstärkt. Wie groß ist der Sicherheitsgrad der Konstruktion?*

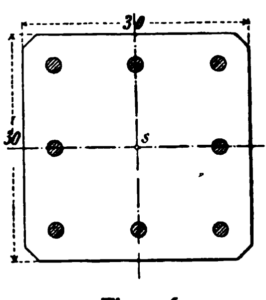


Fig. 146.

Wir berechnen zuerst einen vollen Eisenquerschnitt F_e, der dem gegebenen Betoneisenquerschnitt *gleichwertig* ist (nach Gl. (139) unter I. S. 393)

$$F_e = f_e + \beta f_b$$

[1] TETMAJER, Festigkeitslehre. 3. Aufl. 1905. S. 475. — MÖRSCH, Der Betoneisenbau. 1902. S. 77.

oder

$$F_e = \frac{8 \cdot 2^2 \cdot \pi}{4} + \tfrac{1}{15}\left[900 - \frac{8 \cdot 2^2 \cdot \pi}{4}\right] = 83{,}4 \text{ cm}^2$$

und

$$J_e = 6 \cdot 3{,}14 \cdot 12{,}5^2 + 2 \cdot 0{,}785$$

$$+ \frac{1}{15}\left[\frac{30^4}{12} - (6 \cdot 3{,}14 \cdot 12{,}5^2)\right] = 7248{,}87 \text{ cm}^4.$$

Daraus

$$r^2 = \frac{J_e}{F_e} = \frac{7248{,}87}{83{,}4} = 86{,}9 \text{ cm}^2.$$

Aus der RANKINE-Formel erhält man danach

$$P = \frac{3000 \cdot 83{,}4}{1 + 0{,}00015\left(\frac{800^2}{86{,}9}\right)}$$

oder es ist der Sicherheitsgrad

$$s = \frac{1}{30000}\left[\frac{3000 \cdot 83{,}4}{1 + 0{,}00015\left(\frac{640000}{86{,}9}\right)}\right] = 3{,}97.$$

Zu gleichem Ergebniß kommt man, wenn man mit F_b und σ_b rechnet.

MÖRSCH rechnet mit $\gamma = 0{,}0001$. Das gäbe im obigen Falle

$$s = 4{,}85.$$

Auf die unter der folgenden Nummer gegebenen »Tabellen zur Knickfestigkeit« wird besonders aufmerksam gemacht. Sie enthalten außer den wichtigsten *Erfahrungszahlen* für die im vorigen entwickelten Formeln auch die Flächeninhalte, Trägheitsmomente und Trägheitshalbmesser für die in Eisenkonstruktionen gebräuchlichsten einfachen und zusammengesetzten Querschnittsformen.

30. Tabellen zur Knickfestigkeit.

a. Tabellen zu den Knickformeln von TETMAJER und OSTENFELD.

1. Tabelle 11. Ergebnisse aus den Knickversuchen von TETMAJER[1].

Baustoff	Druckfestigkeit D in $\frac{t}{cm^2}$	$\frac{l}{r}$ Grenzen	$K = \frac{P_k}{F}$ in $\frac{t}{cm^2}$	$\alpha = \frac{K}{D}$ für die Verhältnisse $\frac{l}{r}$ =							
				40	50	60	70	80	90	100	110
Nadelholz	0,280	< 100	$0{,}293 - 0{,}00194\left(\frac{l}{r}\right)$	0,771	0,700	0,632	0,561	0,493	0,421	—	—
		> 100	EULER-Formel	—	—	—	—	—	—	0,353	0,293
Graues[2] Gußeisen	8,00	< 80	$7{,}76 - 0{,}12\left(\frac{l}{r}\right) + 0{,}00053\left(\frac{l}{r}\right)^2$	0,476	0,386	0,309	0,245	—	—	—	—
		> 80	EULER-Formel	—	—	—	—	0,194	0,152	0,123	0,102
Schweißeisen	3,50	< 112	$3{,}03 - 0{,}013\left(\frac{l}{r}\right)$	0,717	0,680	0,643	0,606	0,569	0,531	0,494	0,457
		> 112	EULER-Formel	—	—	—	—	—	—	—	—
Flußeisen	3,80	< 105	$3{,}10 - 0{,}0114\left(\frac{l}{r}\right)$	0,696	0,666	0,636	0,606	0,576	0,546	0,516	—
		> 105	EULER-Formel	—	—	—	—	—	—	—	0,483
Flußstahl	6,00	< 89	$3{,}350 - 0{,}0062\left(\frac{l}{r}\right)$	0,517	0,507	0,496	0,486	0,476	—	—	—
		> 89	EULER-Formel	—	—	—	—	—	0,457	0,370	0,306

[1] Zu 25, a, S. 169. Vgl. dazu auch die Tabelle 6 und 7, in welcher die zugehörigen Werte von E angegeben sind.

[2] Hier tritt für $\frac{l}{r} < 80$ die Parabelformel ein.

[3] Vgl. hierzu die Aufgaben 38, 39 und 40, S. 186—189.

2. Tabelle 12. Vermittlungszahlen α (**28**, a) nach den Versuchen von Tetmajer[1].

Baustoff	Vermittelungszahl α	Bemerkungen
Nadelholz	$0{,}70 + 0{,}03 \left(\frac{l}{r}\right)$	Noch etwas unsicher. Weitere Versuche notwendig.
Graues Gußeisen	$0{,}38 + \frac{0{,}62}{v} + 0{,}0027 \left(\frac{l}{r}\right)$	siehe nebenstehende Tafel
Schweißeisen	für *volle* Querschnitte: 1,20 - zusammenges. Querschn.: 1,10	Noch etwas unsicher. Weitere Versuche notwendig.
Flußeisen	für *volle* Querschnitte: 1,40 - zusammenges. Querschn.: 1,20	

Graues Gußeisen:

$\left(\frac{l}{r}\right)$	Hebelarm v der Längskraft P in cm						
	1,0	1,5	2,0	3,0	5,0	7,0	10,0
10,0	1,03	0,82	0,72	0,62	0,53	0,50	0,47
20,0	1,06	0,85	0,75	0,64	0,56	0,53	0,50
40,0	1,11	0,91	0,80	0,70	0,62	0,58	0,55
60,0	1,17	0,96	0,86	0,75	0,67	0,64	0.61

Tabelle 13. Werte von β in Ostenfelds Parabelformel (**28**, b).

Einfache volle Querschnitte: Form	Größe von β	Normalprofile und zusammengesetzte Querschnitte: Form	Größe von β
1. Ein Quadrat ■	12,0	Ein L	6,0
2. - Rechteck $h > b$	$12 \frac{h}{b}$	- L $b:h = 2:3$	7,0
		- L $b:h = 1:2$	11,0
3. - Kreis ●	4π	- ⊥ $b = 2h$	7,5
4. - Kreisring ϱ ○ δ	—	- ⊥ $b = h$	5,0
5. - - $\delta = 0{,}20\,\varrho$	2,50	- ⊏	7,0
6. - - $\delta = 0{,}15\,\varrho$	1,87	- I	10,0
7. - - $\delta = 0{,}10\,\varrho$	1,25	┘└ ┐┌ 4 Winkel mit etwa 1 cm Zwischenraum	4,0
8. - - $\delta = 0{,}05\,\varrho$	0,63	⊐⊏ 2 U-Eisen mit etwa 1 cm Zwischenraum	6,0
Vgl. hierzu die Aufgaben 40 und 41, S. 189—191.		⊐ ⊏: $J_x = J_y$	1,2
		4 Z-Eisen mit einem Flacheisen	2,2
		Quadrant-Eisen-Säulen ohne Zwischenlage	1,8

[1] Festigkeitslehre. 3. Aufl. S. 359—363.

b. Flächeninhalte, Trägheitsmomente und Trägheitshalbmesser.

1. Tabelle 14. Rechteckquerschnitte.

h (cm)	b (cm)	F (cm²)	J_{min} (cm⁴)	r (cm)
10	5	50	104,2	1,443
	6	60	180,0	1,732
	8	80	426,7	2,309
	10	100	833,3	2,887
12	6	72	216,0	1,732
	8	96	512,0	2,309
	10	120	1000,0	2,887
	12	144	1728,0	3,464
14	7	98	400,2	2,021
	8	112	597,3	2,309
	10	140	1166,7	2,887
	12	168	2016,0	3,464
	14	196	3201,3	4,042
16	8	128	682,7	2,309
	10	160	1333,3	2,887
	12	192	2304,0	3,464
	14	224	3658,7	4,042
	16	256	5461,3	4,619
18	9	162	1093,5	2,598
	10	180	1500,0	2,887
	12	216	2592,0	3,464
	14	252	4116,0	4,042
	16	288	6144,0	4,619
	18	324	8748,0	5,196
20	10	200	1666,7	2,887
	12	240	2880,0	3,464
	14	280	4573,3	4,042
	16	320	6826,7	4,619
	18	360	9720,0	5,196
	20	400	1333,3	5,774
22	11	242	2440,2	3,176
	12	264	3168,0	3,464
	14	308	5030,7	4,042
	16	352	7509,3	4,619
	18	396	1069,2	5,196
	20	440	1466,7	5,774
	22	484	1952,1	6,351

h (cm)	b (cm)	F (cm²)	J_{min} (cm⁴)	r (cm)
24	12	288	3456	3,464
	14	336	5488	4,042
	16	384	8192	4,619
	18	432	11664	5,196
	20	480	16000	5,774
	22	528	21296	6,351
	24	576	27648	6,928
26	13	338	4760	3,753
	14	364	5945	4,042
	16	416	8875	4,619
	18	468	12636	5,196
	20	520	17333	5,774
	22	572	23071	6,351
	24	624	29952	6,928
	26	676	38081	7,506
28	14	392	6403	4,042
	16	448	9557	4,619
	18	504	13608	5,196
	20	560	18667	5,774
	22	616	24845	6,351
	24	672	32256	6,928
	26	728	41011	7,506
	28	784	51221	8,083
30	15	450	8438	4,330
	16	480	10240	4,619
	18	540	14580	5,196
	20	600	20000	5,774
	22	660	26620	6,351
	24	720	34560	6,928
	26	780	43940	7,506
	28	840	54880	8,083
	30	900	67500	8,661

Fig. 147.

2. Tabelle 15. Kreisquerschnitte von Vollsäulen.

d (cm)	F (cm^2)	J (cm^4)	r (cm)
10	78,54	491	2,500
10,5	86,59	597	2,625
11	95,03	719	2,750
11,5	103,87	859	2,875
12	113,10	1018	3,000
12,5	122,72	1198	3,125
13	132,73	1402	3,250
13,5	143,14	1630	3,375
14	153,94	1886	3,500
14,5	165,13	2170	3,625
15	176,72	2485	3,750
15,5	188,69	2833	3,875
16	201,06	3217	4,000
16,5	213,83	3638	4,125
17	226,98	4100	4,250
17,5	240,53	4604	4,375
18	254,47	5153	4,500
18,5	268,80	5750	4,625
19	283,53	6397	4,750
19,5	298,65	7098	4,875
20	314,16	7854	5,000
20,5	330,06	8669	5,125
21	346,36	9547	5,250
21,5	363,05	10489	5,375
22	380,13	11499	5,500
22,5	397,61	12581	5,625
23	415,48	13737	5,750
23,5	433,74	14971	5,875
24	452,39	16286	6,000
24,5	471,44	17686	6,125
25	490,87	19175	6,250
26	530,93	22432	6,500
27	572,56	26087	6,750
28	615,75	30172	7,000
29	660,52	34719	7,250
30	706,86	39761	7,500
31	754,77	45333	7,750
32	804,25	51472	8,000
33	855,30	58214	8,250
34	907,92	65597	8,500
35	962,11	73662	8,750
36	1017,88	82448	9,000
37	1075,21	91998	9,250
38	1134,12	102354	9,500
39	1194,59	113561	9,750
40	1256,64	125664	10,000
41	1320,25	138709	10,250
42	1385,44	152745	10,500
43	1452,20	167820	10,750
44	1520,53	183984	11,000
45	1590,43	201289	11,250
46	1661,90	219787	11,500
47	1734,94	239531	11,750
48	1809,56	260576	12,000
49	1885,74	282979	12,250
50	1963,50	306796	12,500

$$\pi : 64 = 0{,}0490874; \quad \log \frac{\pi}{64} = 0{,}6909699 - 2$$

$$\pi : 32 = 0{,}0981748; \quad \log \frac{\pi}{32} = 0{,}9919999 - 2$$

3. Tabelle 16. Hohlsäulen mit einer Wandstärke δ von 15 und 20 mm.

d (cm)	δ = 15 mm			δ = 20 mm		
	F (cm²)	J (cm⁴)	r (cm)	F (cm²)	J (cm⁴)	r (cm)
10	40,06	373	3,052	50,27	427	2,915
10,5	42,41	441	3,226	53,41	509	3,087
11	44,77	518	3,400	56,55	601	3,260
11,5	47,12	602	3,575	59,69	703	3,433
12	49,48	696	3,750	62,83	817	3,606
12,5	51,84	799	3,925	65,97	942	3,780
13	54,19	911	4,100	69,11	1080	3,953
13,5	56,55	1034	4,275	72,26	1231	4,127
14	58,90	1167	4,451	75,40	1395	4,301
14,5	61,26	1311	4,626	78,54	1573	4,475
15	63,62	1467	4,802	81,68	1766	4,650
15,5	65,97	1635	4,978	84,82	1975	4,825
16	68,33	1815	5,154	87,97	2199	5,000
16,5	70,69	2008	5,330	91,11	2440	5,175
17	73,04	2214	5,506	94,25	2698	5,350
17,5	75,40	2434	5,682	97,39	2973	5,525
18	77,75	2668	5,858	100,53	3267	5,701
18,5	80,11	2917	6,034	103,67	3580	5,876
19	82,47	3180	6,210	106,81	3912	6,052
19,5	84,82	3459	6,386	109,96	4264	6,227
20	87,18	3754	6,562	113,10	4637	6,403
20,5	89,54	4065	6,738	116,24	5031	6,579
21	91,89	4394	6,915	119,38	5447	6,755
21,5	94,25	4739	7,091	122,52	5885	6,930
22	96,60	5102	7,269	125,66	6346	7,106
22,5	98,96	5483	7,444	128,81	6831	7,282
23	101,32	5883	7,620	131,95	7340	7,458
23,5	103,67	6301	7,796	135,09	7873	7,634
24	106,03	6739	7,973	138,23	8432	7,810
24,5	108,38	7197	8,149	141,37	9017	7,986
25	110,74	7676	8,325	144,51	9628	8,162
26	115,45	8695	8,678	150,80	10933	8,515
27	120,17	9778	9,031	157,08	12354	8,867
28	124,88	10997	9,384	163,36	13886	9,220
29	129,59	12287	9,850	169,65	15544	9,572
30	134,30	13674	10,090	175,83	17329	9,925
31	139,02	15161	10,443	182,21	19246	10,276
32	143,73	16780	10,805	188,50	21300	10,630
33	148,44	18453	11,150	194,78	23495	10,983
34	153,15	20264	11,503	201,06	25836	11,336
35	157,87	22191	11,856	207,35	28329	11,689
36	162,58	24235	12,209	213,63	30976	12,042
37	167,29	26400	12,562	219,91	33784	12,395
38	172,00	28692	12,916	226,20	36758	12,748
39	176,72	31114	13,269	232,48	39900	13,101
40	181,43	33667	13,622	238,76	43216	13,454
41	186,14	36356	13,975	245,04	46711	13,807
42	190,85	39184	14,329	251,33	50392	14,160
43	195,56	42156	14,682	257,61	54259	14,513
44	200,28	45276	15,036	263,89	58320	14,866
45	204,99	48544	15,389	270,18	62580	15,219
46	209,70	51966	15,742	276,46	67042	15,572
47	214,41	55546	16,095	282,74	71710	15,926
48	219,13	59288	16,449	288,93	76567	16,279
49	223,84	63193	16,802	295,31	81709	16,634
50	228,56	67268	17,156	301,60	87012	16,985

4. Tabelle 17. Hohlsäulen mit einer Wandstärke δ von 25 und 30 mm.

d	δ = 25 mm			δ = 30 mm		
(cm)	F(cm²)	J(cm⁴)	r (cm)	F(cm²)	J(cm⁴)	r(cm)
10	58,90	460	2,795	65,97	478	2,693
10,5	62,83	552	2,964	70,69	577	2,856
11	66,76	655	3,133	75,40	688	3,021
11,5	70,69	771	3,303	80,11	814	3,187
12	74,61	900	3,473	84,82	954	3,354
12,5	78,54	1043	3,644	89,54	1111	3,514
13	82,47	1201	3,816	94,25	1284	3,674
13,5	86,39	1374	3,988	98,96	1475	3,852
14	90,32	1564	4,161	103,67	1685	4,031
14,5	94,25	1770	4,334	108,38	1914	4,202
15	98,18	1994	4,507	113,10	2163	4,373
15,5	102,10	2237	4,680	117,81	2433	4,545
16	106,03	2498	4,854	122,52	2726	4,717
16,5	109,96	2780	5,028	127,23	3042	4,889
17	113,88	3082	5,202	131,95	3381	5,062
17,5	117,81	3405	5,376	136,66	3745	5,235
18	121,74	3751	5,551	141,37	4135	5,408
18,5	125,66	4119	5,726	146,08	4551	5,582
19	129,59	4511	5,900	150,80	4995	5,756
19,5	133,52	4928	6,075	155,51	5467	5,930
20	137,44	5369	6,250	160,22	5968	6,103
20,5	141,37	5836	6,425	164,93	6499	6,278
21	145,30	6330	6,600	169,65	7062	6,452
21,5	149,23	6850	6,776	174,36	7655	6,627
22	153,15	7399	6,951	179,07	8282	6,801
22,5	157,08	7977	7,127	183,78	8942	6,976
23	161,01	8584	7,302	188,50	9637	7,150
23,5	164,93	9221	7,478	193,21	10367	7,325
24	168,86	9889	7,653	197,92	11133	7,500
24,5	172,79	10589	7,828	202,63	11936	7,675
25	176,72	11320	8,004	207,35	12778	7,850
26	184,57	12855	8,356	216,77	14578	8,201
27	192,42	14588	8,707	226,19	16540	8,551
28	200,28	16435	9,059	235,62	18673	8,903
29	208,13	18433	9,411	245,04	20982	9,254
30	215,98	20586	9,763	254,47	23475	9,605
31	223,84	22901	10,115	263,89	26158	9,956
32	231,69	25384	10,467	273,32	29040	10,308
33	239,55	28042	10,820	282,74	32126	10,660
34	247,40	30879	11,172	292,17	35426	11,011
35	255,26	33902	11,524	301,59	38943	11,363
36	263,11	37115	11,877	311,02	42687	11,715
37	270,96	40526	12,230	320,44	46664	12,068
38	278,82	44141	12,582	329,87	50883	12,420
39	286,67	47963	12,935	339,29	55347	12,772
40	294,52	52001	13,288	348,72	60067	13,124
41	302,38	56264	13,641	358,14	65047	13,477
42	310,23	60747	13,993	367,57	70298	13,829
43	318,09	65467	14,346	376,99	75822	14,182
44	325,94	70423	14,699	386,42	81632	14,534
45	333,79	75624	15,052	395,84	87728	14,887
46	341,65	81078	15,405	405,26	94122	15,240
47	349,50	86785	15,758	414,69	100822	15,593
48	357,36	92757	16,111	424,12	107833	15,945
49	365,21	98995	16,464	433,54	115159	16,298
50	373,07	105509	16,817	442,97	122814	16,651

5. Tabelle 18. Verschiedene zu-

Querschnitt	Trägheitsmomente
Fig. 148.	Für $h > b$ ist: $\mathfrak{J}_{min} = \frac{1}{12}[hb^3 - h_1 b_1^3]$
Fig. 149.	$\mathfrak{J}_{I} = \frac{1}{12}[h(2b + c)^3 - h_1(2b_1 + c)^3 - (h - h_1)c^3]$ $\mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{6}[bh^3 - b_1 h_1^3]$
Fig. 150.	$\mathfrak{J}_{I} = \frac{1}{6}[h(2b + c)^3 - h_1(2b_1 + c)^3 - (h - h_1)c^3]$ $\mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{6}[b(2h + d)^3 - b_1(2h_1 + d)^3 - (b - b_1)d^3]$ Für $h_1 = b_1$ ist: $\mathfrak{J}_{I} = \frac{1}{6}[h(2h + c)^3 - h_1(2h_1 + c)^3 - (h - h_1)c^3]$ $\mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{6}[h(2h + d)^3 - h_1(2h + d)^3 - (h - h_1)d^3]$
Fig. 151.	$\mathfrak{J}_{I} = \frac{1}{12}[(h - h_1)b^3 + h_1(b - b_1)^3]$ $\mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{12}[bh^3 - b_1 h_1^3]$ Für Normalprofile ist $\mathfrak{J}_{I} = \mathfrak{J}_{min}$
Fig. 152.	$\mathfrak{J}_{I} = \frac{1}{12}[(h-h_1)\{(2b+c)^3-c^3\}+h_1\{(2b+c-b_1)^3-(b_1+c)^3\}]$ $\mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{6}[bh^3 - b_1 h_1^3]$

sammengesetzte Querschnitte (I).

Fläche	Trägheitshalbmesser
$F = bh - b_1 h_1$	$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{hb^3 - h_1 b_1^3}{3(bh - b_1 h_1)}}$
$F = 2[bh - b_1 h_1]$	$r_I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h(2b+c)^3 - h_1(2b_1+c)^3 - (h-h_1)c^3}{6(bh - b_1 h_1)}}$ $r_{II} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{3(bh - b_1 h_1)}}$
$F = 4[bh - b_1 h_1]$	$r_I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h(2b+c)^3 - h_1(2b_1+c)^3 - (h-h_1)c^3}{6(bh - b_1 h_1)}}$ $r_{II} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b(2h+d)^3 - b_1(2h_1+d)^3 - (b-b_1)d^3}{6(bh - b_1 h_1)}}$
$F = 4[h^2 - h_1^2]$	$r_I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h(2h+c)^3 - h_1(2h_1+c)^3 - (h-h_1)c^3}{6(h^2 - h_1)^2}}$ $r_{II} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h(2h+d)^3 - h_1(2h+d)^3 - (h-h_1)d^3}{6(h^2 - h_1^2)}}$
$F = bh - b_1 h_1$	$r_I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h-h_1)b^3 + h_1(b-b_1)^3}{3(bh - b_1 h_1)}}$ $r_{II} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{3(bh - b_1 h_1)}}$
$F = 2(bh - b_1 h_1)$	$r_I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h-h_1)\{(2b+c)^3 - c^3\} + h_1\{(2b+c-b_1)^3 - (b_1+c)^3\}}{6(bh - b_1 h_1)}}$ $r_{II} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{3(hb - h_1 b_1)}}$

6. Tabelle 19. Verschiedene zu-

Querschnitt	Trägheitsmomente
Fig. 153.	$\mathcal{J}_{I} = \frac{1}{6}[(h-h_1)(2b+c)^3 + h_1\{2(b-b_1)+c\}^3 - hc^3]$ $\mathcal{J}_{II} = \frac{1}{6}[(b-b_1)(2h+d)^3 + b_1\{2(h-h_1)+d\}^3 - bd^3]$ Für $h_1 = b_1$ ist: $\mathcal{J}_{I} = \frac{1}{6}[(h-h_1)(2h+c)^3 + h_1\{2(h-h_1)+c\}^3 - hc^3]$ $\mathcal{J}_{II} = \frac{1}{6}[(h-h_1)(2h+d)^3 + h_1\{2(h-h_1)+d\}^3 - hd^3]$
Fig. 154.	$\mathcal{J}_{I} = \frac{1}{3}[ha^3 + (h-h_1)(b-a^3) - h_1(a-b+b_1)^3]$ $\mathcal{J}_{II} = \frac{1}{12}[bh^3 - b_1 h_1^3]$ $\mathcal{J}_{III} = \frac{1}{3}[(h-h_1)b^3 + h_1(b-b_1)^3]$ $a = \frac{b^2 h - 2bb_1h_1 + b_1^2 h_1}{2(bh - b_1 h_1}$ Für Normalprofile ist $\mathcal{J}_{I} = \mathcal{J}_{min}$
Fig. 155.	$\mathcal{J}_{I} = \frac{1}{12}[(h-h_1)(2b+c)^3 + h_1\{c+2(b-b_1)\}^3 - hc^3]$ $\mathcal{J}_{II} = \frac{1}{6}[bh^3 - b_1 h_1^3]$
Fig. 156.	$\mathcal{J}_{I} = \frac{1}{3}[b_1(h-h_1)^3 + (b-b_1)h^3]$ Für Normalprofile ist: $\mathcal{J}_{I} = \mathcal{J}_{min}$ $\mathcal{J}_{II} = \frac{1}{3}[(b-b_1)\{a^3+(h-a)^3\}+b_1\{a^3-(a+h_1-h)^3\}]$ $\mathcal{J}_{III} = \frac{1}{3}[(h-h_1)\{a_1^3+(b-a_1)^3\}+h_1\{a_1^3-(a_1+b_1-b)^3\}]$ $\mathcal{J}_{IV} = \frac{1}{3}[h_1(b-b_1)^3 + (h-h_1)b^3]$ $a = \frac{bh^2 - 2b_1hh_1 + b_1h_1^2}{2(bh-b_1h_1)}; \quad a_1 = \frac{hb^2 - 2bb_1h_1 + b_1^2 h_1}{2(bh-b_1h_1)}$ Für $h_1 = b_1$: $\mathcal{J}_{I} = \mathcal{J}_{IV} = \frac{1}{3}[h_1(h-h_1)^3 + (h-h_1)h^3]$ *) $\mathcal{J}_{II} = \mathcal{J}_{III} = \frac{1}{3}[(h-h_1)\{a^3+(h-a)^3\}+h_1\{a^3-(a+h_1-h)^3\}]$ $a = a_1 = \frac{h^2 + hh_1 - h_1^2}{2(h+h_1)}$

*) Für Normalprofile ist $\mathcal{J}_{I} = \mathcal{J}_{II} = \mathcal{J}_{min}$.

sammengesetzte Querschnitte (II).

Fläche	Trägheitshalbmesser
$F = 4(bh - b_1 h_1)$	$r_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h - h_1)(2b + c)^3 + h_1\{2(b - b_1) + c\}^3 - hc^3}{6(bh - b_1 h_1)}}$ $r_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b - b_1)(2h + d)^3 + b_1\{2(h - h_1) + d\}^3 - bd^3}{6(bh - b_1 h_1)}}$
$F = 4(h^2 - h_1^2)$	$r_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h - h_1)(2h + c)^3 + h_1\{2(h - h_1) + c\}^3 - hc^3}{6(h^2 - h_1^2)}}$ $r_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h - h_1)(2h + d)^3 + h_1\{2(h - h_1) + d\}^3 - hd^3}{6(h^2 - h_1^2)}}$
$F = bh - b_1 h_1$	$r_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{ha^3 + (h - h_1)(b - a)^3 - h_1(a - b + b_1)^3}{3(bh - b_1 h_1)}}$ $r_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{3(bh - b_1 h_1)}}$ $r_{\mathrm{III}} = \sqrt{\frac{(h - h_1) b^3 + h_1 (b - b_1)^3}{3(bh - b_1 h_1)}}$
$F = 2(bh - b_1 h_1)$	$r_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h - h_1)(2b + c)^3 + h_1\{c + 2(b - b_1)\}^3 - hc^3}{6(bh - b_1 h_1)}}$ $r_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{3(bh - b_1 h_1)}}$
$F = bh - b_1 h_1$	$r_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{b_1(h - h_1)^3 + (b - b_1)h^3}{3(bh - b_1 h_1)}}$ $r_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{(b - b_1)\{a^3 + (h - a)^3\} + b_1\{a^3 - (a + h_1 - h)^3\}}{3(bh - b_1 h_1)}}$ $r_{\mathrm{III}} = \sqrt{\frac{h_1(b - b_1)^3 + (h - h_1)b^3}{3(bh - b_1 h_1)}}$
$F = h^2 - h_1^2$	$r_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{h(h - h_1)^2 + h^3}{3(h + h_1)}} = r_{\mathrm{IV}}$ $r_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{(h - h_1)\{a^3 + (h - a)^3\} + h_1\{a^3 - (a + h_1 - h)^3}{3(h^2 - h_1^2)}}$

Querschnitt	Trägheitsmomente
Fig. 157.	$\mathfrak{J}_{I} = \frac{1}{12}[(h - h_1)(2b + c)^3 + h_1\{2(b - b_1) + c\}^3 - hc^3]$ $\mathfrak{J}_{II} = \frac{2}{3}[(b - b_1)\{a^3 + (h - a)^3\} + b_1\{a^3 - (a + h_1 - h)^3\}]$ $\mathfrak{J}_{III} = \frac{2}{3}[b_1(h - h_1)^3 + (b - b_1)h^3]; \quad a = \frac{bh^2 - 2b_1 h h_1 + b_1 h_1^2}{2(bh - b_1 h_1)}$ Für $b_{(1)} = h_{(1)}$ ist: $\mathfrak{J}_{I} = \frac{1}{12}[(h - h_1)(2h + c)^3 + h_1\{2(h - h_1) + c\}^3 - hc^3]$ $\mathfrak{J}_{II} = \frac{2}{3}[(h - h_1)\{a^3 + (h - a)^3\} + h_1\{a^3 - (a + h_1 - h)^3\}]$ $\mathfrak{J}_{III} = \frac{2}{3}[h_1(h - h_1)^3 + (h - h_1)h^3]; \quad a = \frac{h^2 + hh_1 - h_1^2}{2(h + h_1)}$
Fig. 158.	$\mathfrak{J}_{min} = \frac{1}{6}(h^4 - h_1^4)$
Fig. 159.	$\mathfrak{J}_{I} = \mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{6}[(h - h_1)(2h + c)^3 + h_1\{2(h - h_1) + c\}^3 - hc^3]$
Fig. 160.	$\mathfrak{J}_{I} = \frac{1}{12}[h_1(b - b_1)^3 (h - h_1) b^3]$ $\mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{3}[(b - b_1)(h - a)^3 + ba^3 - b_1(a + h_1 - h)^3]$ $\mathfrak{J}_{III} = \frac{1}{3}[b_1(h - h_1)^3 + (b - b_1)h^3]; \quad a = \frac{bh^2 - 2b_1 h h_1 + b_1 h_1^2}{2(bh - b_1 h_1)}$ Für $b_{(1)} = h_{(1)}$ ist: $\mathfrak{J}_{min} = \mathfrak{J}_{I} = \frac{1}{4}\mathfrak{J}_{III} = \frac{1}{12}[h_1(h - h_1)^3 + (h - h_1)h^3]$ $\mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{3}[(h - h_1)(h - a)^3 + ha^3 - h_1(a + h_1 - h)^3]$ $a = \frac{h^2 + hh_1 - h_1^2}{2(h + h_1)}$. Für $b = 2h$ und $b_1 = h + h_1$ ist: $\mathfrak{J}_{I} = \frac{1}{12}[h_1(h - h_1)^3 + 8(h - h_1)h^3]$ $\mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{3}[(h - h_1)(h - a)^3 + 2ah^3 - (h + h_1)(a + h_1 - h)^3]$ $\mathfrak{J}_{III} = \frac{1}{3}[(h + h_1)(h - h_1)^3 + (h - h_1)h^3]$

Fläche	Trägheitshalbmesser
$F = 2(bh - b_1 h_1)$	$r_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h-h_1)(2b+c)^3 + h_1\{2(b-b_1)+c\}^3 - hc^3}{6(bh - b_1 h_1)}}$ $r_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{(b-b_1)\{a^3+(h-a)^3\} + b_1\{a^3-(a+h_1-h)^3\}}{3(bh-b_1 h_1)}}$ $r_{\mathrm{III}} = \sqrt{\frac{b_1(h-h_1)^3+(b-b_1)h^3}{3(bh-b_1 h_1)}}$
$F = 2(h^2 - h_1^2)$	$r_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h-h_1)(2h+c)^3 + h_1\{2(h-h_1)+c\}^3 - hc^3}{6(h^2 - h_1^2)}}$ $r_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{(h-h_1)\{a^3+(h-a)^3\} + h_1\{a^3-(a+h_1-h)^3\}}{3(h^2-h_1^2)}}$ $r_{\mathrm{III}} = \sqrt{\frac{h_1(h-h_1)^2+h^3}{3(h+h_1)}}$
$F = 2(h^2 - h_1^2)$	$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h^2+h_1^2}{3}}$
$F = 4(h^2 - h_1^2)$	$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h-h_1)(2h+c)^3 + h_1\{2(h-h_1)+c\}^3 - hc^3}{6(h^2 - h_1^2)}}$
$F = bh - b_1 h_1$	$r_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_1(b-b_1)^3+(h-h_1)b^3}{3(bh-b_1 h_1)}}$ $r_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{(b-b_1)(h-a)^3+ba^3-b_1(a+h_1-h)^3}{3(bh-b_1 h_1)}}$ $r_{\mathrm{III}} = \sqrt{\frac{b_1(h-h_1)^3+(b-b_1)h^3}{3(bh-b_1 h_1)}}$
$F = h^2 - h_1^2$	$r_{min} = r_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2} r_{\mathrm{III}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_1(h-h_1)^2+h^3}{3(h+h_1)}}$ $r_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{[(h-h_1)(h-a)^3+ha^3-h_1(a+h_1-h)^3]}{3(h^2-h_1^2)}}$
$F = 2h^2 - hh_1 - h_1^2$	$r_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{h_1(h-h_1)^3+8(h-h_1)h^3}{3(2h^2-hh_1-h_1^2)}}$ $r_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{(h-h_1)(h-a)^3+2ah^3-(h+h_1)(a+h_1-h)^3}{3(2h^2-hh_1-h_1^2)}}$ $r_{\mathrm{III}} = \sqrt{\frac{(h+h_1)(h-h_1)^3+(h-h_1)h^3}{3(2h^2-hh_1-h_1^2)}}$

8. Tabelle 21. Verschiedene zu-

Querschnitt	Trägheitsmomente
Fig. 161.	$\mathfrak{J}_I = \frac{1}{6}[h_1(b-b_1)^3 + (h-h_1)b^3]$ $\mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{12}[(b-b_1)(2h+c)^3 + b_1\{2(h-h_1)+c\}^3 - bc^3]$ Für $h_{(1)} = b_{(1)}$ ist $\mathfrak{J}_I = \frac{1}{6}[h_1(h-h_1)^3 + (h-h_1)h^3]$ $\mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{12}[(h-h_1)(2h+c)^3 + h_1\{2(h-h_1)+c\}^3 - hc^3]$ Für $b = 2h$ und $b_1 = h + h_1$ ist: $\mathfrak{J}_I = \frac{1}{6}[h_1(h-h_1)^3 + 8(h-h_1)h^3]$ $\mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{12}[(h-h_1)(2h+c)^3 + (h+h_1)\{2(h-h_1)+c\}^3 - 2hc^3]$
Fig. 162.	$\mathfrak{J}_I = \frac{1}{24}[(h-h_1)\{(b+b_1)^3 + (b-b_1)^3\} + 2h_1(b-b_1)^3]$ $\mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{12}[bh^3 - b_1 h_1^3]$ Für Normalprofile ist $\mathfrak{J}_{min} = \mathfrak{J}_{IV}$, wenn die Achse IV Trägheitshauptachse ist.
Fig. 163.	$\mathfrak{J}_I = \mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{12}[b(h-b)^3 + (h-b)h^3]$
Fig. 164.	$\mathfrak{J}_I = \mathfrak{J}_{II} = \frac{1}{12}\left[\frac{3\pi}{16}(d^4 - d_1^4) + b(h^3 - d^3) + b^3(h-d)\right]$

sammengesetzte Querschnitte (IV).

Fläche	Trägheitshalbmesser
$F = 2(bh - b_1 h_1)$	$r_I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_1(b-b_1)^3 + (h-h_1)b^3}{3(bh - b_1 h_1)}}$ $r_{II} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b-b_1)(2h+c)^3 + b_1\{2(h-h_1)+c\}^3 - bc^3}{6(bh - b_1 h_1)}}$
$F = 2(h^2 - h_1^2)$	$r_I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_1(h-h_1)^2 + h^3}{3(h+h_1)}}$ $r_{II} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h-h_1)(2h+c)^3 + h_1\{2(h-h_1)+c\}^3 - hc^3}{6(h^2 - h_1^2)}}$
$F = 2(2h^2 - hh_1 - h_1^2)$	$r_I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_1(h-h_1)^3 + 8(h-h_1)h^3}{3(2h^2 - hh_1 - h_1^2)}}$ $r_{II} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h-h_1)(2h+c)^3 + (h+h_1)\{2(h-h_1)+c\}^3 - 2hc^3}{6(2h^2 - hh_1 - h_1^2)}}$
$F = bh - b_1 h_1$	$r_I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h-h_1)\{(b+b_1)^3 + (b-b_1)^3\} + 2h_1(b-b_1)^3}{6(bh - b_1 h_1)}}$ $r_{II} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{3(bh - b_1 h_1)}}$
$F = h^2 - b^2$	$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b(h-b)^2 + h^3}{3(h+b)}}$
$F = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2) + 2b(h-d)$	$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\frac{3\pi}{16}(d^4 - d_1^4) + b(h^3 - d^3) + b^3(h-d)}{3\left[\frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2) + 2b(h-d)\right]}}$

c. Nennerwerte der Rankine-Formel.

9. Tabelle 22. Werte von γ für schmiedbares Eisen und Eisenbeton.

Werte für $\gamma = 1 + 0{,}00010 \left(\frac{l}{r}\right)^2$, $\gamma_1 = 1 + 0{,}00015 \left(\frac{l}{r}\right)^2$. Die Wandstärke δ ist zu $\frac{1}{10} h$ angenommen.

$\frac{l}{h}$	Fig. 165. γ	Fig. 165. γ_1	Fig. 166. γ	Fig. 166. γ_1	Fig. 167. γ	Fig. 167. γ_1	Fig. 168. γ	Fig. 168. γ_1	Fig. 169. γ	Fig. 169. γ_1	Fig. 170. γ	Fig. 170. γ_1
5	1,04	1,06	1,03	1,04	1,03	1,04	1,01	1,02	1,05	1,08	1,03	1,04
6	1,06	1,09	1,05	1,08	1,05	1,08	1,03	1,04	1,10	1,15	1,05	1,08
8	1,10	1,15	1,08	1,11	1,09	1,13	1,05	1,08	1,16	1,24	1,08	1,11
10	1,16	1,24	1,10	1,15	1,13	1,19	1,08	1,11	1,23	1,34	1,11	1,17
12	1,23	1,34	1,14	1,21	1,18	1,26	1,10	1,15	1,33	1,49	1,16	1,24
14	1,31	1,47	1,19	1,28	1,24	1,36	1,14	1,21	1,44	1,66	1,23	1,34
16	1,41	1,62	1,25	1,38	1,31	1,47	1,19	1,28	1,56	1,84	1,30	1,45
18	1,53	1,79	1,31	1,47	1,39	1,58	1,24	1,36	1,71	2,07	1,39	1,58
20	1,64	1,96	1,39	1,58	1,48	1,71	1,29	1,43	1,89	2,33	1,48	1,71
22	1,76	2,14	1,48	1,71	1,58	1,86	1,35	1,53	2,08	2,61	1,58	1,86
24	1,91	2,37	1,56	1,84	1,69	2,03	1,43	1,64	2,28	2,91	1,68	2,01
26	2,08	2,61	1,66	1,99	1,81	2,22	1,50	1,75	2,50	3,25	1,80	2,20
28	2,25	2,88	1,76	2,14	1,94	2,41	1,58	1,86	2,74	3,61	1,93	2,39
30	2,44	3,16	1,88	2,31	2,08	2,61	1,66	1,99	3,00	4,00	2,06	2,59
32	2,64	3,46	2,00	2,50	2,23	2,84	1,75	2,13	3,28	4,41	2,21	2,82
34	2,85	3,78	2,13	2,69	2,39	3,08	1,85	2,28	3,56	4,84	2,38	3,06
36	3,08	4,11	2,26	2,89	2,56	3,34	1,95	2,43	3,88	5,31	2,54	3,31
38	3,31	4,47	2,41	3,12	2,73	3,59	2,05	2,58	4,20	5,80	2,71	3,57
40	3,56	4,84	2,56	3,34	2,91	3,87	2,18	2,76	4,55	6,33	2,90	3,85
42	3,83	5,24	2,73	3,59	3,11	4,17	2,26	2,93	4,93	6,87	3,09	4,13
44	4,10	5,65	2,89	3,83	3,33	4,49	2,41	3,12	5,30	7,45	3,30	4,45
46	4,39	6,08	3,06	4,09	3,53	4,79	2,55	3,33	5,70	8,05	3,51	4,77
48	4,69	6,50	3,25	4,38	3,76	5,14	2,69	3,53	6,11	8,67	3,74	5,11
50	5,00	7,00	3,44	4,66	4,00	5,50	2,83	3,74	6,55	9,33	3,96	5,44
55	5,84	8,25	3,95	5,43	4,63	6,44	3,21	4,32	7,71	11,07	4,59	6,38
60	6,76	9,64	4,51	6,27	5,33	7,49	3,64	4,96	8,99	12,98	5,28	7,41
65	7,76	11,14	5,13	7,19	6,08	8,61	4,09	5,63	10,38	15,00	6,01	8,52
70	8,84	12,76	5,79	8,18	6,88	9,81	4,59	6,38	11,88	17,31	6,81	9,72
75	10,00	14,50	6,49	9,23	7,75	11,13	5,11	7,17	13,50	19,75	7,68	11,01
80	11,20	16,30	7,24	10,36	8,68	12,51	5,69	8,03	15,25	22,38	8,59	12,39
90	14,00	20,50	8,90	12,85	10,70	15,55	6,93	9,89	19,00	28,00	10,61	15,42
100	16,00	25,19	10,75	15,63	13,00	19,00	8,31	11,97	23,13	34,19	12,86	18,79

Zweiter Abschnitt.

Statisch unbestimmte Systeme.

---

§ 6. Die überzähligen Größen.

31. Ihre Berechnung mit Hilfe der Arbeitsgleichungen.

a. Allgemeiner Ausdruck für die Stabkräfte eines Fachwerkes.

1. Ein ebenes oder räumliches Fachwerk sei mehrfach statisch unbestimmt und durch eine Reihe von Einzelkräften P belastet, von denen eine jede in einem beliebigen Knoten, in beliebiger Richtung, angreife. Die überzähligen Stäbe des Tragwerks, sowie auch etwaige überzählige Stützenstäbe, seien derart ausgewählt worden, daß nach erfolgter Beseitigung jener Stäbe ein statisch bestimmtes sog. *Hauptnetz* oder *Hauptsystem* zurückbleiben würde (I. **35**). Es sollen dann bedeuten

$X_a, X_b, X_c, \ldots X_r$: Die Stabkräfte (Achsenkräfte) der überzähligen Stäbe des Tragwerks und der an Stelle der Stützen gedachten Stützenstäbe (I. **18**—**19**).

Um im Laufe der Darlegungen keinen Zweifel aufkommen zu lassen, wird in folgendem unter der Bezeichnung »*statisch unbestimmtes System*« das vollständige Fachwerk verstanden, in welchem noch kein Stab beseitigt wurde. Dagegen wird das Fachwerk »*Hauptsystem*« genannt, sobald alle überzähligen Stäbe beseitigt und durch äußere Kräfte X ersetzt gedacht worden sind. Es ist dann zunächst ersichtlich, daß in dem durch die P belasteten statisch unbestimmten Systeme und dem durch die P und X belasteten Hauptsysteme *einerlei Formänderungszustand herrschen muß und daß dieser durch die elastischen Längenänderungen Δs der notwendigen Stäbe des Hauptsystems eindeutig bestimmt ist.* Dabei beeinflussen die überzähligen Größen X die Formänderung nur insoweit, *als sie die Stabkräfte der notwendigen Stäbe des Hauptsystems verändern.* Bestimmt man also die elastischen Verschiebungen derjenigen Knoten

des statisch unbestimmten Systemes, in denen die überzähligen Größen angreifen, so gewinnt man dadurch die zu deren Berechnung notwendige Zahl von *Elastizitätsgleichungen* (I. 35). Das kann auf zwei verschiedenen Wegen geschehen: durch Anwendung der Arbeitsgleichungen Mohrs auf das statisch unbestimmte System oder durch Berechnung der betreffenden Verschiebungen des Hauptsystemes unter Verwendung des Satzes von Maxwell. Beide Wege sollen ausführlich beschrieben werden.

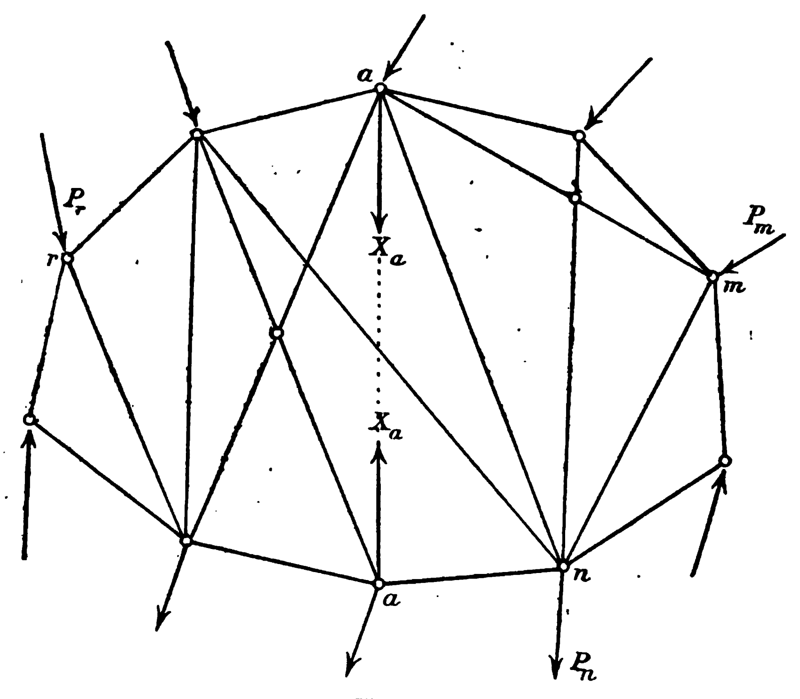


Fig. 171.

2. Man denke sich *einen* der überzähligen Stäbe des statisch unbestimmten Systemes beseitigt und dafür in den betreffenden Stabknoten äußere Kräfte angebracht. Man bilde also z. B. einen *Belastungszustand*, wie er in der Fig. 171 veranschaulicht wird, worin X_a die vorläufig unbekannte überzählige Größe vorstellt und im übrigen noch die gegebenen Lasten P sowie auch die dadurch erzeugten Stützenkräfte tätig sind. X_a wird *positiv* gerechnet, wenn seine Pfeile nach dem Innern des Tragwerkes gekehrt sind. Deshalb ist die Formänderungsarbeit von X_a *negativ*, denn die zugehörige Längenänderung Δs_a des beseitigten Stabes erfolgt der Richtung von X_a entgegengesetzt.

Will man den *alleinigen* Einfluß von X_a auf eine beliebige Stabkraft feststellen, so empfiehlt es sich, eine *Krafteinheit des Punktepaares a—a* einzuführen, die in der Richtung von Δs_a wirkt. Diese würde dann dem Einflusse einer Kraft $X_a = -1$ gleichwertig sein. Deshalb soll sie *die Krafteinheit oder der Belastungszustand* »$X_a = -1$« genannt werden. Ebenso wie für X_a kann man sich für jede andere überzählige Größe eine Krafteinheit bilden.

Es sei nun

S_a: die allein *von der Krafteinheit* »$X_a = -1$« verursachte Stabkraft irgend eines Stabes im statisch unbestimmten Systeme,

S_b: die desgl. von der Krafteinheit »$X_b = -1$« verursachte Stabkraft

und so fort: S_c, S_d, . . . bis S_r.

Ferner sei

S_0: die allein *von den Lasten P* verursachte Stabkraft irgend eines Stabes im statisch bestimmten Systeme.

Beachtet man nun, daß der Formänderungs- und Spannungszustand im statisch unbestimmten Systeme und im Hauptsysteme ein und dasselbe Bild zeigen muß, dann ist für eine Stabkraft S des Fachwerks allgemein

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c - \cdots - S_r X_r \qquad (159)$$

anzuschreiben, gleichviel ob ein notwendiger oder ein überzähliger Stab gemeint ist. Für irgend ein X erhält man deshalb auch

$$X = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c - \cdots - S_r X_r . \qquad (160)$$

Dabei entspricht jedes Glied der Gl. (159) einer Stabkraft, die aus je einem besondern Belastungszustande herrührt, einerlei ob man das Hauptsystem oder das statisch unbestimmte System betrachtet. Die $(r+1)$ Belastungszustände heißen der Reihe nach

»$X = 0$«; »$X_a = -1$«; »$X_b = -1$«; . . . »$X_r = -1$«.

Die *Temperaturbelastung* wird vorläufig ausgeschlossen. Darüber vgl. man unter **33**.

Für den Belastungszustand »$X = 0$« soll $S = S_0$ werden, d. h. es müssen dabei (nach Gl. 159) *alle X verschwinden*, es verbleiben nur die Lasten P.

Für den Belastungszustand »$X_a = -1$« soll $S = S_a$ werden, also verschwinden dabei (nach Gl. 159) alle P und alle X, ausgenommen »$X_a = -1$«; usw.

Will man für irgend einen der Belastungszustände »$X = -1$« die dadurch *in einem überzähligen Stabe* erzeugte Stabkraft bestimmen, so

geschieht das mit Hilfe der Gl. (160). Für die von X_a erzeugte Stabkraft S_a erhält man danach (aus $S_0 = 0$ und $X_b \ldots$ bis $X_r = 0$)

$$S_a = \frac{X_a}{-X_a} = -1 \quad \text{usw.}$$

b. Die Elastizitätsgleichungen eines Fachwerkes.

1. Man schreibe für jeden Belastungszustand die Arbeitsgleichung an, und zwar für die *gedachte* Krafteinheit und die *wirklichen* durch die gegebenen Lasten P verursachten Verschiebungen und Stabkräfte des statisch unbestimmten Systemes. Für den in der Fig. 171 veranschaulichten Fall »$X_a = -1$« erhält man dann die Arbeitsgleichung

$$\bar{1}_a \cdot \delta_a = \sum S_a S k, \tag{161}$$

in welcher das Summenzeichen alle (notwendigen und überzähligen) Stäbe des Fachwerks umfaßt, *ausgenommen den beseitigten Stab* X_a.

Es ist nun nachzuweisen, daß der allgemeine Ausdruck »$S_a S k$« *für die gedachte Arbeit des Stabes* X_a gleichbedeutend mit dem Werte $\bar{1}_a \cdot \delta_a$ auf der linken Seite der Gl. (161) ist. Denn es ist zunächst (nach dem Elastizitätsgesetze)

$$\bar{1}_a \cdot \delta_a = \bar{1} \cdot X_a \cdot k_a,$$

wenn k_a das *Dehnungsvermögen* des Stabes X_a vorstellt. Ferner ist aus der Gl. (159), wie vorhin schon erläutert wurde, die durch »$X_a = -1$« *im Stabe* X_a *selbst* erzeugte Stabkraft S_a mit

$$S_a = -1$$

zu berechnen. Die *gedachte* Arbeit »$S_a S k$« des Stabes X_a hat danach den Wert

$$-1 \cdot X_a \cdot k_a,$$

sie ist also gleichwertig mit dem Ausdrucke $\bar{1}_a \cdot \delta_a$.

Schafft man jetzt in der Gl. (161) das Glied $\bar{1}_a \cdot \delta_a$ auf die rechte Seite unter das Summenzeichen, so geht die erste Arbeitsgleichung in

$$\sum S_a S k = 0 \tag{162}$$

über. *Das Summenzeichen der Gleichung umfaßt jetzt die gedachte Arbeit des gesamten statisch unbestimmten Systemes.*

Wäre die Arbeitsgleichung nicht für einen *Tragwerks*stab, sondern für einen *Stützen*stab X_n angeschrieben worden, so würde das Summenzeichen von vornherein die gesamte gedachte Formänderungsarbeit des statisch unbestimmten Systemes ausgedrückt haben, während ihre linke Seite

$$\bar{1}_n \cdot \delta_n = 0$$

zu schreiben gewesen wäre, vorausgesetzt, daß *der Stützpunkt n unbeweglich* war. Über den Einfluß von Stützpunktverschiebungen vgl. man unter **34**, b.

Setzt man in die Arbeitsgleichung (162) den Wert von S aus der Gl. (159) ein, so erhält man *die erste Elastizitätsgleichung*

$$\sum S_a S_o k - X_a \sum S_a^2 k - X_b \sum S_a S_b k - X_c \sum S_a S_c k \cdots - X_r \sum S_a S_r k = 0. \quad (163)$$

Solche Gleichungen sind auf dem beschriebenen Wege auch noch für die Belastungszustände »$X_b = -1$«, »$X_c = -1$« bis »$X_r = -1$« aufzustellen. Sie können dann nach dem Vorbilde der erstabgeleiteten Gleichung ohne weiteres niedergeschrieben werden und lauten

$$\sum S_b S_o k - X_a \sum S_b S_a k - X_b \sum S_b^2 k - X_c \sum S_b S_c k \cdots - X_r \sum S_b S_r k = 0$$

$$\sum S_c S_o k - X_a \sum S_c S_a k - X_b \sum S_c S_b k - X_c \sum S_c^2 k \cdots - X_r \sum S_c S_r k = 0$$

. . . .

$$\sum S_r S_o k - X_a \sum S_r S_a k - X_b \sum S_r S_b k - X_c \sum S_r S_c k \cdots - X_r \sum S_r^2 k = 0.$$

Mit Rücksicht auf die erörterte Gleichwertigkeit des mit P belasteten statisch unbestimmten Systemes und des mit P und X belasteten Hauptsystemes stellt jedes Summenglied der obigen r Elastizitätsgleichungen das Ergebnis einer der $(r+1)$ bekannten Belastungszustände dar. Alle Werte S_o, S_a, S_b bis S_r können *auf statisch bestimmtem* Wege für das Hauptsystem berechnet werden. Das ist einzusehen, wenn man für jeden Belastungszustand mit Hilfe der Gl. (159), — so wie es unter a. angedeutet ist — untersucht, welche der X verschwinden und wie groß jedesmal die betreffenden *gedachten* Stabkräfte S_o, S_a, S_b ... bis S_r in den betreffenden überzähligen Stäben X selbst werden.

Somit ist es möglich aus den abgeleiteten r Elastizitätsgleichungen die r überzähligen Größen eindeutig zu bestimmen. Ein Ausnahmefall (I. **34**, **35**) könnte nur dann vorliegen, wenn das Hauptsystem beweglich oder von unendlich kleiner Beweglichkeit gewesen wäre. Setzt man schließlich die gefundenen überzähligen Größen in die Gl. (159) ein, so findet man dadurch die noch fehlenden Stabkräfte S der *notwendigen* Stäbe des Hauptsystemes. Vgl. die Beispiele unter **36**.

c. Die überzähligen Größen der Vollwandträger. Ihre Berechnung ist einfacher, als bei Fachwerken, weil hier *überzählige innere Kräfte* nicht vorhanden sein können. Es gibt nur überzählige *äußere oder Stützen*kräfte. Denkt man diese in bekannter Weise durch Stützenstäbe ersetzt, so gelten hier die weiterhin unter **32**, a abgeleiteten

Elastizitätsgleichungen. Sobald danach die X berechnet worden sind, können für jeden beliebigen Schnitt der Vollwandträger die Spannungen ermittelt werden (I. § 14—18 und II. § 6).

32. Darstellung der überzähligen Größen aus den Verschiebungen ihrer Angriffspunkte im Hauptsysteme.

a. Die Elastizitätsgleichungen. Das Endziel praktischer Aufgaben ist die *Darstellung der Einflußlinien* für jede überzählige und notwendige Stabkraft. Deshalb empfiehlt es sich, anstatt (wie vorher) mit beliebigen Lasten P zu rechnen, dafür die *wandernde lotrechte Einzellast* P einzuführen (II. **2**). Mit Hilfe der (unter **12**) ausführlich erläuterten, und in vielen Beispielen (**14**) bereits gebrauchten *Bezeichnungsweise* von Verschiebungen ist es dann möglich, die Elastizitätsgleichungen zur Berechnung der überzähligen Größen eines statisch unbestimmten Systemes ohne weiteres anzuschreiben.

Man bestimme für jeden der $(r+1)$ Belastungszustände und jeden Angriffspunkt einer überzähligen Größe die elastischen Verschiebungen $\delta_{aa}, \delta_{ab}, \ldots \delta_{ar}$; $\delta_{ba}, \delta_{bb}, \ldots \delta_{rb}$ bis $\delta_{ra}, \delta_{rb}, \ldots \delta_{rr}$, sowie $\delta_{am}, \delta_{bm}, \ldots \delta_{rm}$. Dann erhält man für die aus allen den genannten Ursachen herrührenden *Gesamtverschiebungen* $\delta_a, \delta_b \ldots$ bis δ_r die folgenden Elastizitätsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
P\delta_{am} - X_a\delta_{aa} - X_b\delta_{ab} - X_c\delta_{ac} \cdots\cdots - X_r\delta_{ar} &= \delta_a \\
P\delta_{bm} - X_a\delta_{ba} - X_b\delta_{bb} - X_c\delta_{bc} \cdots\cdots - X_r\delta_{br} &= \delta_b \\
P\delta_{cm} - X_a\delta_{ca} - X_b\delta_{cb} - X_c\delta_{cc} \cdots\cdots - X_r\delta_{cr} &= \delta_c \qquad (164) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P\delta_{rm} - X_a\delta_{ra} - X_b\delta_{rb} - X_c\delta_{rc} \cdots\cdots - X_r\delta_{rr} &= \delta_r .
\end{aligned}
$$

Hierin sind (nach Maxwell) *alle δ mit einem aus zwei gleichen Buchstaben gebildeten Doppelzeiger gleich groß*:

$$\delta_{am} = \delta_{ma}; \quad \delta_{ab} = \delta_{ba}; \quad \delta_{ac} = \delta_{ca}; \quad \delta_{ar} = \delta_{ra} \quad \text{usw.}$$

Man kann deshalb in jeder der r Elastizitätsgleichungen die Verschiebungen δ *auf ein und dieselbe Ursache* zurückführen: in der ersten Gleichung auf »$X_a = -1$«; in der zweiten auf »$X_b = -1$«, in der letzten auf »$X_r = -1$«. Somit kann man auch alle in je einer der Elastizitätsgleichungen vorkommenden δ *aus einem einzigen Verschiebungsplane* (**20**—**22**) entnehmen. Zur Bestimmung aller δ braucht man also nur so viele jener Pläne, als überzählige Größen vorhanden sind.

Die Elastizitätsgleichungen lauten danach

$$
\begin{aligned}
P\delta_{ma} - X_a\delta_{aa} - X_b\delta_{ba} - X_c\delta_{ca} \cdots\cdots - X_r\delta_{ra} &= \delta_a \\
P\delta_{mb} - X_a\delta_{ab} - X_b\delta_{bb} - X_c\delta_{cb} \cdots\cdots - X_r\delta_{rb} &= \delta_b \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P\delta_{mr} - X_a\delta_{ar} - X_b\delta_{br} - X_c\delta_{cr} \cdots\cdots - X_r\delta_{rr} &= \delta_r .
\end{aligned}
$$

Die *Gesamtverschiebungen* δ_a, δ_b bis δ_r der Punktepaare (oder Punkte) a, b bis r sind *gegeben*. Entweder sind es elastische Längenänderungen Δs von Stäben, Verschiebungen von Stützpunkten oder Verdrehungen von Geraden. Es seien z. B. δ_a und δ_r Stablängenänderungen, δ_b und δ_e Verschiebungen von Stützpunkten. Dann wäre anzuschreiben

$$\delta_a = \frac{X_a s_a}{EF_a} = X_a k_a; \quad \delta_r = \frac{X_r s_r}{EF_r} = X_r k_r,$$

sowie unter der Voraussetzung unbeweglicher Stützpunkte

$$\delta_b = 0; \qquad \delta_e = 0.$$

Über *Stützensenkungen* und dgl. vgl. unter **34**.

Weil nun sämtliche δ mit dem Doppelzeiger entweder aus einem für das *Hauptsystem* gezeichneten Verschiebungsplane, oder einer Biegelinie, oder aus je einer Arbeitsgleichung (nach MOHR) zu gewinnen sind, so lassen sich aus obigen r Elastizitätsgleichungen die r überzähligen Größen X berechnen. Schreibt man für alle δ mit dem Doppelzeiger eine Arbeitsgleichung an, worin *sowohl der gedachte als auch der wirkliche Belastungszustand eine Krafteinheit* bedeutet, so erhält man die Elastizitätsgleichungen in der Form:

$$\begin{aligned}
&P\sum S_0 S_a k - X_a \sum S_a^2 k - X_b \sum S_b S_a k - X_c \sum S_c S_a k \cdots - X_r \sum S_r S_a k = \delta_a \\
&P\sum S_0 S_b k - X_a \sum S_a S_b k - X_b \sum S_b^2 k - X_c \sum S_c S_b k \cdots - X_r \sum S_r S_b k = \delta_b \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (165) \\
&P\sum S_0 S_r k - X_a \sum S_a S_r k - X_b \sum S_b S_r k - X_c \sum S_c S_r k \cdots - X_r \sum S_r^2 k = \delta_r.
\end{aligned}$$

Die Gesamtverschiebungen δ_a, δ_b bis δ_r sind entweder gleich *Null*, wenn sie sich auf *unverschiebliche* Stützpunkte beziehen, oder sie sind mit

$$X_a k_a, \quad X_b k_b \text{ bis } X_r k_r$$

anzuschreiben, wenn sie *die elastische Längenänderung* eines überzähligen Tragwerks- oder Stützenstabes vorstellen. Bringt man also die letztgenannten δ auf die linke Seite unter das betreffende Summenzeichen, so stimmen die Elastizitätsgleichungen (164) mit den (unter **31**) durch unmittelbares Anschreiben der Arbeitsgleichungen MOHRS erhaltenen Gleichungen (163) völlig überein. *Jedes Summenzeichen erstreckt sich dann auch über alle Stäbe des statisch unbestimmten Systemes*, wobei aber — im Hinblick auf die Gl. (159—160) für X und S — zu beachten bleibt, daß für jeden Belastungszustand (»$X_a = -1$«, oder »$X_b = -1$« oder »$X_r = -1$«) die *in dem betreffenden überzähligen Stabe selbst* erzeugte Stabkraft (S_a, S_b oder S_r) gleich -1 ist, während alle andern *überzähligen* Stabkraftgrößen verschwinden.

Schließlich wäre noch zu beachten, daß $(r - 1)$ Summenglieder jeder Elastizitätsgleichung — z. B. in der ersten die Summen von $S_b S_a k$, $S_c S_a k$ bis $S_r S_a k$ — in den übrigen Gleichungen, in umgestellter Form zum zweiten Male erscheinen. Das gibt also im ganzen $r(r - 1)$ Summengrößen, von denen *je zwei* einander gleich sind, wodurch der Satz von MAXWELL (**13**) nochmals bewiesen wird.

b. Die Einflußflächen der überzähligen und notwendigen Stabkraftgrößen. Für jede beliebige Lage der Einzellast P können nach vorigem die X berechnet werden. Die Angriffspunkte von P sind die Knoten des *Lastgurtes* (II. **1**, c und **16**). Trägt man also auf einer Wagerechten, lotrecht unter jenen Knoten die entsprechenden Werte einer überzähligen Größe X als Ordinaten $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ auf, so liegen deren Endpunkte in einem Vielecke und dieses ist die Einflußlinie für das betreffende X (Fig. 172).

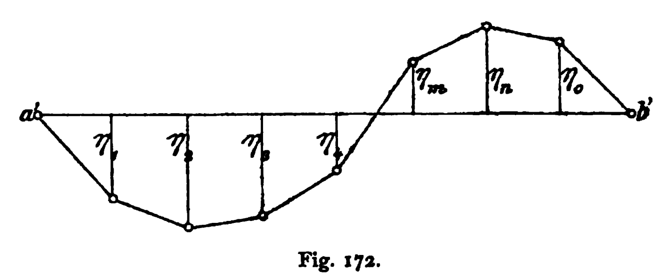


Fig. 172.

Die Einflußlinie für die Stabkraft S eines notwendigen Stabes erhält man mit Hilfe der Gleichung

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c - \cdots - S_r X_r,$$

indem man für jedes Glied der Gleichung eine besondere Einflußlinie zeichnet und für jeden Lastpunkt die algebraische Summe der Ordinaten η aller Einflußlinien herstellt. Jede $\sum y$ gibt dann eine Ordinate der gesuchten Einflußlinie für S. Die Einflußlinie für S_0 (im Hauptsysteme) kann unmittelbar nach einem der im II. Bande (unter § 3—5) gezeigten Verfahren gerechnet werden.

Im einzelnen lassen sich beim Auftragen der Einflußlinien, um die Arbeit zu erleichtern, noch manche kleine Hilfsmittel anwenden. Es lohnt sich jedoch nicht, näher darauf einzugehen, weil alle diese nebensächlichen Dinge an den Beispielen in **36**, **40**, **45**, **47**, **49** studiert werden können, ohne daß es nötig wäre, sie hier vorher allgemein zu behandeln.

Besonders wichtig ist für die Anwendung der bekannte Satz, wonach *die für eine Krafteinheit gezeichnete Biegelinie des Lastgurtes, mit*

einem gegebenen Multiplikator, die Einflußlinie der betreffenden überzähligen Größe X vorstellt. Für ein einfach unbestimmtes System erhält man

$$X_a = \frac{P \cdot \delta_{ma}}{\delta_{aa}} = \frac{P \sum S_0 S_a k}{\sum S_a^2 k}.$$

Die für die Krafteinheit eines Punktes oder Punktepaares gezeichnete Biegelinie des Lastgurtes ist danach die Einflußfläche von X_a, wenn deren Multiplikator gleich $\frac{1}{\delta_{aa}}$ gewählt wird. Jede Ordinate η der Einflußfläche ist dann gleich δ_{ma} oder gleich $\sum S_0 S_a k$. Über die Anwendung des Satzes für ein mehrfach statisch unbestimmtes System vgl. unter § 7—9.

33. Die Einflüsse von Temperaturänderungen.

a. Die Temperaturschwankungen. Die Wärme der die Konstruktion umgebenden Luft ist stets veränderlich. Deshalb wird es notwendig, schon beim Entwurfe der Konstruktion mit einer bestimmten feststehenden Luftwärme zu rechnen, für welche die vorgesehenen Grund*maße* (Stützweiten, Pfeilhöhen, Stablängen) zu gelten haben. Man wählt dabei zweckmäßig eine *mittlere* Gradzahl, derart, daß die voraussichtlichen Temperaturschwankungen nach beiden Seiten hin gleich groß werden. In Mitteleuropa gilt dafür etwa $+10^\circ$ C (I. 8). Außerdem nimmt man für *Eisen*konstruktionen an, daß die höchste Wärme eines Teiles nicht über 45° steigen und seine größte Kälte nicht unter 25° sinken wird. Das gäbe also eine gleiche Schwankung nach oben und unten von $\pm 35^\circ$.[1]

Wenn eine Konstruktion völlig im Schatten liegt, so wird man den Grenzwert der *Eisen*wärme auf etwa 35° ermäßigen dürfen. Liegt sie aber ganz in der Sonne, so wird nötigenfalls eine Erhöhung des Grenzwertes von 45° eintreten müssen, weil bekanntlich das Eisen eine höhere Temperatur annehmen kann, als diejenige der umgebenden Sonnenluft. In einzelnen Fällen sind darüber Beobachtungen aufgezeichnet worden. So kam man in Lyon, bei der Aufstellung von Bogenbrücken[2], in den Jahren 1886—87 zu folgenden Ergebnissen. In acht Bohrlöchern der Konstruktion, die mit Quecksilber gefüllt waren, wurde die Temperatur, sieben Monate lang, von Stunde zu Stunde gemessen. Es kamen Temperaturen bis $+32^\circ$ im Schatten und bis $+35^\circ$

[1] Vorschriften für die Berechnung eiserner Brücken. Zentralbl. d. Bauverw. 1903. S. 303.

[2] Expériences sur l'action directe du soleil. Annal. d. ponts et chauss. 1893. II. S. 438—444.

in der Sonne vor, wie das in der Fig. 173 dargestellt ist[1]. Die Abszissenlinie gibt die beobachtete Schattenwärme der Luft an. Die mit ihr sich ändernden Temperaturen der Sonnenluft und der Eisenwärme konnten genau genug durch gerade Linien dargestellt werden. Die untere Linie gibt die größte Lufttemperatur in der Sonne an, sie liegt 3—4° über der Schattenwärme. *Die Durchschnittswärme des Eisens stieg 15° über die Lufttemperatur im Schatten. Der größte Unterschied zwischen dem wärmsten und kältesten Punkte des Eisens war* 14°. Die Versuche zeigten auch, daß Eisenteile gegen unmittelbare Sonnenbestrahlung geschützt werden konnten, wenn man sie mit einem Blechkasten umgab. Auf solche Weise erniedrigte man an einer Stelle die größte Eisenwärme um 7°. Daß hellere Anstrichfarben im allgemeinen einen wirksameren Temperaturschutz bilden, als dunklere, liegt auf der Hand.

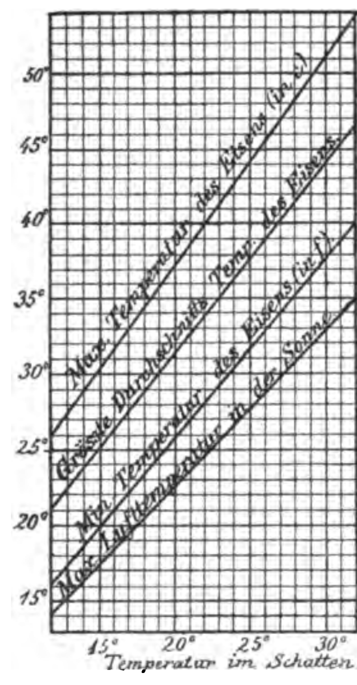


Fig. 173.

Bei Steinbauten liegen, soweit wie bekannt, ähnliche Versuche nicht vor. Steine nehmen die Wärme langsamer an als Eisen, deshalb erscheint es wohl zulässig, im allgemeinen die Schwankungen der Temperatur über die mittlere Zahl von +10°C *kleiner* als ±35°C anzusetzen[2].

b. Einfluß der Luftwärme auf die überzähligen Größen.

1. Schon im I. Bande (unter I. **36**) ist das Verhalten der statisch bestimmten und unbestimmten Konstruktionssysteme gegenüber den Temperatureinflüssen besprochen worden. Dabei wurden nur Fachwerke betrachtet. Doch was von diesem in beregter Hinsicht zu sagen ist, gilt auch für Vollwandtragwerke.

Bei *statisch bestimmten* Systemen sind alle innern Kräfte *allein* von der Lage und Größe der Lasten und Stützenkräfte abhängig. Bei eintretenden Wärmeschwankungen werden die innern Kräfte sich also nur

[1] Ostenfeld, Technische Statik. 1904. S. 309.

[2] Mehrtens, Ausführung und Unterhaltung der steinernen Brücken. Handb. d. Ing.-Wissenschaften. II. Teil. I. Band. 4. Aufl. S. 353.

insoweit ändern, als aus der gleichen Ursache auch Lage und Größe der genannten äußern Kräfte beeinflußt werden können. Das kann aber nur geschehen, wenn sich infolge der Temperatureinflüsse die *Grundmaße* der Konstruktion erheblich vergrößern, verkleinern oder verschieben, namentlich die *Stützweiten*, sowie bei Bogenträgern besonders auch die *Bogenhöhe* (Pfeilhöhe). Im allgemeinen werden die beregten Veränderungen der Grundmaße nicht so erheblich sein, daß es notwendig erschiene, die dadurch verursachten Temperaturspannungen *der Sicherheit wegen* in die Berechnung mit aufzunehmen. Ebenso vernachlässigt man im allgemeinen die *Nebenspannungen*, welche von den Reibungswiderständen verursacht werden, die entstehen, wenn die von der Temperatur ergriffene Konstruktion vermöge ihrer beweglichen Stützen oder Knotengelenke ihre Lage zu verändern sucht (I. **15**, **16**).

Wesentlich anders und erheblich ungünstiger liegt die Sache bei den *statisch unbestimmten* Systemen, denn bei diesen können die überzähligen Größen nur mit Hilfe von Elastizitätsgleichungen (163—164) berechnet werden. *Jede Änderung der Grundmaße der Konstruktion beeinflußt daher im allgemeinen auch die überzähligen Größen.* Ist die Konstruktion *außen* statisch unbestimmt, so wird jede Temperänderung auch eine Veränderung der überzähligen Stützenkräfte herbeiführen, was wiederum auf die innern Kräfte der gesamten Konstruktion zurückwirkt. Dagegen wird bei einer bloßen *innern* Unbestimmtheit eines *Fachwerks* nur das *Grundeck* (I. **30**) von Temperatureinflüssen getroffen, gleichviel, welche seiner überzähligen Stäbe im Hauptsystem beseitigt worden sind.

Bei statisch unbestimmten Systemen ist es nach obigem *aus Gründen* der Sicherheit notwendig, die aus Temperatureinflüssen herrührenden Nebenspannungen aller in Frage kommenden Tragwerksstäbe, Stützenstäbe und Querschnitte genau zu berechnen. Unter Umständen birgt das Anwachsen der Temperaturspannungen eine Gefahr in sich. Deshalb sollten *statisch bestimmte Konstruktionen*, *wenn dagegen im Einzelfalle nicht besondere Gründe sprechen*, *unter sonst gleichen Umständen den statisch unbestimmten im allgemeinen vorgezogen werden.* Jedoch gibt es immerhin manche Fälle, in denen statisch unbestimmte Konstruktionen wohl am Platze sind, namentlich bei *Bogen-* und *Hängebrücken.*

2. Für statisch unbestimmte Systeme ist der Temperatureinfluß wie ein *Belastungszustand* anzusehen, denn er erzeugt ebenso wie die wirklichen Lasten P sowohl Formänderungen als auch Spannungen. Den Einfluß der Lasten P und der Temperatur auf die überzähligen Größen

kann man also dadurch ausdrücken, daß man die bis jetzt betrachteten Belastungszustände »$X = 0$«, »$X_a = -1$«, »$X_b = -1$«, $\cdots$ bis »$X_r = -1$« noch durch die *Temperaturbelastung* vermehrt. Das jeder Elastizitätsgleichung danach anzuhängende Summenglied berechnet sich wie folgt:

Für irgend einen der *gedachten* Belastungszustände »$X_a = -1$« bis »$X_r = -1$« bleibt die allgemeine Arbeitsgleichung (162) unverändert, weil sie für jede beliebige *wirkliche* Belastung, eingeschlossen die Temperaturbelastung, angeschrieben werden kann. Die erste der Elastizitätsgleichungen erhält man danach aus der Arbeitsgleichung

$$\sum S_a S k = 0.$$

Darin ist

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c - \cdots - S_r X_r + T, \qquad (166)$$

wenn T die in irgend einem notwendigen oder überzähligen Stabe erzeugte Temperatur-Stabkraft bedeutet. T ist positiv oder negativ. Bei *Druck*stäben ist die Kälteverkürzung und bei *Zug*stäben die Wärmeverlängerung in Rechnung zu stellen. Nach dem Elastizitätsgesetz kann

$$T = \alpha t E F$$

gesetzt werden, wenn α die *Temperaturdehnung* für 1° C bezeichnet, und t die *Zahl der Grade* angibt, um welche die Berechnungstemperatur von der mittleren Wärme ($+10^\circ$ C) abweicht. Setzt man den Ausdruck für S in obige Arbeitsgleichung ein, so erhält man die erste Elastizitätsgleichung mit

$$\sum S_a S_0 k - X_a \sum S_a^2 k - X_b \sum S_a S_b k \cdots - X_r \sum S_a S_r k + \sum S_a \alpha t s = 0, \qquad (167)$$

weil

$$T \cdot k = \alpha t E F k = \frac{\alpha t E F s}{E F} = \alpha t s \qquad \text{ist.}$$

Wie (unter **31**, b) ausführlich erläutert, erstreckt sich jedes der Summenzeichen über alle notwendigen und überzähligen Stäbe. Will man die Elastizitätsgleichung, wie es unter **32**, a geschehen ist, durch eine *Summe von Verschiebungen* ausdrücken, die je für einen Belastungszustand *des Hauptsystemes* gelten, so erhält man *für eine wandernde Einzellast P im beliebigen Knoten m*

$$\begin{aligned} \delta_a &= P\delta_{ma} - X_a\delta_{aa} - X_b\delta_{ba} - X_c\delta_{ca} - \cdots - X_r\delta_{ra} + \delta_{at}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (168) \\ \delta_r &= P\delta_{mr} - X_a\delta_{ar} - X_b\delta_{br} - X_c\delta_{cr} - \cdots - X_r\delta_{rr} + \delta_{rt}. \end{aligned}$$

Darin bedeuten $\delta_{at} \ldots$ bis δ_{rt} die allein von der Temperatur verursachte wirkliche Verschiebung eines Punktepaares oder Punktes, in welchem die überzähligen Größen X_a, $X_b \ldots$ bis X_r als äußere Kräfte angreifend gedacht werden. Zu beachten bleibt, daß beim Anschreiben der Arbeitsgleichungen

$$\delta_{ma} = \sum S_a S_0 k\,,$$
$$\delta_{aa} = \sum S_a^2 k\,,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\delta_{cr} = \sum S_c S_r k$$

jedes der Summenzeichen sich nur über die *notwendigen* Stäbe zu erstrecken hat. Die aus den $(r + 1)$ Belastungszuständen herrührenden Gesamtverschiebungen δ_a, δ_b bis δ_r *sind in jedem Falle gegeben.* Bedeuten sie die elastische Verschiebung eines Punkte*paares*, in welchem ein *Tragwerks*stab angreift, so ist z. B. dafür, nach dem Elastizitätsgesetze,

$$\delta_a = X_a k_a; \quad \delta_c = X_c k_c; \quad \delta_r = X_r k_r \tag{169}$$

anzuschreiben, worin k_a, k_c, k_r das *Dehnungsvermögen* des betreffenden Stabes vorstellt. Beziehen diese Verschiebungen sich dagegen auf *Stützpunkte*, so dürfen sie in der Regel gleich *Null* gesetzt werden (**31**, b. 1). Welche der beiden gegebenen Formen der Elastizitätsgleichungen in besondern Fällen am bequemsten anzuwenden ist, wird der Leser beim Durcharbeiten der folgenden Übungsaufgaben leicht erkennen können.

3. Es ist immer zu empfehlen, die Temperaturspannungen besonders zu berechnen, damit man einen Vergleich darüber hat, ob und inwieweit sie gegenüber den von den Lasten P erzeugten innern Kräften *ins Gewicht fallen.* Das ist auch der Grund, warum (unter **31**, b) die Elastizitätsgleichungen vorläufig *allein* für die Lasten P angeschrieben worden sind. Will man eine solche besondere Berechnung ausführen, so braucht man in den Elastizitätsgleichungen (163) oder (164) nur das erste, dem Belastungszustande »$X = 0$« entsprechende Glied gleich Null zu setzen und außerdem für die von der Temperatur erzeugten überzähligen Größen X die Bezeichnungen

$$X_{at},\; X_{bt},\; X_{ct},\; \cdots \text{ bis } X_{rt}$$

einzuführen. Die mit Hilfe der so geänderten Elastizitätsgleichungen berechneten überzähligen Größen X_t sind — soweit sie *innere* Kräfte eines Fachwerks vorstellen — gleich den betreffenden Temperaturstabkräften. Diese bleiben also nur noch für die *notwendigen* Stäbe zu berechnen. Das geschieht auf statisch bestimmtem Wege dadurch, daß man alle X_t als äußere Kräfte, *die das Hauptsystem belasten*, anbringt.

Bei der Berechnung der Temperaturspannungen von *Vollwand*trägern kommen, wie schon unter **31** gesagt, nur überzählige *Stützen*kräfte X_t vor.

Danach lauten die für den *bloßen* Einfluß einer Temperaturbelastung gültigen Elastizitätgleichungen entweder

$$\sum S_a(\alpha t s) - X_{at}\sum S_a^2 k - X_{bt}\sum S_a S_b k - \cdots - X_{rt}\sum S_a S_r k = 0$$
$$\ldots \qquad (170)$$
$$\sum S_r(\alpha t s) - X_{at}\sum S_r S_a k - X_{bt}\sum S_r S_b k - \cdots - X_{rt}\sum S_r^2 k = 0$$

oder

$$\delta_a = \delta_{at} - X_{at}\delta_{aa} - X_{bt}\delta_{ba} - \cdots - X_{rt}\delta_{ra}$$
$$\ldots \qquad (171)$$
$$\delta_r = \delta_{rt} - X_{at}\delta_{ar} - X_{bt}\delta_{br} - \cdots - X_{rt}\delta_{rr},$$

wobei

$$\delta_a = X_{at}k_a; \quad \delta_b = X_{at}k_b; \quad \cdots \delta_r = X_{rt}k_r$$

zu setzen ist, wenn $k_a, k_b, \ldots k_r$, wie bekannt, das Dehnungsvermögen der überzähligen Stäbe ist. Danach ergäbe sich für ein *außen* einfach statisch unbestimmtes System mit unbeweglichen Stützpunkten

$$\delta_a = \delta_{at} - X_{at}\delta_{aa} = 0,$$

oder

$$X_{at} = \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}}. \qquad (172)$$

Für ein *innen* einfach statisch unbestimmtes Fachwerk

$$\delta_a = \delta_{at} - X_{at}\delta_{aa} = X_{at}k_a$$

oder

$$X_{at} = \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa} + k_a}, \qquad (173)$$

wobei das *Dehnungsvermögen*

$$k_a = \frac{s_a}{EF_a}$$

zu setzen ist.

34. Die Einflüsse von Zwangsspannungen und Stützpunktverschiebungen.

a. Der spannungslose Anfangszustand einer Konstruktion. Wie es bei der Berechnung von Gewölben (II. **43**) ausführlich dargelegt worden ist, so pflegt man auch bei der Berechnung jeder andern Konstruktion einen sog. spannungslosen Anfangszustand vorauszusetzen. Darunter versteht man dasjenige Bild der *gewichtlos* und *unbelastet gedachten* Konstruktion, das sich mit ihrem, für eine unveränderliche mittlere Luftwärme aufgestelltem *Entwurfe* völlig deckt. Ein solches spannungsloses Anfangsbild der Konstruktion kann auf der Baustelle in keinem Falle hergestellt werden. Das hat verschiedene Ursachen, die an dem Beispiele einer Eisenkonstruktion besprochen werden sollen.

Schon in der Werkstatt beginnen die Schwierigkeiten. Aber selbst wenn man annehmen wollte, daß dort alle Konstruktionsteile — unter Berücksichtigung der jeweiligen Tagestemperatur — fehlerlos abgemessen und zugerichtet, sowie auch vor ihrer Versendung probeweise derart zusammengepaßt worden sind, daß die Konstruktion sich mit ihrem Entwurfsbilde deckt, so ist das gleiche Endziel auf der Baustelle doch nie vollkommen zu erreichen. Ganz besondere Schwierigkeiten entstehen bei dem notwendigen Bestreben, den spannungslosen Anfangszustand zu erhalten, bis die Herstellung beendet ist, d. h. bis zu dem Zeitpunkte, in welchem (nach erfolgter Beseitigung oder Lüftung der Gerüste) *die Konstruktion beginnt, ihr Eigengewicht zu tragen.* In jenem Augenblicke wird die mittlere Luftwärme meistens nicht vorhanden sein, oder deren Eintreten nicht abgewartet werden. Jedoch wird eine vorsichtige Bauleitung rechtzeitig Fürsorge treffen, damit beim Einpassen der *Schlußstücke* das Gesamtbild der Konstruktion genau mit der dann herrschenden, von der mittlern Temperatur abweichenden Luftwärme möglichst übereinstimmt. Das wird der Fall sein, wenn beim Wiederkehren der mittlern Temperatur die Lage aller Knotenpunkte nur insofern vom ursprünglichen Entwurfe abweicht, als dies durch den formändernden Einfluß des bereits in Tätigkeit getretenen Eigengewichtes bedingt ist. In manchen Fällen, wo die Konstruktion ganz ohne festunterstützte Gerüste aufgebaut wird, sind Eigengewichtsspannungen von vorneherein nicht zu vermeiden, woraus für die Bauleitung die Pflicht erwächst, deren Einfluß im voraus zu berechnen und während der Aufstellung dauernd zu beobachten.

Man wird danach wohl beurteilen können, warum es selbst der gewissenhaftesten Bauleitung unmöglich ist, gewisse sog. *Anfangs- oder Zwangsspannungen*, die im Entwurfe nicht vorgesehen waren, zu vermeiden. Sie entstehen hauptsächlich durch *fehlerhaftes Ablängen* von Stäben und Ungenauigkeiten in der *Lage der Knoten*, zu denen ja auch die Stützpunkte gehören und ihr Einfluß ist selbstredend besonders schädlich bei statisch unbestimmten Systemen.

b. Stützpunktverschiebungen. Es ist notwendig, hier zweierlei verschiedene Arten von Verschiebungen zu unterscheiden:

1) solche, die nichts weiter bedeuten, als die elastische Längenänderung eines Stützenstabes ab, dessen Stützpunkt a sich rein *elastisch* verschiebt, während sein Knoten b unwandelbar liegen bleibt;

2) solche, bei denen außer der rein elastischen Verschiebung des Stützpunktes a auch noch eine *durch örtliche Umstände* verursachte *Senkung* des Knotens b zu berücksichtigen ist.

Beide Arten von Verschiebungen können auf gleiche Weise in Rechnung gestellt werden. Am einfachsten dadurch, daß man sich die betrachtete Stütze — wie es im ersten Bande (§ 3) ausführlich dargelegt worden ist — durch einen Stützenstab ersetzt denkt und dessen *Dehnungsvermögen*

$$k = \frac{s}{EF}$$

der zu erwartenden Stützenverschiebung in der Richtung der Stützenkraft anpaßt. Kommt eine durch örtliche Umstände verursachte Senkung eines Stützpunktes in Frage, so kann diese ihrer Größe nach nur abgeschätzt werden.

Hat man danach z. B. festgestellt, daß in der Konstruktion zwei Stützpunkte vorhanden sind, von denen voraussichtlich der eine a sich um $\pm \Delta a$, der andere c um $\pm \Delta c$ in der Richtung der zugehörigen Stützenkraft verschieben wird, so lauten die Arbeitsgleichungen (Temperatureinflüsse eingeschlossen) für eine wandernde Einzellast P:

$$\begin{aligned}
\delta_a &= \pm \Delta \alpha = P\delta_{ma} - X_a\delta_{aa} - X_b\delta_{ba} - \cdots - X_r\delta_{ra} + \delta_{at} \\
\delta_b &= \quad 0 \quad = P\delta_{mb} - X_u\delta_{ab} - X_b\delta_{bb} - \cdots - X_r\delta_{rb} + \delta_{bt} \qquad (174) \\
\delta_c &= \pm \Delta c = P\delta_{mc} - X_a\delta_{ac} - X_b\delta_{bc} - \cdots - X_r\delta_{rc} + \delta_{ct} \\
& \qquad \text{usw.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Will man den *alleinigen Einfluß* der beiden Stützensenkungen auf die überzähligen Größen erhalten, so sind die Glieder mit P und die Glieder $\delta_{at} \cdots$ bis δ_{rt} gleich Null zu setzen.

Die Gesamtverschiebungen δ_b, δ_d ... bis δ_r sind *Null*, soweit sie sich auf Stützpunkte beziehen, die als unbeweglich in der Stützenkraftrichtung vorausgesetzt werden dürfen. In praktischen Fällen sind das *Rollen- oder Stelzen*lager, kurze *Pendelstützen* oder *Pendelwalzen* und dgl. (I. § 19—20). Lange Stützenstäbe oder Pfeiler können mit Hilfe der Vorausbestimmung ihres Dehnungsvermögen in den Summengliedern der Elastizitätsgleichungen mit aufgenommen werden.

Maxwell sagt am Schlusse seiner (unter **13**, a) wiedergegebenen Arbeit über die Gegenseitigkeit von Verschiebungen: »In belasteten Konstruktionen, in welchen wir die Verschiebung jedes Knotens berechnen wollen, kann man die Stützpunkte (points of support) als die Enden von Stäben betrachten, welche die Konstruktion mit dem Mittelpunkt des Erdkörpers verbinden; und wenn die Stüzpunkte auch zur Aufnahme von wagerechten Schüben fähig sind, muß man sie untereinander durch einen Stab von gleichwertigem Dehnungsvermögen verbinden. Die Verschiebung ist dann die Verkürzung eines Stabes, der sich vom Stützpunkt

bis zum Mittelpunkt der Erde erstreckt.« Damit hat MAXWELL die Abhängigkeit der Verschiebungen von der Elastizität der Pfeiler oder Widerlager und *namentlich des Untergrundes* kennzeichnen wollen. Die große Schwierigkeit der Berechnung von Stützen*senkungen* besteht aber darin, daß das zu erwartende Dehnungsvermögen der Pfeiler und des Untergrundes auch schätzungsweise wohl in keinem Falle zutreffend zu ermitteln sein wird. Wenn aber eine Bauleitung das Eintreten solcher Senkungen nach erfolgter Aufstellung und Inbetriebnahme einer Konstruktion bestimmt voraussieht oder auch nur fürchtet, so muß sie deren Einflüsse auf die überzähligen Größen schon bei den Vorberechnungen des Entwurfes berücksichtigen. In dieser Beziehung gebietet namentlich der Bau von durchgehenden Balkenträgern und von statisch unbestimmten Bogenträgern Vorsicht. Beim Bau der Bogenbrücke in der Nähe von Grünental, über den Nordostseekanal, deren Stützweite 156,5 m beträgt, rechnete man mit einer möglichen Verschiebung jedes Endpfeilers von 2 cm, bevor die Bogenkraft durch Einsetzen eines Zuggurtes aufgehoben werden konnte. Der Zuggurt jedes Bogenträgers wurde erst eingenietet, nachdem der Träger ausgerüstet war und demnach schon sein Eigengewicht zu tragen hatte. Dann rechnete man auf eine nochmalige Verschiebung jedes Endpfeilers von 0,8 cm in der Richtung der durch die Verkehrslast verursachten Bogenkraft.[1]

c. Zwangsspannungen.

1. Darunter versteht man die allein durch fehlerhafte Lage der Stützen oder falsches Ablängen von Stäben u. dgl. verursachten Stabspannungen. Das sind also *Zusatz-* oder *Neben*spannungen (I. **16**, c). Fehler in der Lage der Stützen können eine Änderung der *Stützweiten* des Entwurfes zur Folge haben. Ändert sich dadurch auch das Entwurfsbild eines Fachwerks, so beeinflußt das alle Werte S_o, S_a bis S_r des Hauptsystemes und dadurch auch die überzähligen Größen. Greift in dem fehlerhaft liegenden Stützpunkte eine überzählige Größe X an, so kann diese nur dann einen Einfluß äußern, wenn eine Stützenverschiebung *in der Richtung von* X erfolgt ist. Andernfalls liefert X keinen neuen Beitrag zur Formänderungsarbeit der Elastizitätsgleichungen. Für derartige Verschiebungen in der Richtung eines X gelten aber ohne weiteres die für Stützensenkungen aufgestellten Gl. (174).

2. Ist ein Stab *unrichtig abgelängt*, so paßt er bei der Aufstellung nicht genau zwischen sein Knotenpaar. Man muß ihn dann abkühlen

[1] FÜLSCHER, Der Bau des Kaiser-Wilhelm-Kanals. Zeitschr. f. Bauw. 1898, S. 742.

oder erwärmen, um ihn *ohne Zwang* einpassen und vernieten oder verbolzen zu können. Seine richtige Länge galt für die mittlere Luftwärme von $+10^0$ C. Müßte man den Stab nun um t Grad kühlen oder wärmen, um ihn passend zu machen, so wird er, wenn er die mittlere Temperatur wieder annimmt, Zwangsspannungen verursachen, die als *Temperatur*spannungen (**33**) berechnet werden können. Nimmt man nämlich alle übrigen Stäbe als bei 10^0 C spannungslos an und schreibt dem um $\pm \Delta s$ unrichtig gelängten Stabe eine diesem Werte entsprechende *Temperatur*änderung zu, so ist damit auch die Längenänderung jedes andern Stabes im Hauptsysteme bestimmt. Temperaturspannungen können aber selbstredend nur dann entstehen, *wenn der fehlerhaft gelängte Stab ein überzähliger war.* War es ein notwendiger Stab, so kann dieser zwar infolge seines Zwanges *das Entwurfsbild ein wenig ändern*, nach unsern Voraussetzungen aber niemals derart, daß nicht das elastische mit dem starren Gleichgewicht noch verwechselt werden dürfte. Somit kann er auch die statisch bestimmt ermittelten Werte S_0, S_a bis S_r des Hauptsystemes nicht mehr verändern.

Die *allein* durch fehlerhafte Länge eines überzähligen Stabes verursachte Änderung der überzähligen Größen berechnet sich danach wie folgt. Es sei $\pm \Delta s_a$ der *Ablängungsfehler* des Stabes X_a zwischen dem Knotenpaare a. Dann ist in *Temperatur*wirkung ausgedrückt

$$\Delta s_a = \alpha t s_a = \delta_{at}.$$

Setzt man diesen Wert von δ_{at} in die erste der Gl. (171) ein, so sind daraus die allein infolge der Zwangsspannung entstehenden überzähligen Größen zu berechnen. Wählt man die erste der Elastizitätsgleichungen (170), so ist darin

$$\sum S_a \alpha t s = S_a \alpha t s_a$$

zu setzen. Ist außer dem Stabe X_a *kein anderer* der überzähligen Stäbe falsch gelängt, so verschwinden in den übrigen Elastizitätsgleichungen alle die Temperaturbelastung betreffenden Glieder, also

$$\delta_{bt} \ldots \text{ bis } \delta_{rt} = 0$$

und

$$\sum S_b \alpha t s \ldots \text{ bis } \sum S_r \alpha t s = 0.$$

Sind aber *mehrere* überzählige Stäbe mit Zwang eingesetzt, z. B. X_c und X_r, so ist an Stelle der sonst verschwindenden Glieder zu setzen

$$\delta_{ct} = \alpha t s_c, \quad \delta_{rt} = \alpha t s_r$$

oder

$$\sum S_c \alpha t s = S_c \alpha t s_c; \quad \sum S_r \alpha t s = S_r \alpha t s_r.$$

35. Die Sätze von der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit.

a. Die Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft.

1. Die Arbeitsgleichung MOHRS in der Form

$$\bar{1} \cdot \delta = \sum \bar{S} \cdot \Delta s$$

bietet *das einfachste Mittel zur Berechnung irgend einer Verschiebung, die aus irgend einer Ursache entsteht.* Das ist unter **10** und in den Übungsaufgaben (**11**) ausführlich klargelegt worden. An ihrer Stelle kann man, zu gleichem Zwecke, auch die Abgeleitete der *wirklichen* Formänderungsarbeit benutzen, wie dies zuerst CASTIGLIANO[1] getan hat. Eine Vereinfachung der Lösung vorliegender Aufgabe hat CASTIGLIANO dadurch aber nicht erzielt, er macht vielmehr in seiner Rechnung einen Umweg, den man bei dem Verfahren von MOHR vermeidet, abgesehen davon, daß das letztere für *alle* Ursachen einer Verschiebung gleich einfach anzuwenden ist.

Die wirkliche Formänderungsarbeit einer äußern Kraft P_m ist (nach **3**, a) mit

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} P_m \delta_m$$

anzuschreiben, wenn zwischen der Kraft P_m und deren Wege δ_m *Proportionalität* vorausgesetzt wird. Für die wirkliche Formänderungsarbeit eines *ebenen oder räumlichen* Fachwerks, *das reibungslos auf unbeweglichen Stützpunkten ruht und sich im spannungslosen Anfangszustande befindet*, erhält man dann (nach Aufgabe 22, **11**, a)

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \sum S \Delta s,$$

oder, wenn das *Dehnungsvermögen* $k = \frac{s}{EF}$ eingeführt wird,

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \sum S^2 k. \tag{175}$$

Bei statisch unbestimmten Fachwerken kann man *die Achsenkräfte X der überzähligen Stäbe als äußere Kräfte angebracht denken.* Die Gleichung (175) gilt dann für das mit den äußern Kräften P und X belastete *Hauptsystem* (**10**).

Die nach irgend einer äußern Kraft P_m genommene (partielle) Abgeleitete der Arbeit berechnet sich mit

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial P_m} = \tfrac{1}{2} \sum d(S^2 k) = \sum S \frac{\partial S}{\partial P_m} k. \tag{176}$$

$\frac{\partial S}{\partial P_m}$ bedeutet die Abgeleitete irgend einer Stabkraft S eines statisch

[1] CASTIGLIANO, Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications. 1879.

bestimmten oder unbestimmten Fachwerks. Für S ist der allgemeine Ausdruck

$$S = (S_1 P_1 + S_2 P_2 + \cdots + S_m P_m) + (S_a X_a + S_b X_b + \cdots + X_r S_r) \qquad (177)$$

zu setzen. Darin bedeuten S_1 bis S_m und S_a bis S_r *die von einer Krafteinheit eines betrachteten Stabes (Stützenstäbe eingeschlossen) verursachte Stabkraft.* Sämtliche S_1 bis S_r sind *unabhängig* von den P und X. Ebenso sind die *Lasten* P und X (nach **31**) untereinander als Unabhängige zu betrachten. Daraus folgt die Abgeleitete

$$\frac{\partial S}{\partial P_m} = S_m \frac{\partial P_m}{\partial P_m} = S_m \qquad (178)$$

und Gl. (176) geht über in

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial P_m} = \sum S_m S k \,. \qquad (179)$$

Die Arbeitsgleichung MOHRS lautet

$$\bar{1}_m \cdot \delta_m = \sum S_m S \cdot k \,.$$

In beiden letzten Gleichungen erstreckt sich das Summenzeichen über *alle Stäbe* des Fachwerks, Stützenstäbe eingeschlossen. Also folgt

$$\bar{1}_m \cdot \delta_m = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial P_m} \,. \qquad (180)$$

In Worten: *Der Weg δ_m einer Last P_m ist gleich der nach P_m genommenen Abgeleiteten der wirklichen Formänderungsarbeit des Fachwerkes.*

Unter den Lasten P sind, wie oben erläutert, die *überzähligen Größen* X einbegriffen. S_m bedeutet also die in einem *notwendigen* Stabe durch eine im Punkte m (in der Richtung von P_m) angreifende *Krafteinheit* erzeugte Stabkraft. S stellt dagegen diejenige Stabkraft desselben Stabes vor, die infolge der Gesamtwirkung aller P und X hervorgerufen wird (**31**).

Man sieht: Der obige zuerst von CASTIGLIANO gegebene Satz sagt nicht mehr aus, als die Arbeitsgleichung MOHRS. Denn deren rechte Seite bedeutet, wie nachgewiesen, auch nichts anderes als die Abgeleitete der wirklichen Formänderungsarbeit. CASTIGLIANO muß diese erst berechnen, während MOHR sie unmittelbar anschreibt. Deswegen bedeutet CASTIGLIANOS Verfahren der Berechnung einer Verschiebung δ eine auf unnötigem Umwege bewirkte Anwendung der Arbeitsgleichung MOHRS.

Der Satz CASTIGLIANOS läßt sich auf gleichem Wege, wie oben, auch für *Vollwandträger* ableiten.

b. Der Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit.

1. Man schreibe irgend eine der (unter **31**) für die überzähligen Größen X abgeleiteten Arbeitsgleichungen an, z. B. die erste Gleichung (162)

$$\sum S_a S k = 0.$$

Darin ist nach Gl. (177)

$$S = S_0 + S_a X_a + S_b X_b + S_c X_c + \cdots + S_r X_r.$$

Die partielle Abgeleitete von S, genommen nach X_a, folgt mit

$$\frac{\partial S}{\partial X_a} = S_a \frac{\partial X_a}{\partial X_a} = S_a.$$

Die wirkliche Formänderungsarbeit ist

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\sum S^2 k$$

und daraus erhält man

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial X} = \sum S \frac{\partial S}{\partial X_a} k = \sum S_a S k.$$

Das gibt schließlich

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial X_a} = 0.$$

In gleicher Weise sind die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial X_b} = 0; \quad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial X_c} = 0 \quad \text{bis} \quad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial X_r} = 0$$

abzuleiten. In Worten ausgedrückt:

Die überzähligen Größen machen die wirkliche Formänderungsarbeit des Fachwerkes zu einem Minimum.

Daß kein Maximum eintreten kann, ist selbstverständlich, dieses müßte sonst unendlich groß werden. Das könnte aber nur im Falle unendlich kleiner Beweglichkeit (I. **34**) eintreten, der ausgeschlossen wird.

Differentiiert man danach den Ausdruck der Arbeit eines statisch unbestimmten Fachwerkes, das durch die P und X belastet ist, je nach einer der r überzähligen Größen, so erhält man durch Nullsetzen jeder der r Abgeleiteten r Gleichungen zur Berechnung der überzähligen Größen.

2. Der obige Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit wurde zuerst von MENABREA gegeben[1]. Aber erst durch das bereits erwähnte Werk CASTIGLIANOS wurde der Satz in weitern technischen Kreisen

[1] MENABREA. Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques. Comptes rendus 1858. I. S. 1056.

bekannt. FRÄNKEL[1] gab eine selbständige Ableitung des Satzes im Jahre 1882. Ein Jahr später dann hat MOHR, als Erster, klargestellt, wie beschränkt das Anwendungsgebiet des obigen Satzes sei, im Vergleich zu der allgemeinen Verwendbarkeit der von ihm aus dem Satze der virtuellen Verschiebungen hergeleiteten Arbeitsgleichungen. Indem sich MOHR[2] dabei gegen MÜLLER-*Breslau* wendet, bezeichnet er die bei der Untersuchung einer elastischen Konstruktion zu lösenden *drei* von einander unabhängigen Aufgaben, *wörtlich* etwa wie folgt:

»1. *Die Bestimmung der von den Belastung hervorgerufenen innern Kräfte*;

2. die Ermittelung der innern Kräfte T, die von der Temperatur, von der Stützenlage und von der Aufstellungsart der Konstruktion abhängig sind;

3. die Bestimmung der mit den Kräften S und T verbundenen Formänderungen der Konstruktion.

Die Anwendung des Satzes der virtuellen Verschiebungen gestattet die Lösung dieser drei Aufgaben und zwar durch Betrachtungen von gleicher Form, während der Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit sich nur auf die *erste* Aufgabe bezieht. Diz Behauptung, daß die beiden Methoden *dasselbe* Anwendungsgebiet beherrschen, ist demnach nicht ganz zutreffend.«

MOHR bemerkt dann noch, wie die Richtigkeit des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit am einfachsten mit Hilfe des Satzes der virtuellen Verschiebungen bewiesen werden könne. Das ist im vorigen auch schon so geschehen. Er selbst beweist CASTIGLIANOS Satz auf folgende einfache Weise:

Nach erfolgter Beseitigung der Belastung einer Konstruktion verschwinden deren innere Kräfte in der Regel nicht vollständig, weil, abgesehen von dem Einflusse der Luftwärme, durch Mängel der Herstellung in der Werkstatt und auf der Baustelle (vgl. unter **34**) sog. *Zwangsspannungen* entstehen können. Man kann sich aber die *unbelastete* Konstruktion von einer *Temperatur*belastung T ergriffen denken, derart, daß dadurch alle Zwangsspannungen *aufgehoben* werden und somit die Konstruktion in einen *spannungslosen Anfangszustand* versetzt wird.

---

[1] FRÄNKEL. Das Prinzip der kleinsten Arbeit der innern Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben. Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. Hannover 1882. S. 63.

[2] MOHR. Über das sogenannte Prinzip der kleinsten Deformationsarbeit. Wochenbl. f. Arch. u. Ing. 1883. S. 171.

Man betrachte nun das Gleichgewicht irgend eines dieser unendlich vielen möglichen Kräftesysteme T, indem man um jeden Knotenpunkt des Fachwerks einen Schnitt herumführt und an den Schnittstellen die Kräfte T als äußere Kräfte anbringt. Verschiebt man dabei die Knotenpunkte um diejenigen kleinen Wege, welche dem Kräftesystem S entsprechen, so bezeichnet das Produkt Sk für jeden Stab dessen Längenänderung und TSk die *gedachte* Arbeitssumme der *beiden* in einem Knotenpunktepaare angreifenden Stabkräfte T. Werden die Stützpunkte als unbeweglich angesehen, so sind *keine äußern Kräfte vorhanden, die Arbeit verrichten.* Deshalb ist nach dem Satze der gedachten Verschiebungen

$$\sum T \cdot S \cdot k = 0 \qquad (181)$$

anzuschreiben.

Die wirkliche Formänderungsarbeit des Fachwerks ist

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\sum (S + T)^2 k = \frac{1}{2}\sum (S^2 + T^2 + 2\,S\,T)k.$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (181) erhält man also

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\sum S^2 k + \frac{1}{2}\sum T^2 k\,,$$

das ist eine aus zwei *positiven* Gliedern bestehende Summe. Unter den unendlich vielen Kräftesystemen $U = S + T$ ist danach das System

$$U = S \quad \text{oder} \quad T = 0$$

dasjenige, welches der *kleinsten* Formänderungsarbeit entspricht. Das ist das im spannungslosen Anfangszustande befindliche System.

36. Übungsaufgaben.

a. Vorbemerkungen über die Bildung des Hauptsystemes. Das Beseitigen der überzähligen Stäbe kann in beliebiger Weise erfolgen, wenn nur nicht das dadurch gewonnene Hauptsystem beweglich oder von unendlich kleiner Beweglichkeit wird (I. **34**—**35**). Bei unbestimmten *Vollwand*trägern wird das Hauptsystem durch Beseitigung von Stützenstäben oder in besondern Fällen auch durch Einführung der äußern Kräfte eines Schnittes (Längskraft, Querkraft, Moment) als überzählige Größen zu bilden sein. Bei Fachwerken wird man am besten *einfache* und *zusammengesetzte* unterscheiden (I. **16**, a).

1. *Einfache Fachwerke* sollte der Konstrukteur, wenn sie schon *außen* statisch unbestimmt sind, nicht noch unnötig auch *innen* unbestimmt machen, sondern die Wandgliederung als einteiliges Streben- oder Ständerfachwerk gestalten (II. **16**). Im allgemeinen wird man also bei *außen* statisch unbestimmten Fachwerken das Hauptsystem in zweierlei Art bilden können, nämlich entweder durch *Beseitigen von Stützenstäben*

(wobei in besondern Fällen (Aufgabe 44) auch Ersatzstützenstäbe verwendet werden) oder durch *Beseitigen von Tragwerksstäben* derart, daß das Hauptsystem ein *zusammengesetztes* Fachwerk wird. Z. B. kann das Hauptsystem eines Bogens mit zwei Kämpfergelenken entweder gebildet werden: durch Beseitigen eines Stützenstabes als *Balken*, oder durch Beseitigen eines Gurtstabes in der Bogenmitte als *Dreigelenkträger*. Es kann z. B. auch ein durchgehender Träger auf n Stützen durch Beseitigung von $n - 2$ Gurtstäben in das Hauptsystem eines Auslegeträgers (II. **22**) verwandelt werden usw.

In der Regel aber wird es sich nicht empfehlen, als Hauptsystem eines einfachen Fachwerkes ein zusammengesetztes Fachwerk zu wählen, weil dessen Biegelinien, Verschiebungspläne und Einflußflächen umständlicher darzustellen sind als für jene. So ist es z. B. nicht zu raten, als Hauptsystem eines beiderseits eingespannten, also dreifach unbestimmten Bogenträgers einen Dreigelenkbogen zu wählen. Einfacher gestaltet sich die Behandlung, wenn man — wie schon unter II. **43** (Fig. 148) gezeigt wurde — durch Beseitigung *einer* Einspannung das Hauptsystem als nur einerseits eingespannte Scheibe bildet. Noch einfacher verläuft aber wohl die Rechnung, wenn man auf einer Seite des Bogens *zwei* Stäbe und auf der andern Seite *einen* Stab beseitigt. In diesem Falle bildet das Hauptsystem einen dreistäbig gestützten Balken, dessen Einflußflächen und Formänderungen bequem darzustellen sind (**41**).

Bei *zwei*- und *drei*fach unbestimmten Systemen kann es von Vorteil sein, die überzähligen Größen X alle in einem einzigen Punkte anzubringen. Wenn dies geschieht, so lassen sich bei bestimmter Lage und Richtung der X die Elastizitätsgleichungen sehr vereinfachen, nämlich derart, daß daraus *alle δ mit einem aus verschiedenen Buchstaben gebildeten Zeiger verschwinden*[1]. Das heißt, es werden

$$\delta_{ab} = \delta_{ba} = 0\,,$$
$$\delta_{bc} = \delta_{cb} = 0.$$

Bei *drei*facher Unbestimmtheit lauten demnach die Elastizitätsgleichungen

$$\begin{aligned} \delta_a &= P\delta_{ma} - X_a\delta_{aa}, \\ \delta_b &= P\delta_{mb} - X_b\delta_{bb}, \\ \delta_c &= P\delta_{mc} - X_c\delta_{cc}\,. \end{aligned} \tag{182}$$

Man vgl. hierzu die Aufgaben unter b.

---

[1] Dies Verfahren ist (soweit bekannt) zuerst von MÜLLER-*Breslau* angegeben worden.

Bei unbestimmten Systemen, die zu ihrer lotrechten Mittelachse *symmetrisch* angeordnet sind, werden je zwei der δ mit einem aus *gleichen* Buchstaben gebildeten Zeiger gleich groß. Z. B. erhält man bei einem auf vier Stützen durchgehenden Träger die Bedingung

$$\delta_{aa} = \delta_{bb} ,$$

wodurch die Berechnung von X_a und X_b sich vereinfacht. Auch erhält man dabei die Einflußflächen für

$$\delta_{ma} \text{ und } \delta_{mb}$$

gleich, wenn auch ihrer Lage nach als *Spiegelbilder*.

Bei *innen* unbestimmten einfachen Fachwerken gibt es keinen andern Weg, als das Hauptsystem durch Beseitigen der überzähligen Tragwerksstäbe zu schaffen. Solche können immer nur in einem *Grundecke* vorkommen (I. **30** und **35**). Bei *innen und außen* unbestimmten einfachen Fachwerken — wie sie z. B. bei durchgehenden Trägern vorkommen könnten (aber möglichst vermieden werden sollten) — liegt die Möglichkeit vor, das Hauptsystem als *zusammengesetztes* Fachwerk zu erhalten.

2. *Zusammengesetzte Fachwerke.* Diese bestehen immer aus mehreren *Scheiben* und sollten zweckmäßig nur *außen* unbestimmt angeordnet werden. Die für einfache Fachwerke gegebenen Regeln genügen hier, um die Frage der besten Art der Bildung des Hauptsystems entscheiden zu können.

b. Einfache bis dreifache Unbestimmtheit. Es empfiehlt sich, vor dem Studium der folgenden, allgemein gehaltenen Aufgaben, die früher bereits gegebenen Lösungen statisch unbestimmter Fälle (unter **6**, **7**, **11** c und **14** c) anzusehen. Die *Stabquerschnitte* der nachfolgend behandelten Träger sind als gegeben oder als vorläufig angenommen zu betrachten.

Aufgabe 44. *Für den in der* Fig. 174 *dargestellten, über drei in gleicher Höhe liegende Stützen durchgehenden Fachwerkträger sollen die Einflußflächen der Stabkräfte U_2 und D_2 gezeichnet werden.*

Als überzählige Größe wählen wir die Stützenkraft X_c, die im Stützpunkte c des *unbestimmten Systems* durch eine im beliebigen Knoten m des Lastgurtes angreifende Einzellast $P =$ »Eins« erzeugt wird. Wir verwandeln das unbestimmte System durch Beseitigen der *zwei*stäbigen Stütze c und Hinzufügen *eines* Stabes in der Stütze b in ein statisch bestimmtes *Hauptsystem*. Dann berechnet sich die überzählige Größe (nach **32**) mit

$$X_c = \frac{1 \cdot \delta_{mc}}{\delta_{cc}} = \left(\frac{1}{\delta_{cc}}\right) \delta_{mc} .$$

Die Verschiebungen δ_{mc} und δ_{cc} entnehmen wir aus einer *Biegelinie* des Hauptsystems, gezeichnet für eine Lasteinheit »$X_c = -1$« (Fig. 175). Dabei berechnen sich die elastischen w-Kräfte der Fig. 176 nach § 4.

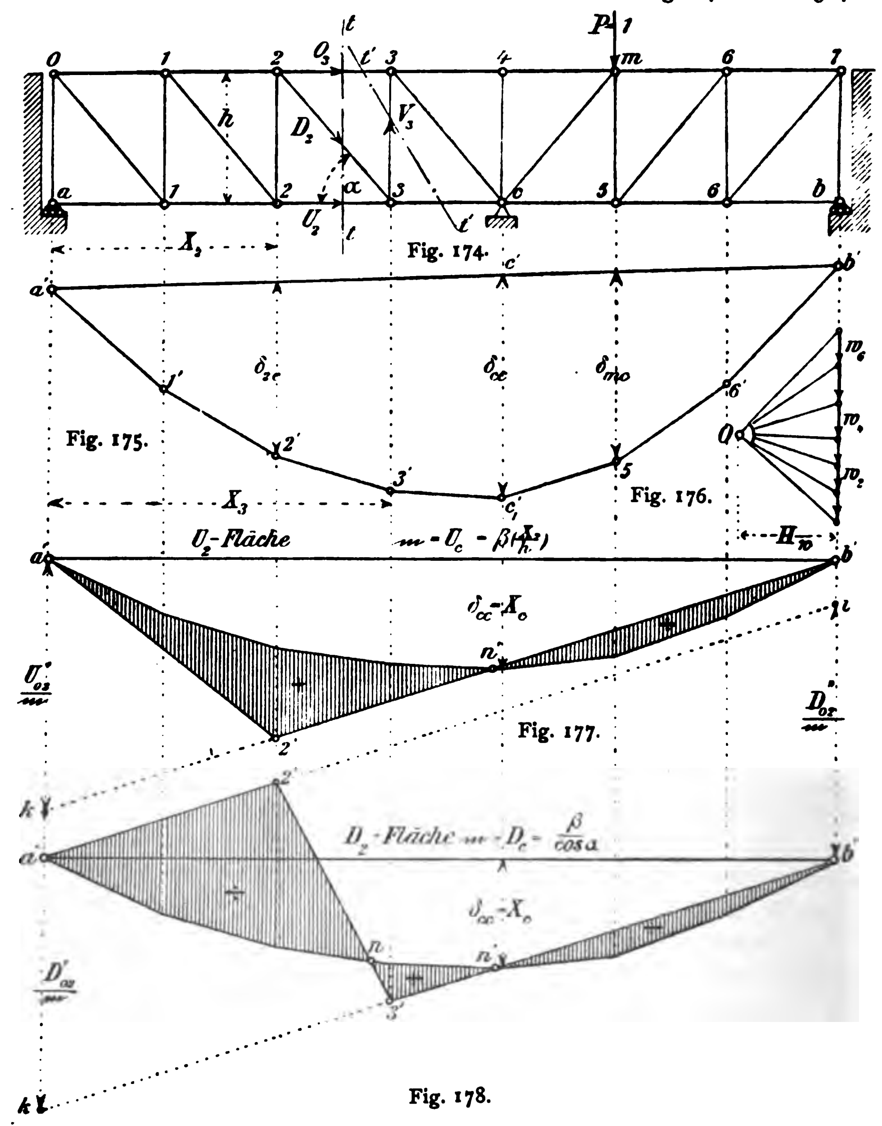


Fig. 174.

Fig. 175.

Fig. 176.

Fig. 177.

Fig. 178.

Der *Maßstab* der w-Kräfte, sowie auch die *Polweite* H_w des zugehörigen Kraftecks (Fig. 176) *kann beliebig gewählt* werden, weil X_c allein von dem *Verhältnis* zwischen δ_{mc} und δ_{cc} abhängig ist.

Wählt man die Höhe δ_{cc} der Bogenkraftfläche als »Einheit«, so ist $X_c = \delta_{mc}$, d. h. die überzählige Größe kann unmittelbar aus der zugehörigen Einflußfläche abgegriffen werden.

Will man X_c *unmittelbar* aus den Stabkräften des Hauptsystems bestimmen, so ist dafür die Arbeitsgleichung MOHRS

$$X_c = \frac{\sum S_0 S_c k}{\sum S_c^2 k}$$

maßgebend, wobei S_0 und S_c diejenigen Stabkräfte sind, die nacheinander für die Belastungszustände »$X = 0$« und »$X_c = -1$« ermittelt worden sind. Die Stabkräfte S_c wurden bereits für die Darstellung der Biegelinie gebraucht. Die Ermittelung von S_0 und S_c für jeden Stab des Hauptsystems geschieht mit Hilfe eines Kräfteplanes, oder nach einem andern Verfahren (I. § 10).

Irgend eine Stabkraft S des unbestimmten Systems ist durch die Gleichung

$$S = S_0 - X_c S_c \tag{183}$$

gegeben. Darin bedeutet S_0 irgend eine von der wandernden Einzellast im einfachen, bei a und b gestützten Parallelträger erzeugte Stabkraft.

Um die *Einflußfläche* für S bequem auftragen zu können, benutzt man am besten einen *Multiplikator* $\mathfrak{m}$, wie dies bereits für die Darstellung der Einflußflächen des Dreigelenkträgers (II. **28**) geschehen ist. Man formt danach die Gl. (183) um in

$$S = S_c\left(\frac{S_0}{S_c} - X_c\right) = \mathfrak{m}\left(\frac{S_0}{\mathfrak{m}} - X_c\right). \tag{184}$$

Für einen *Gurtstab* innerhalb der Stützenweite l_1 bestimmt sich S_c *rechnerisch* aus dem Belastungszustande »$X_c = -1$« mit

$$S_c = \mathfrak{m} = \left(\frac{1 \cdot l_2}{l_1 + l_2}\right)\frac{x}{r} = \beta\left(\frac{x}{r}\right). \tag{185}$$

Darin bedeuten

x: die von a ausgemessene Abszisse des zugeordneten Momentenpunktes und

r: der darauf bezogene Hebelarm der Stabkraft.

β berechnet sich aus dem gegebenen Verhältnisse der Stützweiten l_1 und l_2 des durchgehenden Trägers.

Für einen *Wandstab* ist S_c (nach II. **17**, b) aus der Querkraft Q mit

$$\mathfrak{m} = S = \frac{Q}{\cos\alpha}$$

zu berechnen. Das gibt innerhalb der Stützweite l_1:

$$\mathfrak{m} = S_c = \frac{1 \cdot l_2}{(l_1 + l_2)\cos\alpha} = \frac{\beta}{\cos\alpha}. \tag{186}$$

Danach sind in den Fig. 177—178 die gesuchten Einflußflächen für U_2 und D_2 gezeichnet. Dabei wurden die bereits im II. Bande (§ 3 und § 4) gegebenen Grundlagen der Darstellung angewendet. Danach bedeuten U'_o, D'_o, V'_o die durch eine Stützenkraft $A =$ »Eins« im *Hauptsystem* verursachten Stabkräfte, mit deren Hilfe diejenige Grenzlinie der Einflußflächen festgelegt wird, welche den Einfluß von A darstellt. Die beiden Grenzlinien jeder Einflußfläche treffen sich in einem Punkte der zugehörigen Momentenpunkt-Lotrechten.

Die *Vorzeichen* der Teilflächen bestimmt man am einfachsten aus dem Vorzeichen der Stabkräfte des Hauptsystems. In diesem ist z. B. U_2 positiv. Deshalb wurde die Ordinate $\frac{U'_{o2}}{\mathfrak{m}}$ unterhalb der Trägerlinie $a'b'$ aufgetragen, um den Unterschied zwischen den Werten $\frac{U_{o2}}{\mathfrak{m}}$ und X_c unmittelbar graphisch zu erhalten. Die dabei verbleibende U_2-Teilfläche $a'—2'—n'$ ist also *positiv* zu nehmen. In gleicher Weise erhält man ein positives Vorzeichen für die D_2-Teilfläche $n—3'—n'$.

Es sei

$$l_1 = 24 \text{ m}; \quad l_2 = 18 \text{ m};$$
$$\text{Feldweite } a = 6 \text{ m}; \quad \text{Trägerhöhe } h = 7 \text{ m}.$$

Dann berechnet man in Tonnen

$$U'_{o2} = \frac{1 \cdot 12}{7}$$

und

$$\mathfrak{m} = \left(\frac{l_2}{l_1 + l_2}\right)\frac{x_2}{h} = \left(\frac{18}{42}\right)\frac{12}{7}.$$

Das gibt

$$\frac{U'_{o2}}{\mathfrak{m}} = 2\tfrac{1}{3}.$$

Ebenso findet man

$$\frac{D_{o2}}{\mathfrak{m}} = \frac{1}{\beta} = \frac{7}{3} = 2\tfrac{1}{3}.$$

Macht man in Fig. 177—178 das δ_{cc} gleich »Eins«, so sind darin die Strecken $\overline{a'k} = 2\tfrac{1}{3}$ aufzutragen.

Aufgabe 45. *Für den in der* Fig. 179 *dargestellten gegliederten Sichelbogenträger mit schrägliegender Kämpferlinie* **ab** *ist* 1) *die durch eine Temperaturänderung verursachte Bogenkraft H_t und* 2) *die dadurch bewirkte lotrechte Verschiebung eines Knotens m im Lastgurte zu ermitteln.*

1. Das einfach unbestimmte System geht nach erfolgter Beseitigung *eines* Stabes im Gelenke a in das Hauptsystem über. Der Stützpunkt a sei dadurch in der Richtung der Kämpferlinie ab verschiebbar geworden und die unter dem alleinigen Einflusse einer beliebigen Temperaturänderung erfolgende Verschiebung δ_{at} ist aus der bekannten Arbeitsgleichung MOHRS mit

$$\bar{1} \cdot \delta_{at} = \sum S_a(\alpha_t t s). \tag{187}$$

zu finden, worin »$\bar{1}$« eine der positiven Richtung von X_t entgegengesetzt wirkende *gedachte* Lasteinheit vorstellt. Deshalb bedeutet S_a eine durch den Belastungszustand »$X_t = -1$« verursachte Stabkraft des Hauptsystems.

Die unbekannte Kämpferlinienkraft X_t bewirkt ebenfalls eine Verschiebung des Stützpunktes a. Diese ist mit

$$- X_t \delta_{aa}$$

anzuschreiben. Die Gesamtverschiebung aus beiden Ursachen muß gleich Null ausfallen, weil unverschiebbare Stützpunkte vorausgesetzt werden. Daraus folgt

$$\bar{1} \cdot \delta_{at} - X_t \delta_{aa} = 0$$

oder

$$X_t = \frac{\bar{1} \cdot \delta_{at}}{\delta_{aa}}, \tag{188}$$

was nach den Gl. (171) auch unmittelbar hätte angeschrieben werden können. Zähler und Nenner der Gl. (188) können sowohl graphisch als auch rechnerisch bestimmt werden.

Graphisch erhält man den *Zähler* aus einer *wagerechten Biegelinie* des betreffenden *Stabzuges* (**19**, b) oder aus einem *Verschiebungsplane* (**20**), wobei in beiden Fällen die Stablängenänderungen

$$\Delta s_t = \alpha_t t s$$

zu berechnen sind. Rechnerisch folgt der Zählerwert unmittelbar aus der Gl. (187), wenn vorher die S_a aus einem Kräfteplane oder dgl. genommen worden sind.

Den *Nenner* der Gl. (188) kann man (ebenso wie den Zähler) aus einer Biegelinie oder einem Verschiebungsplane erhalten. Rechnerisch folgt er aus der Arbeitsgleichung

$$\delta_{aa} = \sum S_a^2 k$$

oder nach (**19**, b) aus

$$\delta_{aa} = \sum y_w w_a, \tag{189}$$

worin jedes w_a eine für die lotrechte Biegelinie berechnete elastische Kraft bedeutet, die im zugehörigen Knoten in der *Richtung der Kämpferlinie* anzubringen ist. y_w bezeichnet deren *Hebelarm* in bezug auf die Kämpferlinie.

2. *Die lotrechte Verschiebung eines Knotens m im Lastgurte* findet man — weil $\Delta s_t = \alpha t s + S_t k$ — aus der Arbeitsgleichung

$$1 \cdot \delta_{mt} = \sum \bar{S} \cdot \Delta s_t = \sum \bar{S}(\alpha_t t s) + \sum \bar{S} S_t k,$$

worin der letzte Summand den Einfluß der Bogenkraft H_t darstellt. S_t bezeichnet also eine durch H_t verursachte Stabkraft. Graphisch findet man δ_{mt} aus einer lotrechten Biegelinie. Deshalb kann man (nach **19**, b) auch anschreiben

$$\delta_{mt} = \frac{a}{l}\sum_0^l w_t(l-x) - \sum_0^a w_t(a-x), \tag{190}$$

wenn (nach der Fig. 179) x der Abstand einer elastischen Kraft w_t und a der Abstand des Punktes m von der Stütze a ist, wobei die w_t aus den Δs_t zu berechnen sind.

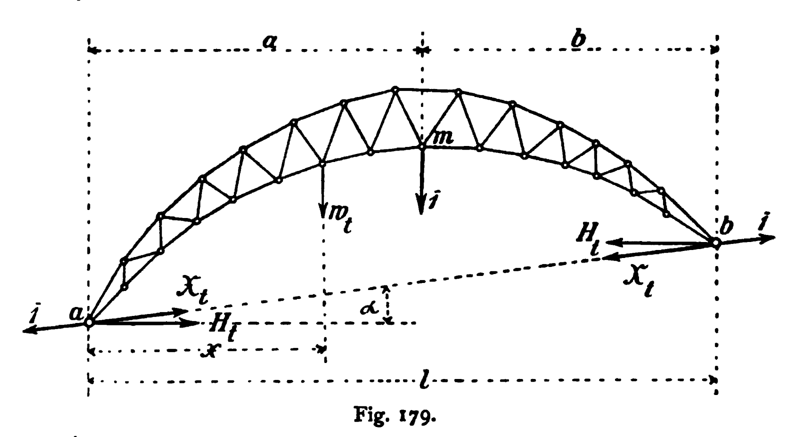


Fig. 179.

3. Aus

$$H_t = X_t \cos\alpha$$

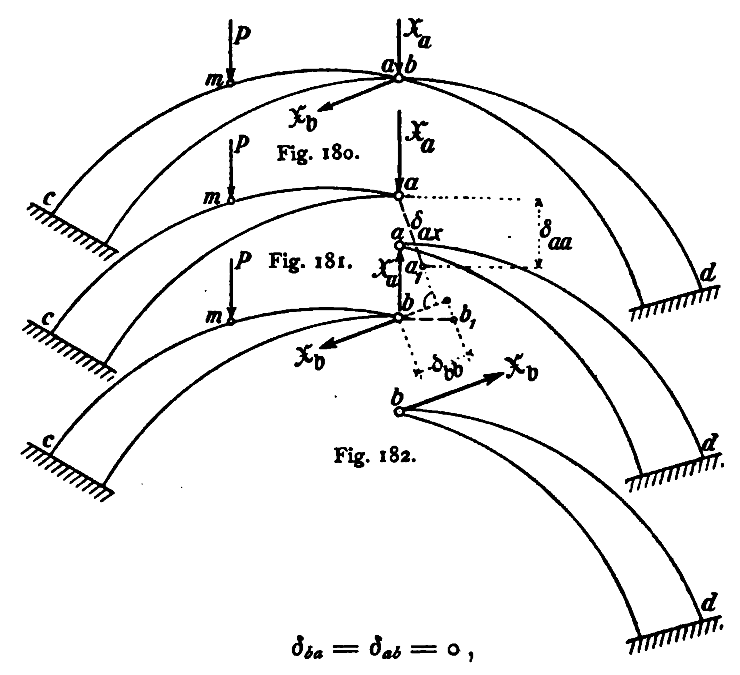
findet man schließlich *die gesuchte Bogenkraft.*

Aufgabe 46. *Für einen beiderseits eingespannten vollwandigen oder gegliederten Bogen mit einem Mittengelenk sind die überzähligen Größen zu bestimmen* (Fig. 180).

Das System ist zweifach statisch unbestimmt. Die Elastizitätsgleichungen für die überzähligen Größen X_a und X_b sind daher (nach Gl. 164) wie folgt anzuschreiben:

$$\delta_a = P\delta_{ma} - X_a\delta_{aa} - X_b\delta_{ba}$$
$$\delta_b = P\delta_{mb} - X_a\delta_{ab} - X_b\delta_{bb}.$$

Die Gleichungen lassen sich dadurch vereinfachen, daß man das zweistäbige Gelenk beseitigt und das so erhaltene Hauptsystem im Gelenkpunkte mit *beiden* überzähligen Größen belastet. Um dann den ursprünglichen Zusammenhang beider Bogenschenkel im Gelenke zu wahren, wird die für irgend eine Belastung des Hauptsystems erhaltene Verschiebung des Gelenkpunktes für beide Bogenschenkel *gleich groß anzusetzen* sein. Für ein derartiges Hauptsystem lassen sich die Richtungen von X_a und X_b so wählen, daß



$$\delta_{ba} = \delta_{ab} = 0 ,$$

wird, wodurch die allgemeinen Elastizitätsgleichungen übergehen in

$$\begin{aligned} \delta_a &= P\delta_{ma} - X_a\delta_{aa} \\ \delta_b &= P\delta_{mb} - X_b\delta_{bb} . \end{aligned} \qquad (191)$$

Bezeichnet man das Gelenk mit dem Doppelbuchstaben ab, so heißt es a *oder* b, je nachdem es für X_a oder X_b als Angriffspunkt dient.

Für den Zustand »$X_a = -1$« berechne oder zeichne man jetzt die Verschiebung δ_{ax} des Punktes a im Hauptsysteme (Fig. 181). Man möge dafür die Strecke $\delta_{ax} = \overline{aa_1}$ erhalten haben. Nimmt man darauf für den Belastungszustand »$X_b = -1$« die *Richtung von* X_b *senkrecht zur* $\overline{aa_1}$ *an* (Fig. 180), so ist anzuschreiben

$$\delta_{ba} = 0 , \qquad (192)$$

d. h. die Verschiebung des Punktes b in der Richtung von X_b, verursacht durch $X_a = -1$ ist gleich Null (Fig. 181). Denn diese Verschiebung ist gleich $\overline{aa_1}$ und sie steht senkrecht zur Richtung von X_b. Demnach ist ihre Projektion auf diese Richtung gleich Null.

Nach Maxwell folgt aus der Gl. (192) aber auch

$$\delta_{ab} = 0,$$

d. h. die Verschiebung des Punktes a in der Richtung von X_a, verursacht durch $X_b = -1$ (Fig. 182) ist gleich Null. Weiter folgt, daß die Richtung der Verschiebung $\overline{bb_1}$ senkrecht zur X_a stehen muß, denn nur in solchem Falle ist die Projektion von $\overline{bb_1}$ auf X_a gleich Null.

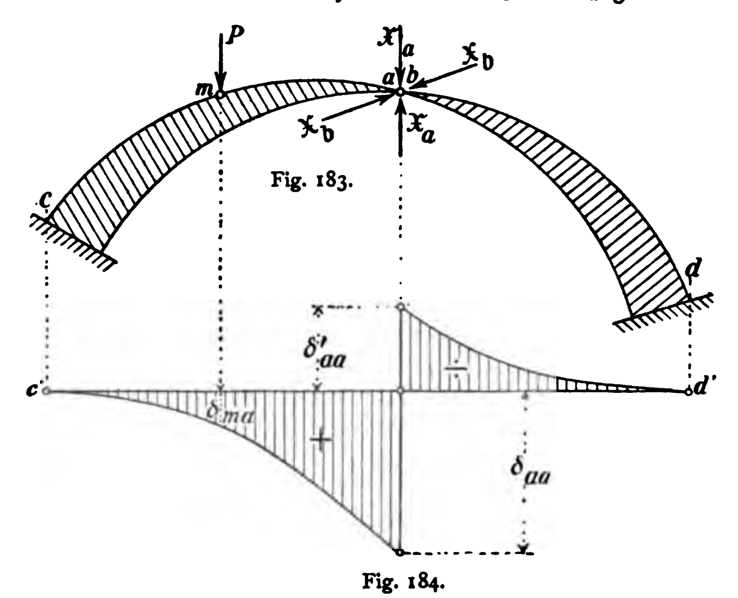


Fig. 183.

Fig. 184.

Die *Gesamtverschiebungen* δ_a und δ_b im Gelenke müssen gleich groß sein. Das gibt

$$P\delta_{ma} - X_a\delta_{aa} = P\delta_{mb} - X_b\delta_{bb}. \tag{193}$$

Um X_a und X_b zu berechnen, fehlt noch die Größe von

$$\delta_a = \delta_b.$$

Nach der ersten der Gl. (191) ist

$$\delta_a = P\delta_{ma} - X_a\delta_{aa},$$

worin δ_a die Verschiebung des Punktes a *im linken Bogenschenkel ac* bedeutet, verursacht durch die Belastung von P und X_a. Die überzählige Größe X_b hat keinen Einfluß auf die Größe von δ_a, wenn sie (wie angenommen) senkrecht zur Verschiebung δ_{ax} (Fig. 183) gerichtet ist.

Der Gelenkdruck X_a des linken Bogenschenkels wirkt auf den rechten Schenkel in gleicher Größe aber entgegengesetzter Richtung. Bezeichnet man nun die dadurch im Punkte a des rechten Schenkels herbeigeführte Verschiebung mit δ'_{aa}, so ist anzuschreiben

$$\delta_a = X_a \delta'_{aa}$$

und daraus folgt

$$X_a = \frac{P\delta_{ma}}{\delta_{aa} + \delta'_{aa}}. \tag{194}$$

Für praktische Fälle wählt man die Richtung von X_a zweckmäßig lotrecht. Dann erhält man, wie in der Fig. 184 dargestellt ist, δ_{ma}, δ_{aa} und δ'_{aa} aus *zwei Biegelinien*, von denen jede nur für *einen* Bogenschenkel und für »$X_a = -1$« gezeichnet ist.

X_b ist gegeben, sobald die Größen δ_{mb} und δ_{bb} in ähnlicher Weise, wie für X_a, bestimmt worden sind. Die betreffenden für $X = -1$ gezeichneten Biegelinien sind bekanntlich zugleich Einflußlinien der X. Wie bei *vollwandigen Bogenträgern* die Biegelinien mit Hilfe der elastischen Kräfte dargestellt werden, wird unter § 8 (im Anschluß an **9**, b) dargelegt.

Aufgabe 47. *Die überzähligen Größen eines beiderseits eingespannten Bogenträgers* (Fig. 185) *sind darzustellen*[1].

Das System ist dreifach statisch unbestimmt. Das Hauptsystem soll (wie unter a, 1 angegeben) derart gestaltet werden, daß in den drei Elastizitätsgleichungen alle δ mit aus verschiedenen Buchstaben gebildetem Doppelzeiger verschwinden (Gl. 181). Zu dem Zwecke wird *eine* Einspannung beseitigt und das Hauptsystem des an einem Ende eingespannten Bogens in geeigneter Weise mit den überzähligen Größen X_a, X_b, X_c belastet. X_a sei ein Moment, das in beliebiger Weise am linken freien Kämpfer angreift (Fig. 186). X_b und X_c seien zwei in einem Doppelpunkte bc angreifende Einzelkräfte.

Wählt man jetzt den Punkt bc in der Trägerebene derart, daß er *als Pol* der durch »$X_a = -1$« verursachten Verdrehung

$$\delta_{aa} = \overline{a_1 - a'_1} = \overline{a_2 - a'_2}$$

der Geraden $a_1 - a_2$ erscheint, so ist anzuschreiben

$$\delta_{ba} = 0,$$
$$\delta_{ca} = 0,$$

[1] Vgl. MÜLLER-*Breslau*, Die graph. Statik der Baukonstr. Band II. 3. Aufl. S. 312.

und daraus folgt nach MAXWELL

$$\delta_{ab} = 0\,,$$
$$\delta_{ac} = 0\,,$$

d. h. *die Verschiebung des Punktes b oder c verursacht durch die Momenteinheit der Geraden* a_1—a_2 *ist gleich Null.*

Eine solche Lage des Punktes bc findet man mit Hilfe von Biegelinien oder eines Verschiebungsplanes, aus welchem die Richtungen der

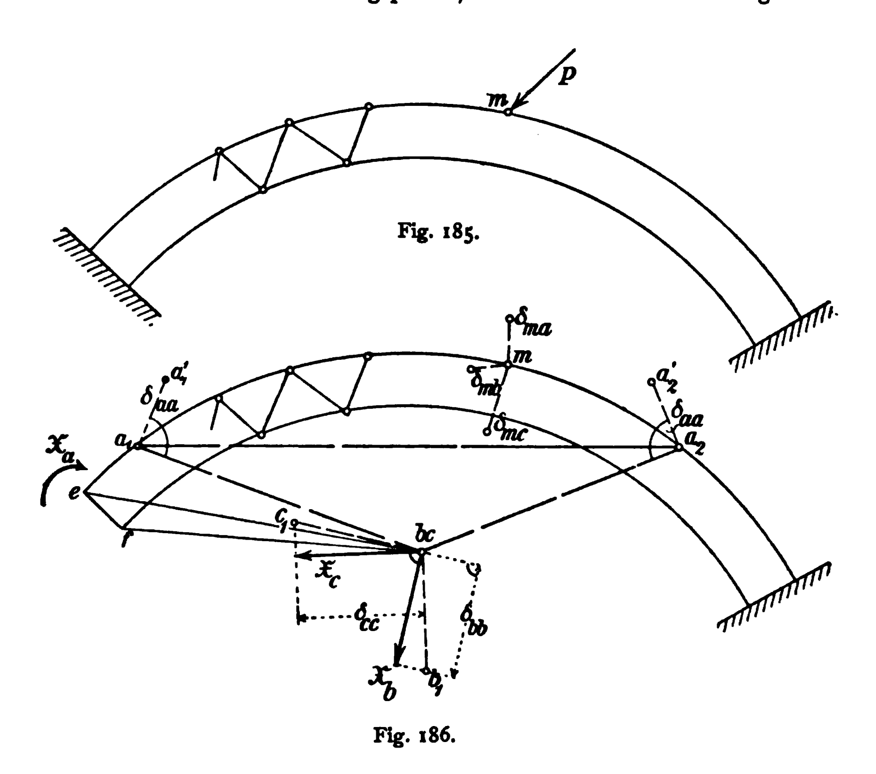


Fig. 185.

Fig. 186.

Verschiebungen a_1—a_1' und a_2—a_2' entnommen werden können. Denn durch die augenblickliche Bewegungsrichtung von zwei ihrer Punkte a_1 und a_2 ist der Pol der Bewegung der Bogenscheibe gegeben: die in a_1 und a_2 zu den betreffenden Richtungen von a_1—a_1' und a_2—a_2' errichteten beiden Senkrechten treffen sich im gesuchten Pole bc. Wählt man diesen, wie geschehen, als Angriffspunkt von X_b und X_c, so folgt (Aufgabe 46)

$$\delta_{cb} = \delta_{bc} = 0\,,$$

vorausgesetzt, daß die Richtung von X_c *senkrecht* zur Verschiebung δ_{cb} steht; d. h.

die Verschiebung des Punktes c, in der Richtung von X_c, verursacht durch »$X_b = -1$« ist gleich Null.

Somit lauten die Elastizitätsgleichungen zur Berechnung der überzähligen Größen für unwandelbare Kämpferfugen:

$$\begin{aligned} \delta_a &= P\delta_{ma} - X_a\delta_{aa} = 0\,, \\ \delta_b &= P\delta_{mb} - X_b\delta_{bb} = 0\,, \\ \delta_c &= P\delta_{mc} - X_c\delta_{cc} = 0\,. \end{aligned} \tag{195}$$

Darin sind δ_{aa}, δ_{bb} und δ_{cc} zu bestimmen. δ_{ma}, δ_{mb}, δ_{mc} können für lotrechte Einzellasten P und für beliebige Punkte m aus den zugehörigen drei Biegelinien oder Verschiebungsplänen entnommen werden.

Bei der Bestimmung von S_0, S_a, S_b, S_c und den dadurch verursachten Verschiebungen

$$\delta_{ma} = \sum S_0 S_a k\,; \qquad \delta_{aa} = \sum S_a^2 k\,,$$
$$\delta_{mb} = \sum S_0 S_b k\,; \qquad \delta_{bb} = \sum S_b^2 k\,, \text{ usw.}$$

kann man sich den Doppelpunkt bc (den Pol der Verdrehung der Geraden a_1—a_2) durch *zwei gerade starre Stäbe* be, bf oder ce, cf an die Bogenscheibe geschlossen denken (Fig. 186). Sobald die Stabkräfte dieser beiden *gedachten* Stäbe berechnet sind, ergeben sich auch die übrigen Stabkräfte der Bogenscheibe, sowie die zugehörigen Verschiebungen. Vgl. Aufgabe 61.

Aufgabe 48. *Für den in der* Fig. 187 *dargestellten, durch einen Balken versteiften schlaffen Bogen ist die Einflußlinie einer Balkenstrebe zu zeichnen.*

Hier ist zuerst die Frage zu entscheiden, welchen Stab man am besten als *überzählig* wählt. Weil das System zur mittlern lotrechten Achse symmetrisch liegt, so gibt es eigentlich nur zwei Möglichkeiten: Entweder beseitigt man den, dem Knoten g gegenüberliegenden Obergurtstab des Balkens, oder den Stab c—c des Bogens. Im ersten Falle würde man als Hauptsystem einen *Mittengelenkbalken* erhalten, der statisch nach II. **29** zu behandeln wäre. Bequemer erscheint es aber, die *Bogenkraft H* des Stabes c—c als überzählige Größe zu wählen, weil dann für »$H = 0$«, alle Bogenstäbe (einschließlich der Ständer) *spannungslos* werden. Sonach wird für diesen Belastungszustand das Hauptsystem ein einfacher Balkenträger, dessen Stabkräfte und Formänderungen bequem zu bestimmen sind.

Wählt man also die Bogenkraft H als überzählige Größe, so erhält man für eine Strebenkraft D des unbestimmten Systemes die Gleichung

$$D = D_0 - HD_k$$

oder

$$D = D_k\left(\frac{D_0}{D_k} - H\right),$$

wenn D_0 und D_k diejenigen Spannkräfte bedeuten, die infolge der Ursachen »$H = 0$« und »$H = -1$« entstehen.

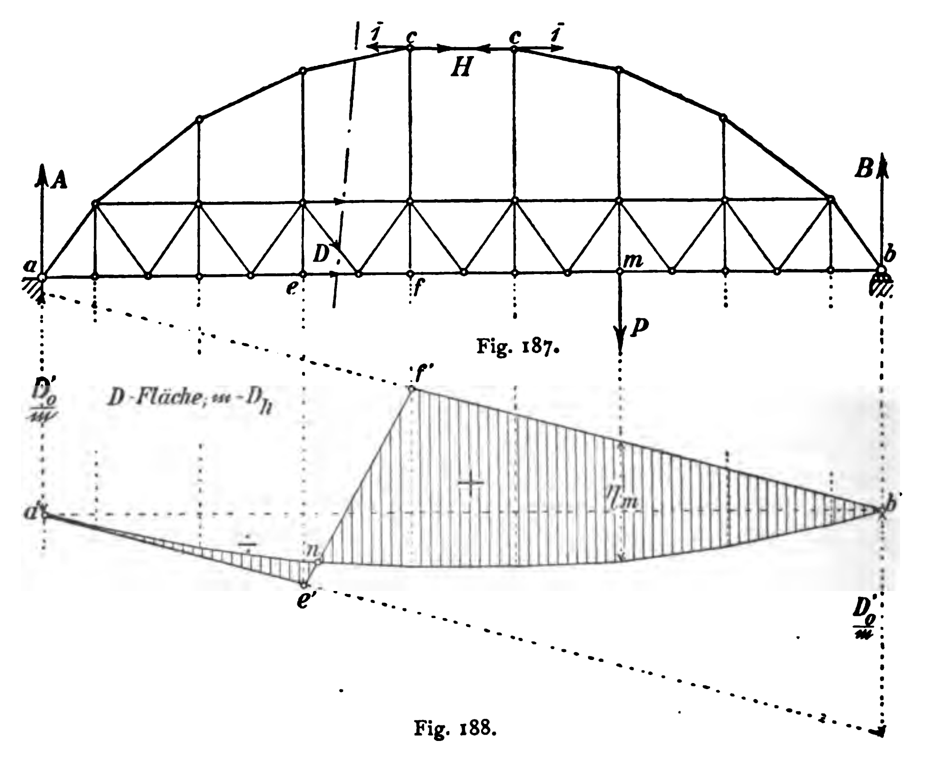


Fig. 187.

Fig. 188.

Wählt man D_k als Multiplikator $\mathfrak{m}$, so gibt das

$$D = \mathfrak{m}\left(\frac{D_0}{\mathfrak{m}} - H\right). \tag{196}$$

Die Einflußlinie für H findet man aus

$$H = \frac{\bar{1} \cdot \delta_{mc}}{\delta_{cc} + k_c}; \tag{197}$$

δ_{mc} und δ_{cc} sind darin die von »$H = -1$« im beliebigen Angriffspunkte m der wandernden Einzellast und im Punktepaare c—c verur-

sachten Verschiebungen. δ_{mc} erhält man aus einer Biegelinie, die zugleich die Einflußlinie der Senkung des Knotens m vorstellt. δ_{cc} ist (nach MOHR) durch die Arbeitsgleichung

$$\overline{1} \cdot \delta_{cc} = \sum S_c^2 k$$

gegeben. Wählt man

$$\delta_{cc} + k_c$$

als *Einheit* der Bogenkraftfläche oder als *Polweite* des Kraftecks der elastischen Kräfte w, so ist (für irgend eine Lage der Einzellast P)

$$H = \overline{1} \cdot \delta_{mc}. \qquad (198)$$

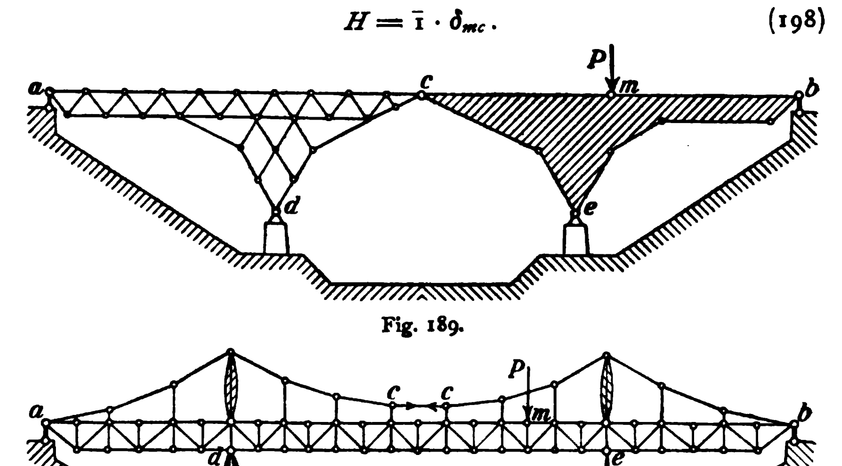


Fig. 189.

Fig. 190.

Die *Biegelinie* ist einfach darzustellen, indem man zuerst die Stabkräfte der Bogenstäbe für »$H = -1$« berechnet und sodann diejenigen dieser Stabkräfte, welche in den Obergurtknoten des Balkens angreifen, dort als *äußere* Kräfte wirken läßt. Somit erhält man alle Δs der Balkenstäbe und daraus die elastischen Kräfte w. Weiteres nach § 4.

Die so erhaltene Einflußfläche von H ist mit der Einflußfläche von D_0 des einfachen Balkens zu vereinigen. Das gibt die Einflußfläche von D, wie sie in Fig. 188 dargestellt ist.

Aufgabe 49. *Für die beiden in den* Fig. 189 *und* 190 *dargestellten zusammengesetzten Fachwerke* (*Auslegebogenträger und versteifter Auslegeträger*) *soll das Hauptsystem gebildet werden.*

1. Der *Auslegebogenträger* besteht aus zwei Tragscheiben. Zu seiner starren Verbindung mit der Erde werden demnach

$$(3 - 1)\, 3 = 6 \text{ Stäbe}$$

nötig. Vorhanden sind 6 Stützenstäbe und ein zweistäbiges Gelenk c. Die Unbestimmtheit ist also zweifach. Weil der Träger zur lotrechten Mittelachse durch c symmetrisch angeordnet ist, so wird man zweckmäßig auch die überzähligen Stäbe symmetrisch liegend wählen. Man kann z. B. zwei solcher *Untergurt*stäbe in den beiden Endöffnungen beseitigen. Dann erhält man ein Hauptsystem mit 4 Tragscheiben, das mit

$$(5 - 1)\,3 = 12 \text{ Stäben}$$

an die Erde geschlossen ist. Denn es sind vorhanden

5 Gelenke	mit 10	Stäben
2 Pendelstützen	- 2	-
	zusammen 12	Stäbe.

Ein solches Hauptsystem wäre statisch nach II. **32** zu behandeln. Zweckmäßiger erscheint es aber, die Stützenstäbe bei a und b der Endöffnungen zu beseitigen und dort die lotrechten überzähligen Größen X_a, X_b anzubringen. Man erhält dann für $P = 1$ die Elastizitätsgleichungen

$$\delta_{ma} - X_a\,\delta_{aa} - X_b\,\delta_{ba} = 0\,,$$
$$\delta_{mb} - X_a\,\delta_{ba} - X_b\,\delta_{bb} = 0\,,$$

worin aber, der vorausgesetzten Symmetrie wegen,

$$\delta_{aa} = \delta_{bb}$$

ist. Außerdem erscheinen die Einflußlinien für δ_{ma} und δ_{mb} als *Spiegelbilder*.

2. *Der durch eine Kette versteifte Auslegeträger* (Fig. 190) besitzt 3 Tragscheiben. Zu seiner starren Verbindung mit der Erde benötigt er also (nach I. **31**)

$$(4 - 1)\,3 + 2f$$

Stäbe, wenn f die Zahl der *freien* Knoten bedeutet. Das gibt

$$9 + 2 \cdot 10 = 29 \text{ Stäbe.}$$

Vorhanden sind aber

Stützenstäbe	5
Scheibengelenke $2 \times 2 =$	4
Kettenstäbe	13
Hängestäbe	10
zusammen	32 Stäbe.

Das gibt eine *dreifache* Unbestimmtheit.

Man wird (um ein symmetrisches Hauptsystem zu erhalten) am besten tun, je einen Stützenstab bei a und b und im Kettengurt den mittleren

wagerechten Stab cc zu beseitigen. An Stelle der beseitigten Stäbe treten die lotrechten überzähligen Größen X_a, X_b und die wagerechte Kettenbogenkraft H. Dann *verschwinden* für »$H = 0$« *die Spannungen aller* Kettenstäbe und Hängestangen. Das zu diesem Belastungszustande gehörige Hauptsystem kann also ähnlich wie dasjenige des Mittengelenkbalkens der Fig. 187 berechnet werden.

In die Elastizitätsgleichungen sind dann folgende Bedingungen, die aus der vorausgesetzten Symmetrie folgen, aufzunehmen

$$\delta_{aa} = \delta_{bb}$$

und

$$\delta_{ac} = \delta_{bc}$$

oder

$$\delta_{ca} = \delta_{cb} .$$

Außerdem erscheinen die Einflußflächen für δ_{ma} und δ_{mb} als Spiegelbilder.

c. Biegelinie eines statisch unbestimmten Trägers. Nach **16** c, 3 erfährt das durch die Kräfte P belastete unbestimmte System die gleichen Formänderungen, wie das durch die Kräfte P und X belastete Hauptsystem. Es ist aber *unmöglich, dabei die Formänderungen durch einen Verschiebungsplan graphisch genau darzustellen.* Ein solcher Plan könnte nur *zufällig* einmal diejenigen Verschiebungen, mit deren Hilfe die überzähligen Größen berechnet wurden, richtig wiedergeben. Denn die kleinen Ungenauigkeiten, die darin bestehen, daß jeder Punkt des ersten Planes im Schnittpunkte zweier *Senkrechten* liegt, obwohl diese streng genommen zwei *Kreisbogen* sein müßten, verhinderte seine Brauchbarkeit in statisch unbestimmten Fällen. Oder man müßte jede Verschiebung des ersten Planes *genau berechnen* und dann erst auftragen.

Biegelinien besitzen den beregten Nachteil nicht. Sie sind in jedem Falle völlig zuverlässig, wie das bereits unter **16**, a hervorgehoben worden ist.

Aufgabe 50. *Es ist die Biegelinie des in der* Fig. 191 *dargestellten zweiteiligen Strebenfachwerks zu zeichnen und zwar für die Lage einer lotrechten Einzellast »Eins« im Untergurtknoten* 6.

1. Der Träger ist statisch bestimmt gestützt und *innen* einfach unbestimmt. Durch Beseitigen des Endständers bei a und Anbringen der überzähligen Größe X als Lasteinheit des Punktepaares a (**31**, a, 2) erhält man das Hauptsystem. X berechnet sich aus

$$X = \frac{\sum S_0 S_a k}{\sum S_a^2 k + k_a},$$

worin

$$k_a = \frac{s_a}{EF_a}$$

das Dehnungsvermögen des Endständers darstellt.

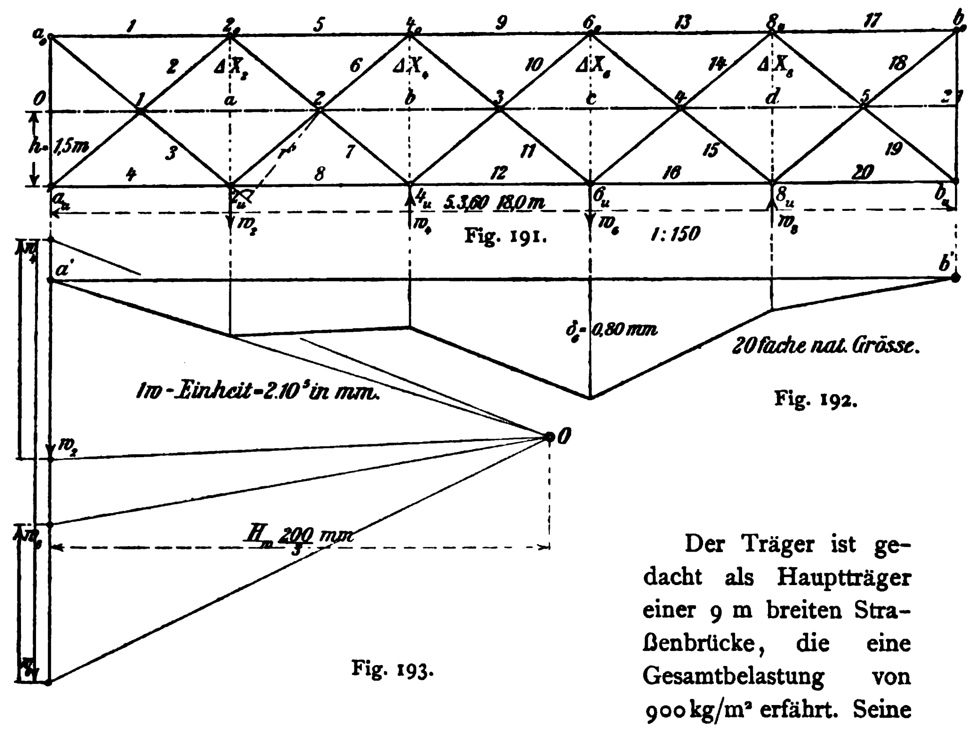


Fig. 191.

Fig. 192.

Fig. 193.

Der Träger ist gedacht als Hauptträger einer 9 m breiten Straßenbrücke, die eine Gesamtbelastung von 900 kg/m² erfährt. Seine Querschnitte werden als gegeben angenommen. Die durch die Last »Eins« im Untergurtknoten 6 verursachten Stablängenänderungen $\varDelta s$ *des unbestimmten Systemes* berechnen sich aus

$$\varDelta s = \frac{Ss}{EF},$$

worin

$$S = S_0 - XS_a$$

einzusetzen ist. Die danach ermittelten $\varDelta s$ sind in der Tabelle 23 zusammengestellt.

Tabelle 23. Unterlagen zur Berechnung der Stablängenänderungen.

	Stabbezeichnung	Stablänge s m	Querschnitt F cm²	Dehnungsvermögen $k=\frac{100s}{EF}$	Stabkräfte »$X=0$« S_0 t	Stabkräfte »$X=-1$« S_a t	Stabkraft S t	Stablängenänderungen Δs mm	Stabnummer
Obergurt	a_o—2_o	3,6	20	$0,9\cdot10^{-5}$	0,000	—1,200	—0,4758	—0,04309	1
	2_o—4_o	3,6	30	$0,6\cdot10^{-5}$	—0,960	+1,200	—0,4810	—0,02882	5
	4_o—6_o	3,6	30	$0,6\cdot10^{-5}$	—0,960	—1,200	—1,4388	—0,08633	9
	6_o—8_o	3,6	30	$0,6\cdot10^{-5}$	—1,920	+1,200	—1,4412	—0,08647	13
	8_o—b_o	3,6	20	$0,9\cdot10^{-5}$	+0,480	—1,200	+0,0012	+0,000108	17
Untergurt	a_u—2_u	3,6	20	$0,9\cdot10^{-5}$	+0,480	—1,200	+0,0012	+0,000108	4
	2_u—4_u	3,6	35	$0,514\cdot10^{-5}$	+0,480	+1,200	+0,9588	+0,04931	8
	4_u—6_u	3,6	35	$0,514\cdot10^{-5}$	+1,440	—1,200	+0,9612	+0,04943	12
	6_u—8_u	3,6	35	$0,514\cdot10^{-5}$	+0,240	+1,200	+0,7188	+0,03697	16
	8_u—b_u	3,6	20	$0,9\cdot10^{-5}$	+1,200	—1,200	+0,7212	+0,06481	20
Wand	a_u—a_o	3,0	30	$0,5\cdot10^{-5}$	0,000	—1,000	—0,3990	—0,01995	0
	a_u—1	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	—0,625	+1,562	—0,0017	—0,0001	2
	1—2_o	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	—0,625	+1,562	—0,0017	—0,0001	
	a_o—1	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	0,000	+1,562	+0,6233	+0,0365	3
	1—2_u	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	0,000	+1,562	+0,6233	+0,0365	
	2_u—2	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	0,000	—1,562	—0,6233	—0,0365	6
	2—4_o	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	0,000	—1,562	—0,6233	—0,0365	
	2_o—2	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	+0,625	—1,562	+0,0017	+0,0001	7
	2—4_u	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	+0,625	—1,562	+0,0017	+0,0001	
	4_u—3	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	—0,625	+1,562	—0,0017	—0,0001	10
	3—6_o	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	—0,625	+1,562	—0,0017	—0,0001	
	4_o—3	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	0,000	+1,562	+0,6233	+0,0365	11
	3—6_u	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	0,000	+1,562	+0,6233	+0,0365	
	6_u—4	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	+1,562	—1,562	+0,9387	+0,05498	14
	4—8_o	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	+1,562	—1,562	+0,9387	+0,05498	
	6_o—4	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	+0,625	—1,562	+0,0017	+0,0001	15
	4—8_u	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	+0,625	—1,562	+0,0017	+0,0001	
	8_u—5	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	—0,625	+1,562	—0,0017	—0,0001	18
	5—b_o	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	—0,625	+1,562	—0,0017	—0,0001	
	8_o—5	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	—1,562	+1,562	—0,9387	—0,05498	19
	5—b_u	2,343	20	$0,586\cdot10^{-5}$	—1.562	+1,562	—0,9387	—0,05498	
	b_u—b_o	3,0	30	$0,5\cdot10^{-5}$	+0,400	—1,000	+0,00099	+0,00005	21

Bemerkungen:

1) Das *Dehnungsmaß* ist mit $2\cdot10^6$ atm angerechnet worden.

2) Δs ist aus $S\cdot k\cdot10000$ in mm ausgerechnet.

Die S_0 und S_a wurden aus Kraftplänen entnommen und durch Rechnungen nachgeprüft. Danach ergab sich

$$X = \frac{\sum S_0 S_a k}{\sum S_a^2 k + k_a} = -0{,}39901 \text{ t.}$$

2. Um die *Darstellung der Biegelinie* des gegebenen *zweiteiligen* unbestimmten Wandsystemes möglichst zu vereinfachen, ist dieses auf ein hinsichtlich der zu erwartenden Formänderungen *gleichwertiges* System zurückgeführt worden. Das geschah in folgender Weise: Es wurden zuerst die von der im Knoten 6_u angreifenden Last »Eins« verursachten Änderungen der Längen a, b, c, d zwischen den Wandknoten (1 und 2; 2 und 3; 3 und 4; 4 und 5) berechnet und dann wurde die Biegelinie für *das einfache Fachwerk* a_u—1—2—3—4—5—b_u gezeichnet, wie das Fig. 192 zeigt. Dabei konnten die elastischen Kräfte w in bekannter Weise aus den bereits gefundenen Stablängenänderungen Δs und den erwähnten Längenänderungen (Δa, Δb, Δc, Δd) ermittelt werden.

Um die Längenänderungen Δa bis Δd zu finden, sind vorher erst die zwischen den betreffenden Knoten des Obergurts und Untergurts entstehenden Längenänderungen berechnet worden. Werden diese mit der betreffenden Knotennummer bezeichnet, so erhält man

$$\begin{aligned} \bar{1} \cdot \Delta x_2 &= \sum_0^4 \bar{S} \cdot \Delta s \\ \Delta x_2 + \bar{1} \cdot \Delta x_4 &= \sum_5^8 \bar{S} \cdot \Delta s \\ \Delta x_4 + \bar{1} \cdot \Delta x_6 &= \sum_9^{12} \bar{S} \cdot \Delta s \qquad (199) \\ \Delta x_6 + \bar{1} \cdot \Delta x_8 &= \sum_{13}^{16} \bar{S} \cdot \Delta s \\ \Delta x_8 &= \sum_{17}^{21} \bar{S} \cdot \Delta s . \end{aligned}$$

In diesen Arbeitsgleichungen bedeutet

$\bar{S}$: die von einer in den Punktepaaren 2, 4, 6, 8 lotrecht wirkend *gedachten* Lasteinheit verursachten betreffenden Stabkräfte,

Δs: die wirklichen Stablängenänderungen des unbestimmten Systems, die für die betreffenden Stäbe 1 bis 21 (Fig. 191) in der Tabelle 23 schon verzeichnet stehen.

Wenn man für die *gedachte* Lasteinheit die $\overline{S}$ berechnet, so erhält man die in der Tabelle 24 verzeichneten Werte. Dabei finden, wie leicht zu sehen, folgende Beziehungen statt:

$$\begin{aligned}\overline{S}_0 &= -1{,}0\ \mathrm{t} = \overline{S}_{21}\\ \overline{S}_2 &= -1{,}2\ \mathrm{t} = \overline{S}_5 = \overline{S}_9 = \overline{S}_{13} = \overline{S}_{17}\\ \overline{S}_3 &= -1{,}562\ \mathrm{t} = \overline{S}_6 = \overline{S}_{10} = \overline{S}_{14} = \overline{S}_{18}\\ \overline{S}_4 &= -1{,}2\ \mathrm{t} = \overline{S}_8 = \overline{S}_{12} = \overline{S}_{16} = \overline{S}_{20}\,.\end{aligned} \qquad (200)$$

Alle $\overline{S}$ können danach aus einem einzigen Kräfteplan entnommen werden, der für eine Lasteinheit des Punktepaares $2_u—2_o$ zu zeichnen ist. Die zur Berechnung der Δx nötigen Zahlen sind in der folgenden Tabelle 24 nochmals zusammengestellt. Behufs *Nachprüfung* ist darin der Werth Δx_8 ***zweimal*** berechnet.

Tabelle 24. Unterlagen zur Berechnung der Werte Δx.

Stab-nummer	Stabkraft $\overline{S}$	Wirkliche Stablängenänderung Δs	$\overline{S}\cdot\Delta s$	Längenänderungen Δx
0	— 1,0	— 0,01995	+ 0,01995	
1	— 1,2	— 0,0431	+ 0,05172	
2	+ 1,562	— 2 · 0,0001	— 0,00031	$\Delta x_2 = +0{,}18526$
3	+ 1,562	+ 2 · 0,0365	+ 0,11403	
4	— 1,2	+ 0,00011	— 0,00031	
5	— 1,2	— 0,0288	+ 0,03456	
6	+ 1,562	— 2 · 0,0365	— 0,11403	$\Delta x_2 + \Delta x_4 = -0{,}13832$
7	+ 1,562	+ 2 · 0,0001	+ 0,00031	$\Delta x_4 = -0{,}32358$
8	— 1,2	+ 0,0490	— 0,05916	
9	— 1,2	— 0,0863	+ 0,10356	
10	+ 1,562	— 2 · 0,0001	— 0,00031	$\Delta x_4 + \Delta x_6 = +0{,}15800$
11	+ 1,562	+ 2 · 0,0365	+ 0,11403	$\Delta x_6 = +0{,}48158$
12	— 1,2	+ 0,0494	— 0,05928	
13	— 1,2	— 0,0865	+ 0,10380	
14	+ 1,562	+ 2 · 0,0550	+ 0,17182	$\Delta x_6 + \Delta x_8 = +0{,}23153$
15	+ 1,562	+ 2 · 0,0001	+ 0,00031	$\Delta x_8 = +0{,}25005$
16	—1,2	+ 0,0370	— 0,04440	
17	— 1,2	+ 0,00011	— 0,00013	
18	+ 1,562	— 2 · 0,0001	— 0,00031	Zur *Nachprüfung*
19	+ 1,562	— 2 · 0,0550	— 0,17182	$\Delta x_8 = +0{,}25007$
20	— 1,2	+ 0,0648	— 0,07770	
21	— 1,0	+ 0,00005	— 0,00005	



Fig. 194.

Roth: *Statisch unbestimmt*
Schwarz: „ „ *bestimmt.*

Fig. 195.

Aus den Δx berechnen sich Δa bis Δd wie folgt: In der Fig. 196 ist ein von je zwei Wandknoten und zwei Gurtknoten gebildetes symmetrisches Gelenkviereck dargestellt. Bezeichnet $2h$ seine Höhe, a

seine Breite, so setzt sich die Längenänderung Δa aus zwei Teilen zusammen, von denen der eine von dem betreffenden Δx_2 herrührt, und der andere von den bereits berechneten Stablängenänderungen Δs_2, Δs_3, Δs_6 und Δs_7 (Tabelle 23, Spalte 7, 8) verursacht wird. Das gibt für die Fig. 196

$$\Delta a = \sum_2^7 \bar{D} \cdot \Delta s - \left(\frac{2h}{a}\right) \Delta x_2, \quad (201)$$

wenn $\bar{D}$ eine von einer *gedachten* Lasteinheit des Punktepaares 1—2 verursachte Stabkraft des Gelenkvierecks vorstellt. Das Summenzeichen erstreckt sich über die vier Stäbe 2, 3, 6, 7.

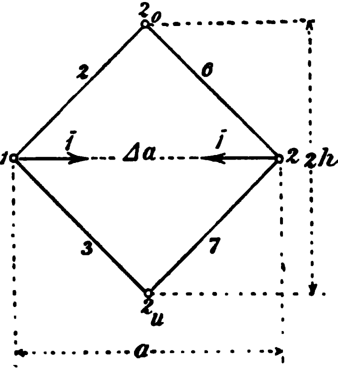


Fig. 196.

Ebenso erhält man

$$\begin{aligned} \Delta b &= \sum_6^{11} \bar{D} \cdot \Delta s - \left(\frac{2h}{b}\right) \Delta x_4, \\ \Delta c &= \sum_{10}^{15} \bar{D} \cdot \Delta s - \left(\frac{2h}{c}\right) \Delta x_6, \\ \Delta d &= \sum_{14}^{19} \bar{D} \cdot \Delta s - \left(\frac{2h}{d}\right) \Delta x_8. \end{aligned} \quad (202)$$

Darin ist für den vorliegenden Träger

$$a = b = c = d = 3{,}6 \text{ m}$$

und für jede gedachte Stabkraft des Gelenkvierecks erhält man

$$\bar{D} = \frac{1 \cdot 2{,}343}{3{,}6} = 0{,}6508,$$

$$\frac{h}{3{,}6} = 0{,}8333.$$

$\bar{D}$ kann also vor das Summenzeichen gesetzt werden. Aus der Tabelle 24 kann man dann noch entnehmen

$$\sum_2^7 \Delta s = \sum_6^{11} \Delta s = \sum_{14}^{19} \Delta s = 0$$

und

$$\sum_{10}^{15} \Delta s = +0{,}09148.$$

Das gibt schließlich

$$\Delta a = -0{,}8333 \cdot \Delta x_2 = -0{,}1545 \text{ mm},$$
$$\Delta b = +0{,}8333 \cdot \Delta x_4 = +0{,}2697 \text{ mm},$$
$$\Delta c = +0{,}09148 - 0{,}8333 \cdot \Delta x_6 = -0{,}3418 \text{ mm},$$
$$\Delta d = +0{,}8333 \cdot \Delta x_8 = +0{,}2084 \text{ mm}.$$

3. Mit Hilfe der Werte Δa bis Δd ist es möglich, jetzt die Biegelinie zu zeichnen. Es sind dazu die elastischen Kräfte w_2 bis w_8 zu berechnen. Das geschieht nach der bekannten Grundgleichung

$$w = \frac{\Delta s}{r},$$

wobei für die Δs der vier Obergurtstäbe des gleichwertigen einfachen Trägers obige Werte Δa bis Δd zu nehmen sind. An Stelle von r tritt für die Gurtstäbe die Trägerhöhe h und für die Wandstäbe ist (nach Gl. 88) überall

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{1}{r_1} \mp \frac{1}{r_2}.$$

Daraus folgt im vorliegenden Falle

$$r_1 = r_2 = r'$$

und

$$r' = \frac{3{,}6 \cdot 1{,}5 \cdot 1000}{2{,}343} = 2304{,}8 \text{ mm}.$$

Danach sind die w-Kräfte in der Tabelle 25 zusammengestellt.

4. *Die Maßstäbe* der Darstellung in den Fig. 191—193 waren folgende:

Trägerbild in 1 : 150; 1 *w-Krafteinheit* $= 2 \cdot 10^5$ in mm,
Polweite $H_w = \frac{200}{3}$ mm; *Senkungen der Biegelinie* 20 mal nat. Größe.

Aus der Biegefläche abgemessen fand sich

$$\delta_{6u} = \frac{16}{20} = 0{,}80 \text{ mm}.$$

5. Die *Nachprüfung* der größten Senkung mit Hilfe der Arbeitsgleichung

$$\delta_{6u} = \sum \bar{S} \Delta s$$

ergab

$$\delta_{6u} = 0{,}802 \text{ mm}.$$

Tabelle 25. Zur Berechnung der elastischen Kräfte w.

	Stabbezeichnung	Stablängenänderung Δs mm	Hebelarme Gurte h	Hebelarme Wand r'	Verteilung der w-Kräfte auf die Lastgurtknoten 2_u	4_u	6_u	8_u
Untergurt	$a_u—2_u$	+0,000108	1500	—	$\frac{\Delta s}{2h}$	—	—	—
	$2_u—4_u$	+0,04931	1500	—	$\frac{\Delta s}{2h}$	$\frac{\Delta s}{2h}$	—	—
	$4_u—6_u$	+0,049436	1500	—	—	$\frac{\Delta s}{2h}$	$\frac{\Delta s}{2h}$	—
	$6_u—8_u$	+0,03697	1500	—	—	—	$\frac{\Delta s}{2h}$	$\frac{\Delta s}{2h}$
	$8_u—b_u$	+0,06481	1500	—	—	—	—	$\frac{\Delta s}{2h}$
Obergurt	1—2	—0,1545	1500	—	$\frac{\Delta s}{h}$	—	—	—
	2—3	+0,2697	1500	—	—	$\frac{\Delta s}{h}$	—	—
	3—4	—0,3418	1500	—	—	—	$\frac{\Delta s}{h}$	—
	4—5	+0,2084	1500	—	—	—	—	$\frac{\Delta s}{h}$
Wand	$a_u—1$	—0,0001	—	2304,8	$\frac{\Delta s}{r'}$	—	—	—
	$1—2_u$	+0,03650	—	2304,8	$\frac{\Delta s}{r'}$	—	—	—
	$2_u—2$	—0,03650	—	2304,8	$\frac{\Delta s}{r'}$	$\frac{\Delta s}{r'}$	—	—
	$2—4_u$	+0,0001	—	2304,8	$\frac{\Delta s}{r'}$	$\frac{\Delta s}{r'}$	—	—
	$4_u—3$	—0,0001	—	2304,8	—	$\frac{\Delta s}{r'}$	$\frac{\Delta s}{r'}$	—
	$3—6_u$	+0,03650	—	2304,8	—	$\frac{\Delta s}{r'}$	$\frac{\Delta s}{r'}$	—
	$6_u—4$	+0,05494	—	2304,8	—	—	$\frac{\Delta s}{r'}$	$\frac{\Delta s}{r'}$
	$4—8_u$	+0,0001	—	2304,8	—	—	$\frac{\Delta s}{r'}$	$\frac{\Delta s}{r'}$
	$8_u—5$	—0,0001	—	2304,8	—	—	—	$\frac{\Delta s}{r'}$
	$5—b_u$	—0,05498	—	2304,8	—	—	—	$\frac{\Delta s}{r'}$
				Summe	$w_2 = +0{,}0001194$	$w_4 = -0{,}0001469$	$w_6 = +0{,}0003360$	$w_8 = -0{,}0001049$

6. In den Fig. 194—195 ist die im vorigen berechnete Biegefläche mit derjenigen eines gleich weit gestützten *statisch bestimmten zweiteiligen* einfachen Parallelträgers verglichen. Man sieht daraus, wie die schwarz gezeichnete Biegelinie des einfachen Trägers für die vorausgesetzte Belastung des Knotens 6 ungleichmäßiger und ungünstiger ausfällt als die rote Linie. Das verursachen die von der Formänderung der Wändstäbe herrührenden *negativen* elastischen Kräfte. Um diese zu vermindern, empfiehlt sich das Einlegen eines durchgehenden sog. *Mittelgurtes* oder von einzelnen Stäben zwischen den Wandknoten 1 bis 5. Allerdings führt ein solches Hilfsmittel mehrfache Unbestimmtheit herbei[1].

§ 7. Bogenträger mit zwei Kämpfergelenken.

Die überzähligen Größen sind für gegliederte und vollwandige Bogenträger gleich, wenn bei ersteren (unter sonst gleichen Umständen) *innere* Bestimmtheit vorhanden ist, was wir voraussetzen. Unterschiede in der Berechnung ergeben sich allein aus der verschiedenen Art der Darstellung der *Biegelinien*. Deshalb werden im folgenden gegliederte und vollwandige Bogenträger gemeinsam behandelt.

37. Darstellung der Bogenkraftfläche für Fachwerk.

a. Die Kämpferlinienkraft als überzählige Größe.

Jede Kämpferkraft (K_a und K_b) zerlegt sich in eine Balkenstützenkraft (A, B) und in die Kämpferlinienkraft H'. Die Bogenkraft H ist für jede Lage der wandernden Einzellast aus

$$H = H' \cos \alpha$$

bestimmt, wenn Kämpferlinie und Wagerechte den Winkel α einschließen (Fig. 197).

---

[1] Man vgl. hierzu: MEHRTENS, Statisch bestimmte mehrteilige Wandgliederung der Gitterträger. Zeitschr. f. Arch.- u. Ingenieurwesen. Wochenausgabe 1898, S. 329, wo ich zum ersten Male nachgewiesen habe, daß derartige Gliederungen auch statisch bestimmt angeordnet werden können. Ferner: MÜLLER-*Breslau*, Graph. Statik, I. Band, 3. Aufl., S. 533 und MEHRTENS, Entgegnungen in Deutsche Bauz. 1901, Nr. 80 u. 90; 1902, Nr. 12. Endlich die *Angriffe des Herrn* MÜLLER-*B.*, Graph. Statik, II. Band, 3. Aufl., S. 469—473, gegen mich, wobei jener von Trägern MEHRTENSscher Bauart spricht, obwohl ich solche Träger *den Fachgenossen niemals empfohlen* habe und deshalb gegen ihre Verbindung mit meinem Namen Verwahrung einlege.

Dresden, im September 1905. Der Verfasser.

Wird das Kämpfergelenk a beseitigt und an seine Stelle eine bewegliche Stütze gesetzt gedacht, die eine Verschiebung in der Richtung der Kämpferlinie $\overline{ab}$ gestattet, so ist die Gesamtverschiebung δ_a des Hauptsystems mit

$$\delta_a = P\delta_{am} - H'\delta_{aa}$$

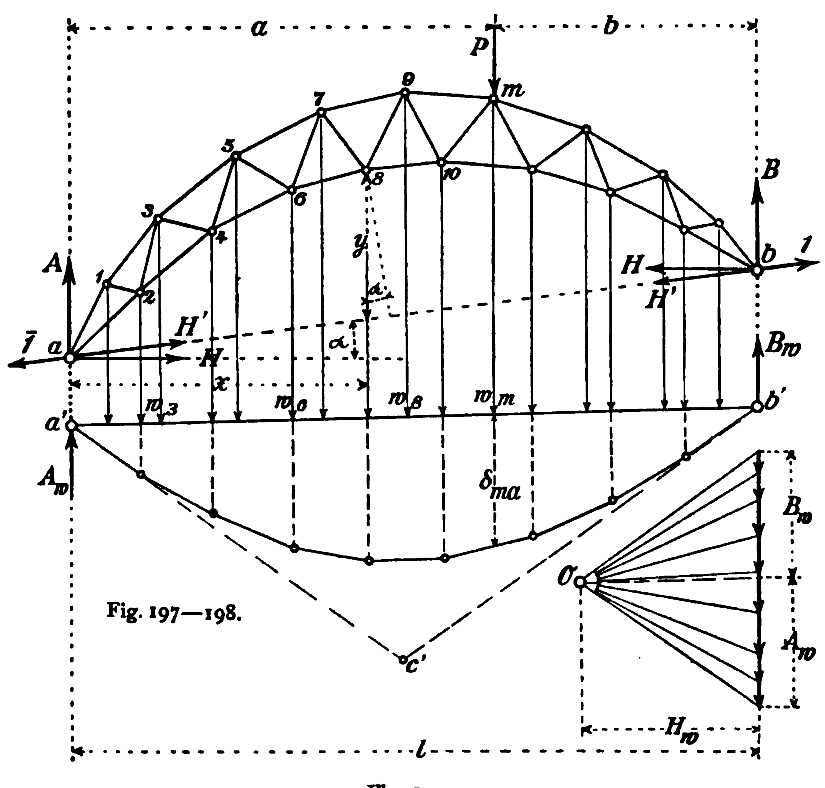


Fig. 199.

anzuschreiben. Die δ der beiden Summanden dieses Ausdruckes bezeichnen bekanntlich die nacheinander von den Belastungszuständen »$H' = 0$« und »$H' = -1$« verursachten Teilverschiebungen des Stützpunktes a. Bei starr vorausgesetzten Kämpfern ist $\delta_a = 0$. Daraus folgt für $P = 1$

$$H' = \frac{1 \cdot \delta_{ma}}{\delta_{aa}} = \frac{\sum S_0 S_a k}{\sum S_a^2 k}, \tag{203}$$

wenn (nach Maxwell) $\delta_{am} = \delta_{ma}$ eingesetzt wird.

2. Zähler und Nenner der Gl. (203) können *graphisch* aus Biegelinien entnommen werden. Der Nenner folgt aus einer Biegelinie, deren elastische Kräfte w parallel der Kämpferlinie wirken, so daß (nach **19**, b)

$$\delta_{aa} = \sum w \cdot (y \cos \alpha) \tag{204}$$

angeschrieben werden kann. y ist dabei die lotrecht bis zur Kämpferlinie gemessene Ordinate irgend eines Bogenknotens. Der Zähler folgt aus der Einflußlinie der Verschiebung $\delta_{ma} = \delta_{am}$, also aus einer lotrechten Biegelinie, deren elastische Kräfte w gleich denen der Gl. (204) sind.

Rechnerisch bestimmt sich δ_{ma}, d. i. die zum Lastpunkte m gehörige Ordinate der (mit der Polweite H_w = »Eins« gezeichneten) Einflußfläche (nach **19**, b) mit

$$\delta_{ma} = A_w \cdot a - \sum_0^a w(a - x)$$

oder

$$\delta_{ma} = \frac{a}{l} \sum_0^l w(l - x) - \sum_0^a w(a - x).$$

Aus Gl. (203) folgt dann für die Bogenkraft

$$H = \left(\frac{\cos \alpha}{\delta_{aa}}\right) \delta_{ma} = \frac{\cos \alpha}{\sum S_a^2 k} \sum S_0 S_a k$$

oder

$$H = \frac{\delta_{ma}}{\sum w y}, \tag{205}$$

in Worten: *Die Bogenkraftfläche stellt eine Momentenfläche dar, gezeichnet mit Hilfe eines Kraftecks der elastischen Kräfte w, dessen Polweite gleich $\sum wy$ zu machen ist* (Fig. 198—199).

b. Berechnung der elastischen Kräfte w.

1. Die Bezeichnungen δ_{ma} und δ_{aa} besagen, daß die *Ursache* der zugehörigen Verschiebungen eine Krafteinheit »— 1« im Stützpunkte a vorstellt. Deren Moment $\overline{M}$ in Bezug auf irgend einen Bogenknoten ist mit

$$\overline{M} = + 1 \cdot y \cos \alpha$$

anzuschreiben. Das gibt (nach **15**) für eine w-Kraft (die für jeden Wandstab in zwei Teilkräfte zerlegt wird) den Wert

$$w = \frac{\Delta s}{r} = \frac{\overline{M} k}{r^2} = \frac{y \cdot k \cdot \cos \alpha}{r^2}.$$

Für die Darstellung der *Bogenkraft H* hebt sich im Zähler und Nenner der Gl. (205) das $\cos\alpha$. Deshalb darf hierbei jede elastische Kraft aus

$$w = \frac{y k}{r^2} \tag{206}$$

berechnet werden.

Das *Dehnungsvermögen*

$$k = \frac{s}{EF}$$

kann bei der Berechnung der Bogenkraft erstmalig angenähert eingesetzt werden. Dabei empfiehlt es sich, einen *gedachten* mittleren, unveränderlichen Querschnitt F_0 einzuführen und die Werte w im Nenner und Zähler der Gl. (206) mit EF_0 zu multiplizieren. Man erhält dann eine elastische Kraft mit

$$w = \frac{y s}{r^2}\left(\frac{F_0}{F}\right) \tag{207}$$

und hat es jetzt in der Hand, das Verhältnis $F_0 : F$, je nach der Lage des vorliegenden Rechnungsfalles, für Gurte und Wandglieder entsprechend festzusetzen und abzustufen. Für erstmalige Rechnungen genau genug setzt man das Verhältnis für die Gurte durchschnittlich etwa gleich »Eins« und für die Wand etwa gleich 2, 3, 4 oder dgl. Man darf dann also allgemein mit

$$w = (\beta)\frac{y s}{r^2} \tag{208}$$

rechnen. Dabei stellt β die »*Querschnitteinflußzahl*« dar.

2. Die w-Kraft eines Wandstabes wird in die gleichwertigen Teilkräfte

$$w_1 = \frac{\Delta s}{r_1} \quad \text{und} \quad w_2 = \frac{\Delta s}{r_2}$$

zerlegt. Daraus folgt

$$w_1 = \pm \frac{y s}{r r_1}\left(\frac{F_0}{F}\right),$$

$$w_2 = \mp \frac{y s}{r r_2}\left(\frac{F_0}{F}\right),$$

worin r_1, r_2 die bekannten Lote im Schnittfelde sind (**15**, b u. c) und r den Hebelarm in Bezug auf den dem betreffenden Stabe zugeordneten Momentenpunkt bezeichnet. Bei spitzen und ungünstig liegenden Schnitten der Gurtstäbe des Feldes empfiehlt es sich, die Werte von r auszurechnen. Dabei kann auch die Gl. (88)

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{1}{r_1} \mp \frac{1}{r_2}$$

benutzt werden[1].

[1] Vgl. die Berichtigungen zum III. Bande, wonach die Vorzeichen der Gl. (88) abzuändern sind.

c. Einfluß der Temperatur.

1. Irgend eine Stablängenänderung infolge von Temperatureinflüssen sei Δs_t. Dann berechnet sich die Verschiebung δ_{at} in der Kämpferrichtung (wie bekannt) mit

$$\bar{1} \cdot \delta_{at} = \sum S_a \Delta s_t = \sum S_a (\alpha_t t s)$$

und die aus der Temperatur erwachsende Kämpferlinienkraft (bei unverrückbaren Stützpunkten) mit

$$H_t' = \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}} = \frac{\sum S_a (\alpha_t t s)}{\sum S_a^2 k} . \tag{209}$$

Wenn die Verschiebung δ_{at} aus einer Biegelinie gewonnen wird, deren elastische Kräfte w_t parallel zur Kämpferlinie ab wirken, erhält man (nach **19**, b)

$$\delta_{at} = \sum w_t \cdot (y \cdot \cos\alpha) .$$

Aus einer ähnlichen Biegelinie gewonnen, erhält man nach Gl. (204)

$$\delta_{aa} = \sum w (y \cdot \cos\alpha) .$$

Daraus folgt die Bogenkraft H_t

$$H_t = H_t' \cos\alpha = \frac{\cos\alpha \sum w_t \cdot y}{\sum w \cdot y} . \tag{210}$$

In diesem Ausdrucke sind die elastischen Kräfte, wie bekannt, aus

$$w_t = \frac{\Delta s_t}{r}$$

und

$$w = \frac{\Delta s}{r}$$

zu berechnen, wobei die Unveränderlichen, wie durchweg gleiche Stablängen, durch die Division von Zähler und Nenner der Gl. (210) fortfallen. Auch ist wohl zu beachten, daß man hier die für Wandstäbe berechneten w_t nicht mehr (nach MOHR) zu zerlegen braucht, sondern unmittelbar in den zugeordneten Momentenpunkten angreifen lassen kann. Sonst kann man auch die für einen *Stabzug* (**18**, a) abgeleitete Gl. (92) oder die Gl. (104—105) unter **19**, a zur Berechnung der w_t brauchen. *Will man H_t unmittelbar aus der erwähnten Temperaturbiegelinie gewinnen, so hat man die Polweite*

$$H_{wt} = \sum w y$$

zu machen (Fig. 200—201).

Znr Berechnung von H_t mit Hilfe eines Kraftplanes für »$H' = -1$« in a benutzt man die Gl. (209) in der Gestalt

$$H_t = \frac{\cos\alpha \sum S_a(\alpha_t t s)}{\sum S_a^2 k} \quad . \quad . \tag{211}$$

Ist t, die Temperaturänderung in Celsiusgraden über die sog. mittlere Luftwärme (**33**) für alle Stäbe gleich groß, so bleibt das ursprüngliche Trägerbild dem Formänderungsbilde ähnlich. Deshalb ist in solchem

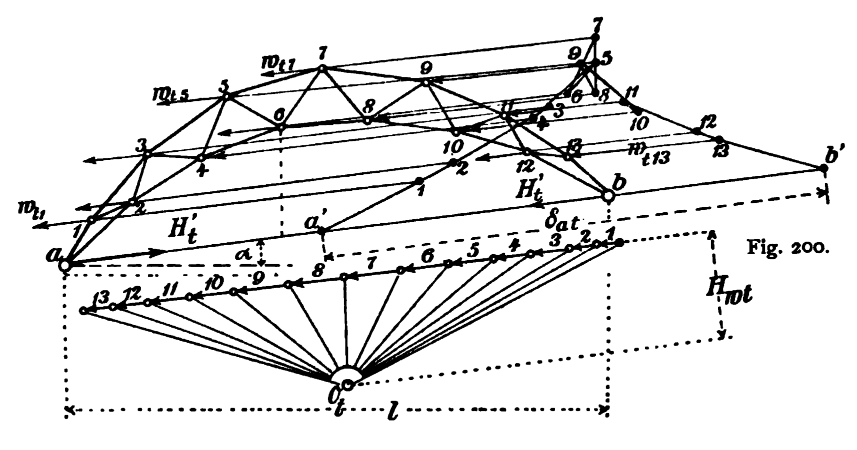


Fig. 200.

Fig. 201.

Falle die Verschiebung des Stützpunktes a gleich der Längenänderung der Kämpferlinie zu setzen. Das gibt, wenn l die wagerecht gemessene Stützweite des Bogens bezeichnet nach der Gl. (209)

$$H_t' = \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}} = \frac{\alpha_t t l}{\cos\alpha \sum S_a^2 k}$$

oder

$$H_t = \frac{\alpha t l}{\sum S_a^2 k} \ . \tag{212}$$

Will man auch hierbei die Verschiebung δ_{aa} mit Hilfe der w-Kräfte aus einer Biegelinie gewinnen, so hat man, bei einer Polweite $H_w = 1$, die w aus der Gl. (206), also aus

$$w = \frac{yk}{r^2}$$

zu berechnen. Wählt man aber dabei, um für jeden Stab das *Dehnungsvermögen* zu erhalten, einen mittlern Querschnitt F_0, so hat man Nenner und Zähler des Ausdruckes für H_t mit EF_0 zu multiplizieren, woraus

$$H_t = \frac{\alpha_t t l \cdot EF_0}{\sum w (y \cos \alpha)} \tag{213}$$

folgt. Dabei ist jedes w aus der Gl. (207) mit

$$w = \frac{ys}{r^2}\left(\frac{F_0}{F}\right)$$

zu berechnen. Vgl. das Zahlenbeispiel unter **40**, b.

Die aus H_t zu berechnenden *Temperaturstabkräfte* S_t *erhöhen* die Grenzwerte $+S_v$ und $-S_v$, die von der Vollbelastung durch Eigengewicht und Verkehr erzeugt werden, so daß für die Querschnittsberechnung die Werte

$$\pm \max S = \pm (S_v + S_t)$$

maßgebend sein müssen.

d. Zusatz für den Bogen mit Zugband. Wenn zwischen den Kämpferpunkten a und b ein Stab eingezogen und eine der beiden Stützen, z. B. b, in eine bewegliche umgewandelt wird, so entsteht der sog. »*Bogen mit Zugband*«. In einem solchen Bogen überträgt sich die Bogenkraft als *innere* Kraft auf das Zugband, sie wird also *aufgehoben*, so daß als äußere Kräfte nur die Balkenstützenkräfte A und B auftreten. Die Konstruktion ist deshalb (nach II. **1**, a) ein Balkenträger. Dessen Berechnung erfolgt aber, als Bogenträger, indem man das Zugband beseitigt und dafür seine inneren Kräfte H' als äußere Kräfte in a und b angreifen läßt. Man erhält dann für H' die Gleichung

$$H' = \frac{1 \cdot \delta_{mb}}{\delta_{bb} + k_z},$$

wenn k_z das Dehnungsvermögen des Zugbandes vom Querschnitte F_z angibt. Im übrigen erfolgt die Berechnung ganz so, wie beim Träger mit zwei Kämpfergelenken.

Obwohl

$$k_z = \frac{l}{\cos \alpha \cdot EF_z}$$

immer nur eine sehr kleine Größe ist, so darf sie doch nicht vernachlässigt werden, weil auch δ_{mb} und δ_{bb} sehr klein sind und somit das Fehlen von k_z im Nenner ein sehr ungenaues H' ergeben könnte. Schreibt man nach Gl. (203)

$$H' = \frac{\sum S_0 S_b k}{\sum S_b^2 k},$$

so ist im Summenzeichen des Nenners, für den Zustand »$X_b = -1$«, der Wert $1 \cdot k_x$ mit aufzunehmen (**31**, b und die Gl. 163).

Vgl. hierzu die Aufgabe 28 (S. 77).

38. Die Einflußflächen der Stabkräfte.

a. Darstellung mit Hilfe der Gleichung für das Bogenmoment.

1. Die Gleichung lautet für einen beliebigen Momentenpunkt m (nach II. **36**, a) allgemein

$$M_m = M_{am} - H'y \cos\alpha$$

oder

$$M_m = M_{am} - Hy. \tag{214}$$

Dividiert man durch den, dem betrachteten Stabe zugeordneten Hebelarm r_m, so erhält man

$$\frac{M_m}{r_m} = \frac{M_{am}}{r_m} - H\left(\frac{y_m}{r_m}\right)$$

oder, was dasselbe ist,

$$S_m = S_0 - H S_h. \tag{215}$$

Darin ist für eine beliebige Lage der wandernden Einzellast

S_0 die Stabkraft für »$H = 0$«.
S_h - - - »$H = 1$«.

Die Gl. (215) formen wir in bekannter Weise um (II. **36**, a), durch Einführen des Multiplikators $\mathfrak{m}$. Das gibt

$$S_m = S_h\left(\frac{S_0}{S_h} - H\right),$$

$$S_m = \mathfrak{m}\left(\frac{S_0}{\mathfrak{m}} - H\right), \tag{216}$$

worin

$$\mathfrak{m} = \frac{1 \cdot y_m}{r_m} \tag{217}$$

unmittelbar berechnet, oder aus einem Kräfteplane für »$H = 1$« gewonnen werden kann.

Bei der Darstellung der Einflußflächen mit Hilfe der Gl. (216) unterscheidet man zweckmäßig, *ob der Momentenpunkt innerhalb oder außerhalb der Stützen liegt* (II. **18**). Außerdem ist zu beachten, ob die Bogenkraft die betrachtete Stabkraft *negativ oder positiv beeinflußt*, oder was dasselbe ist, ob der Multiplikator negativ oder positiv ausfällt.

2. *Momentenpunkt innerhalb.* In diesem Falle zeigt (nach II. **18**, a) jede Einflußfläche für S_0, d. h. für den Belastungszustand »$H = 0$«, *einerlei Vorzeichen*, entweder positiv oder negativ. Wir beschränken uns auf die Darstellung der Einflußfläche einer Strebenkraft D. Das dabei zu beschreibende Verfahren gilt sinngemäß auch für Gurt- und Ständerstäbe.

Bei der Betrachtung des *linken* Trägerteiles (Fig. 202) mit der Balkenstützenkraft A, also bei *rechts*seitiger Lage von P, erfährt die

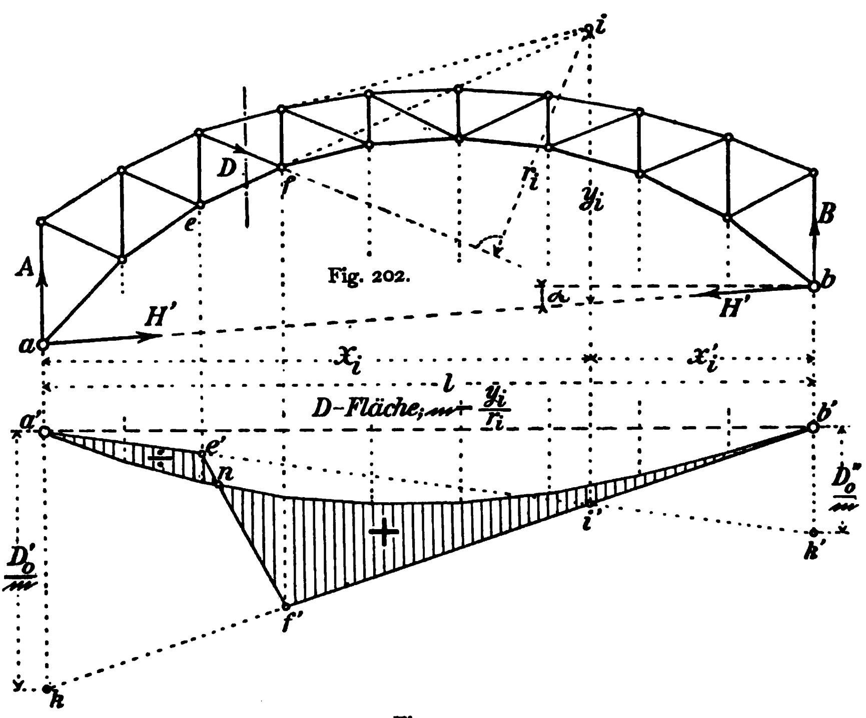


Fig. 203.

Strebe D einen Zug. Um die Differenz im Klammerwerte der Gl. (216) unmittelbar zu erhalten, tragen wir auf der Stützenlotrechten für a die Strecke

$$\overline{a'k} = \frac{D'_0}{\mathfrak{m}}$$

negativ (nach unten) auf (Fig. 203). D'_0 ist (nach II. **18**, a) aus einem Kräfteplane für »$A = 1$« gewonnen. Die Gerade $\overline{kb'}$ ist danach eine der beiden *Grenzlinien* der Einflußfläche von D_0 für den Belastungszustand »$H = 0$«.

Die zweite für »$B = 1$« geltende Grenzlinie muß die $k'b'$ auf der Momentenpunktlotrechten i schneiden. i' sei der Schnittpunkt. Dadurch wird auf der Stützenlotrechten b eine Strecke $\overline{b'k'}$ abgeschnitten, für welche bei der *Nachprüfung* sich

$$\overline{b'k'} = \frac{D''_o}{\mathfrak{m}}$$

ergeben muß, D''_o aus einem Kräfteplane für »$B = 1$« gewonnen.

Weil innerhalb des Feldes ef die Einflußlinie für D_o eine Gerade ist und der Untergurt als *Lastgurt* gelten soll, so ergibt sich jene als Linienzug $d'e'f'b'$. Zeichnet man jetzt noch — im entsprechenden Maßstabe — die *Bogenkraftfläche mn*, so erhält man ohne weiteres die Differenz des Klammerwertes der Gl. (216). Die schraffierte Fläche (Fig. 203) ist danach die Einflußfläche der Stabkraft D. Ihr Multiplikator ist

$$\mathfrak{m} = \frac{1 \cdot y_i}{r_i},$$

der entweder aus den Maßen der Fig. 202 zu berechnen, oder (wie bereits erwähnt) aus einem Kraftplane für »$H = 1$« zu entnehmen ist.

Das *Vorzeichen* der Einflußfläche bestimmt man am einfachsten aus dem Vorzeichen von D_o. *D_o ist überall positiv*, deshalb ist die Teilfläche mit der Ecke f' auch positiv.

3. *Momentenpunkt i außerhalb.* Eine Einflußfläche für D_o oder V_o besitzt hier (nach II. **18**, a) *eine Lastscheide im Felde.* Es möge die Einflußfläche für V (Fig. 204) gezeichnet werden. Lastgurt sei der Untergurt.

Die Darstellung folgt im wesentlichen der vorigen. Zu beachten ist nur, das hier für »$H' = 1$« die Stabkraft V_k *positiv* wird. V_o ist nur für rechtsseitige Belastung *positiv* (II. **17**, c), die Strecke

$$\overline{a'k} = \frac{V'_o}{\mathfrak{m}}$$

ist deshalb *nach oben* aufzutragen. Die Verlängerung der Grenzlinie $\overline{kb'}$ schneidet die Momentenpunktlotrechte in i'. Durch i' ist also eine Gerade $i'a'$ zu ziehen. Diese schneidet auf der b-Lotrechten eine Strecke

$$\overline{b'k'} = \frac{V''_o}{\mathfrak{m}}$$

ab. Die $\frac{V_o}{\mathfrak{m}}$-Linie ist damit im Linienzug $a'e'f'b'$ gegeben (Fig. 205). Trägt man schließlich die Bogenkraftfläche ein und bedenkt, daß V_o bei rechtsseitiger Belastung positiv war, so erhält man die schraffierte

Einflußfläche für V, deren positiver Teil rechts liegt. Die Lage des Nullpunktes n' ist in der Fig. 204 durch die *rot* gezeichneten Linien nachgeprüft worden. Das ist mit Hilfe der Kämpferdrucklinie (Richtungslinie) geschehen, wie das unter b. dieser Nummer beschrieben ist.

Wenn der Momentenpunkt i unbequem außerhalb des Brettes oder in unendlicher Ferne liegt, so wird es nötig, den Multiplikator zu berechnen oder graphisch darzustellen. Am einfachsten geschieht dies wohl mit Hilfe eines Kräfteplanes für »$H = 1$«, wobei nach Gl. (217) alle

$$\mathfrak{m} = S_k = \frac{1 \cdot y_i}{r_i}$$

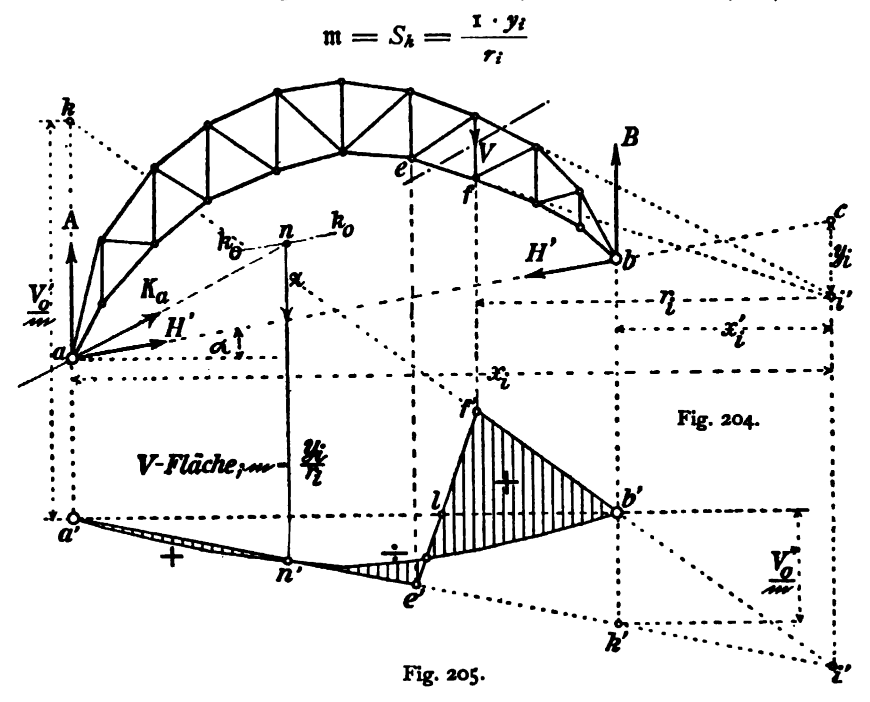


Fig. 205.

erhalten werden. Andere rein geometrische Darstellungen von $\mathfrak{m}$ leiden häufig an großer Ungenauigkeit, namentlich wenn die Richtungen von Obergurt und Untergurt des Schnittfeldes einen sehr kleinen Winkel miteinander bilden.

Für die Berechnung eines Hebelarms r_i kann die Gl. (88) unter **15**, c, in der Form

$$\frac{1}{r_i} = \pm \frac{1}{r_1} \mp \frac{1}{r_2}$$

gebraucht werden. Die Ordinaten y_i findet man wohl am einfachsten aus den *Gleichungen der beiden Gurtlinien*, durch deren Schnittpunkte die Momentenpunkt-Lotrechte verläuft.

b. Richtungslinie und Lastscheide.

1. *Unter einer Richtungslinie (Kämpferkraftlinie) versteht man den geometrischen Ort der Schnittpunkte zwischen der wandernden Einzellast und den unter ihrem Einflusse erzeugten Kämpferkräften.*

Wie beim Dreigelenkträger (II. **27**, a) benutzt man die Richtungslinie, um die Lastscheide der Einflußfläche einer Stabkraft S zu finden. Zu diesem Zwecke braucht man die Richtung einer Kämpferkraft nur

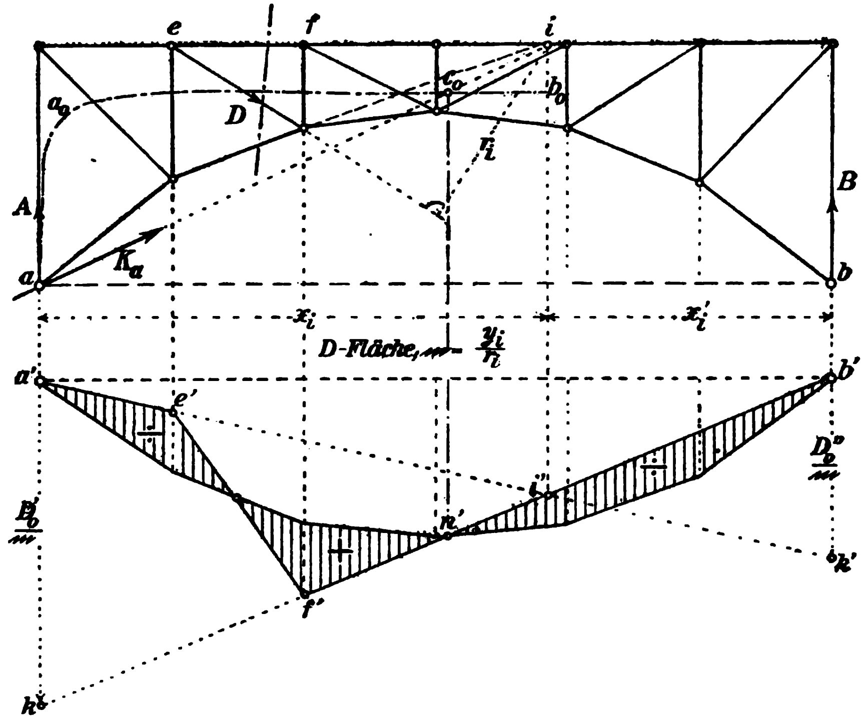


Fig. 206 und 207.

durch den zugeordneten Momentenpunkt einer Stabkraft zu führen und bis zum Schnittpunkte c_0 mit der Richtungslinie $a_0 b_0$ zu verlängern (Fig. 208). Durch c_0 verläuft dann die gesuchte Lastscheide. Somit hat man *einen* Punkt n' der Bogenkraftlinie gefunden (Fig. 206 und 207), der gleichzeitig ein Punkt der zugehörigen Einflußlinie für S_0 ist. Ist aber von dieser ein Punkt gegeben, so ist auch ihr ganzer Linienzug eindeutig bestimmt (II. **17—21**).

In den Fig. 206 und 207 wurde auf die beschriebene Weise die Einflußfläche der Strebenkraft D gezeichnet. Bei der Belastung *des rechten*

Trägerteiles entsteht eine Lastscheide in n'. Man erhält sie durch Aufsuchen des Schnittpunktes c_0 zwischen dem Strahle ai und der Richtungslinie $a_0 b_0$. n' liegt lotrecht unter c_0. Durch n' muß die für A gezeichnete Grenzlinie der D_0-Fläche verlaufen. Das gab die Linie $b'k$, den Schnittpunkt i' der i-Lotrechten und den Abschnitt

$$a'k = \frac{D'_0}{\mathfrak{m}}.$$

Wird schließlich die für den Einfluß von B geltende Grenzlinie $a'k'$ durch i' geführt, so ist die Darstellung der schraffierten Einflußfläche für D fertig.

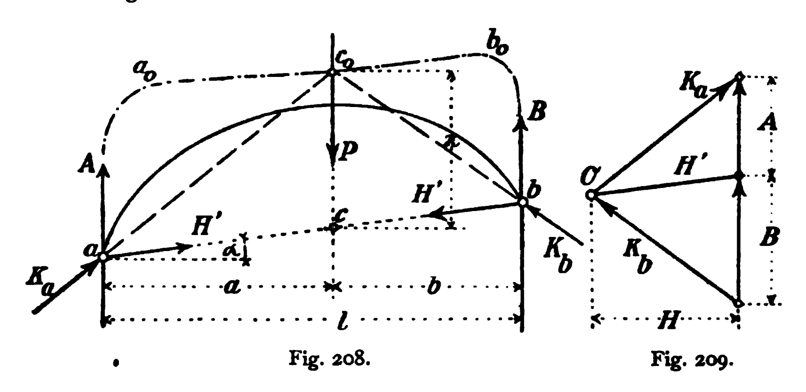


Fig. 208. Fig. 209.

2. *Die Gleichung der Richtungslinie* findet man wie folgt: Mit Bezug auf die Fig. 208 und 209 ist für eine Ordinate

$$z = \overline{c_0 c}$$

der Richtungtlinie $a_0 b_0$ anzuschreiben

$$\frac{z}{\frac{a}{\cos\alpha}} = \frac{A}{H'}$$

oder

$$z = \frac{Pab}{Hl}. \tag{218}$$

Für Auslegebogenträger ist die Ordinate z (nach den Fig. 210 und 211) aus

$$\frac{z}{-\frac{b}{\cos\alpha}} = \frac{B}{-H'}$$

mit

$$z = \frac{Pab}{Hl}$$

zu berechnen, wenn die Abstände der Einzellast P von den Stützen a und b wieder mit a und b bezeichnet werden.

3. Liegt der Momentenpunkt außerhalb von $\overline{ab}$, so kann im allgemeinen sowohl für den linken als auch für den rechten Trägerteil eine Lastscheide vorhanden sein, wobei zu beachten ist, daß die Richtungen von K_a und K_b hier auch *rückwärts* verlängert die Kämpferdrucklinien schneiden können. In den Fig. 204 und 205 ist für die Stabkraft V nur bei Belastung des *linken* Trägerteiles eine Lastscheide vorhanden, die (wie dort in roten Linien dargestellt ist) in bekannter Weise gefunden wurde. Außer den danach ermittelten Lastscheiden liegt eine solche immer noch innerhalb des betreffenden Schnittfeldes. Diese Lastscheide ist in bekannter Weise (nach II. **18**, c) durch aufsuchen des Punktes l (Fig. 205) aus der Einflußlinie für D_0 oder V_0 zu finden.

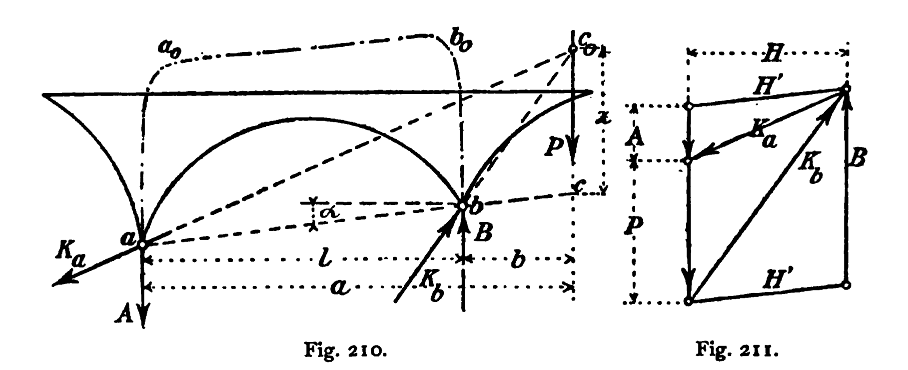


Fig. 210. Fig. 211.

4. Für den Fall, daß man *angenähert* die *Bogenkraftfläche als eine Parabel auffaßt*, *erhält man für die Richtungslinie eine Gerade*. Ist nämlich die Höhe der für $P = 1$ gezeichneten Bogenkraftparabel in in der Trägermitte gleich δ_{ca}, so lautet ihre Gleichung

$$H = \frac{4\,\delta_{ca}}{l^2}\,x(l-x)\,,$$

wenn die Abstände a und b mit x und $l-x$ vertauscht werden. Daraus folgt

$$z = \frac{1\cdot x(l-x)}{Hl} = \frac{1}{4}\,\frac{l}{\delta_{ca}}\,; \qquad (219)$$

z ist in diesem Falle also eine Unveränderliche. Wie man die Höhe δ_{ca} in der Mitte einer Bogenkraft-Parabelfläche berechnet, wird weiterhin (unter **39**, b) gezeigt.

39. Näherungsformeln für gegliederte Parabelbogen. Um *erstmalig* die Querschnitte in den Gurten und der Wand annähernd festzustellen und um dadurch die Unterlagen für genauere Berechnungen zu gewinnen, empfiehlt es sich, Gurtlinien und Achse der Bogenträger als *Parabeln* der Gleichung

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2} \tag{220}$$

aufzufassen, wenn f (nach den Fig. 212—216) den Bogenpfeil vorstellt. Die dabei gewonnenen Ergebnisse endgültig zu gebrauchen, scheint dem Verfasser nicht empfehlenswert. Nach erfolgter angenäherter Festlegung der Stabquerschnitte sollte man nicht unterlassen, die ganze Rechnung unter Anwendung von *Biegelinien* nachzuprüfen.

a. Der Sichelbogen[1].

1. Es werde vorausgesetzt:

1) die Knoten jedes Gurtes liegen in einer Parabel;
2) die Gurtstablängen sind nahezu gleich;
3) der Einfluß der Formänderung der Wandstäbe darf vernachlässigt werden;
4) es sei zulässig, die Feldweiten als unendlich schmal und dem entsprechend die elastischen Kräfte w über das Bogendifferential ds der Gurtlinien stetig verteilt anzunehmen.

Mit Bezug auf Fig. 212 sei

β_u: der Winkel, den eine Tangente im beliebigen Punkte o des Obergurtes und ebenso β_o der Winkel, den eine Tangente in u des Untergurtes mit der Wagerechten einschließt;

y_u, y_o, x: die Koordinaten der betreffenden, in einer Lotrechten liegenden Gurtschnitte u und o.

Bezeichnet dann $h = \overline{ou}$ die veränderliche Bogenhöhe, so gilt für irgend eine elastische Kraft (Fig. 213) die Gleichung

$$w = \frac{y_u}{h^2 \cos^2 \beta_o} + \frac{y_o}{h^2 \cos^2 \beta_u}. \tag{221}$$

Diese Gleichung ist für die Berechnung der *Bogenkraft H* unmittelbar zu gebrauchen, weil der vernachlässigte mittlere Festwert $s\frac{F_o}{F}$ im Zähler und Nenner der Bogenkraftgleichung der gleiche ist, somit also durch Division fortfällt. Bei Ermittelung von H_t bleibt er aber im *Zähler* stehen (vgl. unter **37**, c).

[1] Nach einer von MÜLLER-*Breslau* (Graph. Statik, II. 3. Aufl. S. 209) gegebenen Anregung selbständig bearbeitet.

Sind ferner f_u und f_o die Pfeilhöhen der Gurtparabeln und bedeutet h_c die Bogenhöhe in der Trägermitte, so gelten die Beziehungen

$$\frac{y_u}{h} = \frac{f_u}{h_c}; \quad \frac{y_o}{h} = \frac{f_o}{h_c};$$

$$y_u = \frac{4 f_u x (l - x)}{l^2}; \quad y_o = \frac{4 f_o x (l - x)}{l^2}.$$

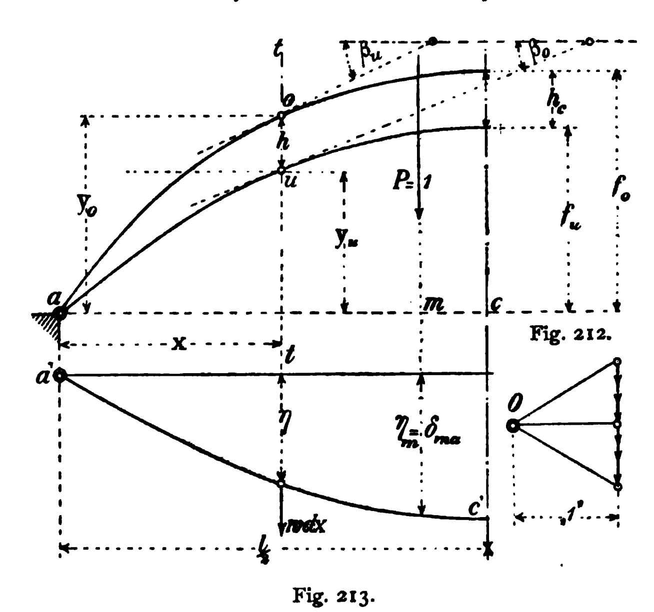


Fig. 212.

Fig. 213.

Setzt man allgemein

$$\frac{1}{\cos^2\beta} = 1 + \operatorname{tg}^2\beta = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

so läßt sich zunächst

$$w = \frac{f_u}{h \cdot h_c}\left[1 + \left(\frac{dy_o}{dx}\right)^2\right] + \frac{f_o}{h \cdot h_c}\left[1 + \left(\frac{dy_u}{dx}\right)^2\right] \tag{222}$$

anschreiben, woraus mit Hilfe der Parabelwerte von y_u und y_o (und der daraus zu entwickelnden zweiten Differentialquotienten) die Gleichung

$$w = \frac{f_u + f_o}{h_c^2}\left(\frac{l^2 + 16 f_u f_o}{4x(l - x)} - \frac{16 f_u f_o}{l^2}\right) \tag{223}$$

abzuleiten ist.

Mit Hilfe der nach Gl. (223) für *eine ausreichende Zahl von lotrechten Schnitten* berechneten w-Kräfte ist es möglich *die Bogenkraftfläche unmittelbar zu zeichnen.* Dabei ist dasselbe Verfahren anzuwenden,

wie es bei der Berechnung *vollwandiger* Bogenträger gebräuchlich und (unter **15—16**) ausführlich beschrieben worden ist. Damit sind dann Nenner und Zähler der Bogenkraftgleichung

$$H = \frac{1 \cdot \delta_{ma}}{\sum wy}$$

gegeben. In der angegebenen Quelle werden Nenner und Zähler der Gleichung rechnerisch bestimmt. Das gibt aber für den Zähler einen unbequemen analytischen Ausdruck, so daß Verfasser auf dessen Ableitung hier verzichtet. Solche verwickelte Ausdrücke sollten in einem Handbuche für »*Graphische* Statik der Baukonstruktionen« besser fehlen. Verfasser empfiehlt an deren Stelle die angedeutete graphische Behandlung.

2. Multipliziert man die Gl. (222) im ersten Gliede mit y_u, im zweiten mit y_o, so erhält man für den *Nennerwert*

$$\sum wy = \frac{f_u^2}{h_c^2}\int_0^l \left[1 + \left(\frac{dy_o}{dx}\right)^2\right] dx + \frac{f_o^2}{h_c^2}\int_0^l \left[1 + \left(\frac{dy_u}{dx}\right)^2\right] dx$$

und findet, nach erfolgter Integration

$$\sum wy = \frac{3\,l^2(f_u^2 + f_o^2) + 32 f_u^2 f_o^2}{3\,l h_c^2}. \tag{224}$$

Für eine unveränderliche Temperaturänderung t erhält man daraus (nach Gl. 213)

$$H_t = \frac{(\alpha_t t l)\,EF_0}{\sum wy},$$

worin das Verhältnis $\beta = \frac{F_0}{F}$ gleich »Eins« gesetzt ist und die Gurtstablängen s überall gleich groß angenommen worden sind. Das gibt

$$H_t = \frac{(\alpha_t t l^2 h_c^2)\,EF_0}{[3\,l^2(f_u^2 + f_o^2) + 32 f_u^2 f_o^2]}. \tag{225}$$

b. Parallelbogenträger.

1. Die bogenrecht (radial) gemessene Höhe des Trägers sei überall gleich h. Die Kämpfergelenke mögen zuerst in *der Mitte der Bogenhöhe* angenommen werden, unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen (und mit Bezug auf die Fig. 214 und 215) ist dann anzuschreiben

$$y_o = y + \frac{h}{2},$$

$$y_u = y - \frac{h}{2}.$$

Für eine elastische Kraft w erhält man danach (um H zu berechnen)

$$w = \left(y + \frac{h}{2}\right) + \left(y - \frac{h}{2}\right)$$

oder

$$w = 2y,$$

weil für $\frac{F_0}{F}$ gleich »Eins«, die Unveränderlichen E, h und s ausfallen.

Um den *Zähler* der Bogenkraftgleichung zu berechnen, erwäge man, daß die in irgend einem Punkte m' der (für »$H = -1$« gezeichneten)

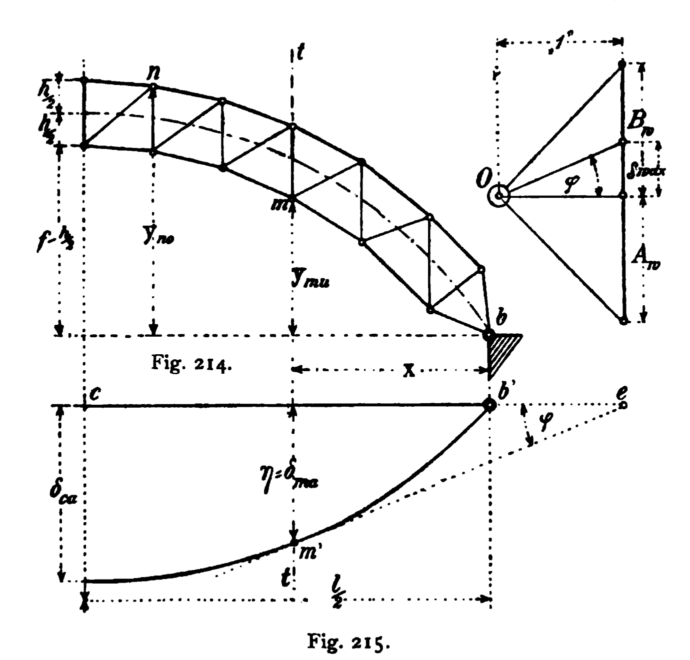


Fig. 215.

Biegelinie angelegte Berührungsgerade mit der X-Achse einen Winkel φ einschließt (Fig. 215), der (nach **18**, c) mit

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B_w - \int_0^x w\,dx}{\text{»Eins«}}$$

bestimmt ist. Das folgt unmittelbar aus dem Vergleich des mit der Polweite »Eins« angelegten Kraftecks der w und der damit gezeichneten Biegelinie $a'm'b'$. Es ist aber für diese

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d\delta_{ma}}{dx}.$$

Daraus

$$\frac{d\delta_{ma}}{dx} = B_w - \int_0^x w\,dx\,;$$

darin ist

$$B_w = \frac{1}{l}\int_0^l w(l-x)$$

und

$$w = 2y = \frac{8f}{l^2}\cdot x(l-x)\,.$$

Das gibt nach erfolgter Integration

$$\frac{d\delta_{ma}}{dx} = \frac{8f}{l^2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} + \frac{l^3}{12}\right).$$

Schließlich erhält man nach nochmaliger Integration

$$\int_0^x d\delta_{ma} = \delta_{ma} = \frac{2f}{3l^2}(x^4 - 2lx^3 + l^3x)\,. \tag{226}$$

Ferner findet man aus

$$\sum_0^l wy = \int_0^l \left[\left(y - \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{h}{2}\right)^2\right]dx$$

oder

$$\sum wy = 2\int_0^l \left(y^2 + \frac{h^2}{4}\right)dx$$

nach erfolgter Integration unter Benutzung der Parabelgleichung.

$$\sum wy = \frac{16f^2l}{15} + \frac{h^2l}{2}\,. \tag{227}$$

Durch die Verbindung mit der Gl. (226) folgt

$$H = \frac{f(x^4 - 2lx^3 + l^3x)}{l^3(1{,}6f^2 + 0{,}75h^2)}\,. \tag{228}$$

Darin bedeutet x die Abzisse für die veränderliche Lage der Einzellast $P = 1$.

2. Die nach der Gl. (228) aufgetragene Bogenkraftlinie *weicht von einer Parabel wenig ab.* Will man deshalb angenähert die Bogenkraftfläche *mit einer Parabelfläche gleichen Inhaltes* vertauschen, so berechnet sich deren Höhe δ_{ca} für die Trägermitte aus

$$\delta_{ca}\left(\frac{2l}{3}\right) = \frac{\int_0^l \delta_{ma}\,dx}{\sum wy}\,.$$

Das gibt ausgeführt

$$\delta_{ca} = \frac{5\int_0^l (x^4 - 2lx^3 + l^3x)\,dx}{8f(l^4 + 30h^2)}$$

oder

$$\delta_{ca} = \frac{6fl}{32f^2 + 15h^2}. \tag{229}$$

Mit δ_{ca}, a' und b' sind drei Punkte der Bogenkraftparabel gegeben. Die Darstellung der Bogenkraftfläche erfolgt danach am einfachsten graphisch oder mit Hilfe der Parabelgleichung (220), worin dann

$$f = \delta_{ca}$$

zu setzen ist.

3. Für den in der Fig. 216 dargestellten Parabelbogen, dessen Kämpfergelenke im Untergurt liegen, erhält man nach vorigem

$$y_o = y + h,$$
$$y_u = y,$$

und für $\frac{F_o}{F} = 1$,

$$w = 2y + h.$$

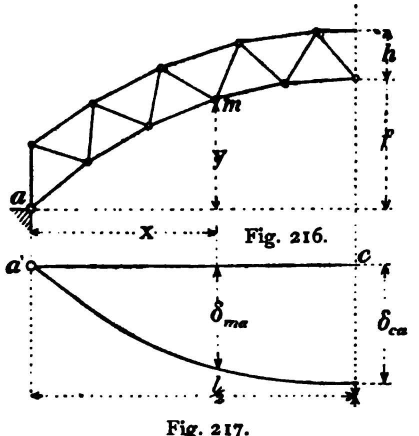


Fig. 216.

Fig. 217.

Führt man die vorigen Rechnungen für diesen Sonderfall ebenfalls durch, so erhält man (Fig. 217)

$$\delta_{ma} = \frac{2f}{3l^2}(x^4 - 2lx^3 + l^3x) + \frac{h}{2}(lx - x^2),$$

$$\sum wy = \frac{16f^2l}{15} + \tfrac{2}{3}fhl, \tag{230}$$

$$H = \frac{5f}{l^2}\,\frac{(x^4 - 2lx^3 + l^3x) + \frac{15h}{4}(lx - x^2)}{8f^2l + 5fhl},$$

und bei Benutzung einer *Parabel als Bogenkraftlinie* erhält man für diese in der Trägermitte die Höhe

$$\delta_{ca} = \frac{l}{f}\left(\frac{\frac{1}{5}f + \frac{1}{8}h}{\frac{16}{15}f + \frac{2}{3}h}\right) = \frac{3l}{16f}. \tag{231}$$

Setzt man diesen Wert von δ_{ca} in die allgemeine Parabelgleichung ein, indem man deren Pfeil

$$f = \delta_{ca}$$

macht, so erhält man die *Gleichung der Bogenkraftparabel* mit

$$y = \frac{3x(l-x)}{4fl}. \tag{232}$$

y ist hier von der Bogenhöhe h unabhängig.

Wie (unter **38**, b. 4) nachgewiesen worden ist, geht die *Richtungslinie* (Kämpferkraftlinie) in *eine Gerade* der Gleichung

$$z = \frac{1}{4}\frac{l}{\delta_{ca}} \tag{233}$$

über, wenn die für $P = 1$ gezeichnete Bogenkraftlinie eine Parabel ist. Für angenäherte Rechnungen empfiehlt sich daher die Einführung einer Bogenkraftparabel um so mehr, als dadurch im besondern auch die Darstellung der Einflußflächen der Gurtstabkräfte vereinfacht wird.

40. Zahlenbeispiele.

a. Einfluß einer wandernden Einzellast.

Aufgabe 51. *Für den in* Fig. 218 und 223 *dargestellten Bogenträger ist die Bogenkraftfläche darzustellen.*

1. Die Knotenpunkte beider Gurte liegen in Kreisbogen, deren Halbmesser für O gleich 92,50 m, für U gleich 50,0 m gewählt wurden.

Bogenhöhe h in der Trägermitte = 2,4 m
 - h_0 über den Stützen = 7,4 m
Pfeilhöhe = 10,0 m
Stützweite = 10 · 6,0 = 60 m.

Die danach berechneten Ordinaten und Stablängen enthält die Tabelle 26.

Tabelle 26. Längen der Ordinaten, Abszissen, Stäbe und Hebelarme.

Knoten	Länge der Ordinaten		Stablängen s				Hebelarme r		Knoten
			Gurte		Wand				
	x_m	y_m	Bezeichnung	Länge m	Bezeichnung	Länge m	Länge m	r^2 m²	
a	0,0	0	$a-1_u$	7,13	$a-a_o$	7,40	—	—	a
a_o	0,0	7,40	a_o-1_o	6,27	a_o-1_u	6,97	6,22	38,56	a_o
1_u	6,0	3,86	1_u-2_u	6,62	1_u-1	5,37	5,15	26,52	1_u
1_o	6,0	9,23	1_o-2_o	6,16	1_o-2_u	6,53	4,91	24,11	1_o
2_u	12,0	6,65	2_u-3_u	6,30	2_u-2_o	3,98	3,87	14,98	2_u
2_o	12,0	10,63	2_o-3_o	6,08	2_o-3_u	6,35	3,84	14,75	2_o
3_u	18,0	8,54	3_u-4_u	6,10	3_u-3_o	3,08	3,07	9,42	3_u
3_o	18,0	11,62	3_o-4_o	6,03	3_o-4_u	6,32	3,04	9,24	3_o
4_u	24,0	9,64	4_u-5_u	6,01	4_u-4_o	2,57	2,53	6,71	4_u
4_o	24,0	12,21	4_o-5_o	6,00	4_o-5_u	6,39	2,59	6,71	4_o
5_u	30,0	10,00	—	—	5_u-5_o	2,40	2,40	5,76	5_u
5_o	30,0	12,40	—	—	—	—	—	—	5_o

2. Der Einfluß der Gurtstäbe und der Wandstäbe auf die Biegelinien ist je besonders behandelt worden. Tabelle 27 gibt alle Unterlagen der hierfür durchgeführten Rechnungen. Das Verhältnis β (**37**, b)

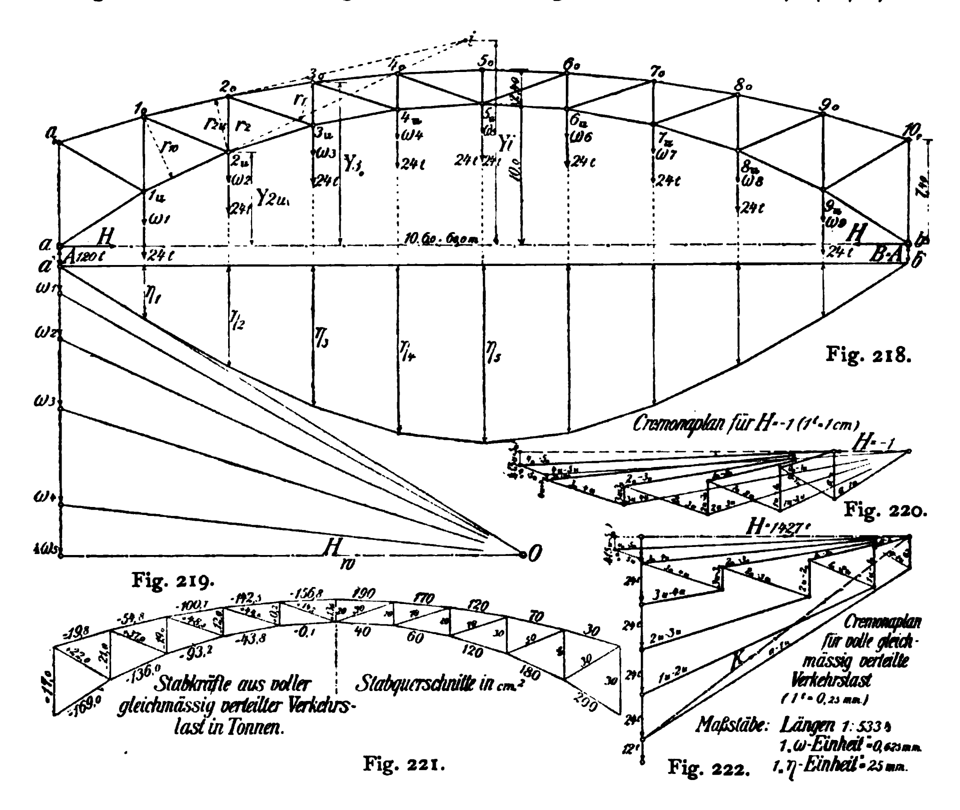


Fig. 218.

Fig. 219.

Fig. 220.

Fig. 221.

Fig. 222.

wurde für die erstmalige Berechnung in den Gurten gleich »*Eins*« und in der Wand gleich »*Drei*« angenommen. Die Werte y_i und r_i für die Wandstäbe wurden berechnet. Dabei ergab sich y_i als Ordinate des Schnittpunktes der verlängerten Gurtstabgeraden.

Aus der folgenden Tabelle 27 erhält man

$$\sum yw = 2[550{,}820 + 3(31{,}705 + 2{,}918)] = 1309{,}378,$$

wobei zu beachten ist, daß darin die y in Metern eingeführt worden sind.

Tabelle 27. Berechnung der elastischen Kräfte für Gurte und Wand.

Einfluß der Gurte				Einfluß der Wand						Berechnung der Σyw				Gesamteinfluß			
						Streben		Ständer †		Streben		Ständer			Gurte *	Wand **	Gurte u. Wand
Knoten	ys	$w = +\frac{ys}{r^2}$	yw	Feld	Knoten	w_m	w_{m+1}	w_m	w_{m+1}	y	yw	y	yw	Knoten	$+\frac{ys}{r^2}\frac{F_0}{F}$	$\frac{ys}{r^2}\frac{F_0}{F}$	w
a_o	52,76	—	—	a—1_u	a	0	—	—	—	—	—	—	—	—			
1_u	24,20	0,913	3,524		1_u	—	+2,570	—	—	14,248	+36,517	—	—	1_u	0,913 2,534 3,447	+2,370	+ 5,817
1_o	61,10	2,534	23,389	1_u—2_u	1_u	—1,354	—	—0,426	—	14,639	—19,821	19,467	— 8,293				
2_u	40,96	2,735	18,188		2_u	—	+2,540	—	+0,519	14,639	+37,183	19,467	+10,103	2_u	2,735 4,540 7,275	+2,481	+ 9,756
2_o	66,97	4,540	48,260	2_u—3_u	2_u	—1,970	—	—0,262	—	15,009	—29,568	22,002	— 5,765				
3_u	51,92	5,512	47,072		3_u	—	+2,291	—	+0,299	15,009	+34,386	22,002	+ 6,579	3_u	5,512 7,671 13,183	+0,951	+ 14,134
3_o	70,88	7,671	89,147	3_u—4_u	3_u	—2,156	—	—0,117	—	15,184	—32,737	39,337	— 4,602				
4_u	58,13	8,663	83,511		4_u	—	+1,318	—	+0,122	15,184	+20,013	39,337	+ 4,799	4_u	8,663 10,936 19,599	+0,969	+ 20,568
4_o	73,38	10,936	133,529	4_u—5_u	4_u	—1,156	—	+0,039	—	15,082	—17,435	5,622	+ 0,219				
5_u	60,03	10,420	104,200		5_u	—	+0,210	—	—0,036	15,082	+ 3,167	5,622	— 0,202	5_u	10,420	+0,546	+ 10,966
5_o	—	—	—	** Hier nur $\frac{1}{2}w$!	5_u **			+0,004	+0,004	—	—	10,0	+ 0,080				
		$\frac{1}{2}\Sigma yw = 550,820$		† Der Einfluß der Endständer wurde vernachlässigt.						$\frac{1}{2}\Sigma yw = +31,705$		$\frac{1}{2}\Sigma yw = +2,918$		* $\frac{F_0}{F} = 1$		** $\frac{F_0}{F} = 3$	$\frac{1}{2}\Sigma w = 61,241$

3. Die *Polweite* H_w *des Kraftecks der elastischen Kräfte* soll gleich $\sum yw$ gemacht werden. Dann erhält man die Bogenkraft aus der Gleichung

$$H = \frac{1 \cdot H_w \cdot \eta}{\sum yw} = 1 \cdot \eta.$$

Die in cm zu messenden Ordinaten η der Bogenkraftfläche geben mit 1 t multipliziert ebensoviel Tonnen an. In der Fig. 218 ist die *Einheit einer Tonne* = 25 mm = 0,025 m gewählt worden. Ferner ist

der Längenmaßstab des Trägerbildes = 3 : 1600,

eine w-Einheit = 0,625 mm.

Das gibt

$$H_w = \left(\frac{1309{,}018}{0{,}025}\right)\left(\frac{3}{1600}\right) = 982 \ w\text{-Einheiten}$$

oder $$H_w = 982 \cdot 0{,}625 = 61{,}4 \text{ mm}.$$

Damit ist die Darstellung der Bogenkraftfläche gegeben.

Aufgabe 52. *Die in der vorigen Aufgabe behandelten Bogenträger mögen zu einer* 8 m *breiten Straßenbrücke gehören, die samt ihrem Eigengewichte mit* $1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ *belastet ist. Für Vollbelastung der Brücke sind sämtliche Stabquerschnitte zu ermitteln und danach die Bogenkraftfläche, sowie einige Einflußflächen von Stabkräften zu zeichnen.*

1. Die Knotenlast L *eines* Bogenträgers berechnet sich mit

$$L = 6 \cdot \tfrac{8}{2} \cdot 1{,}0 = 24 \text{ t}$$

und daraus erhält man die Balkenstützenkräfte

$$A = B = 24 \cdot 5 = 120 \text{ t}.$$

Aus der Bogenkraftfläche der Fig. 218 ist abzumessen

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_9 = 0{,}288 \text{ t}, \\ \eta_2 &= \eta_8 = 0{,}547 \text{ t}, \\ \eta_3 &= \eta_7 = 0{,}758 \text{ t}, \\ \eta_4 &= \eta_6 = 0{,}902 \text{ t}, \\ \eta_5 &= 0{,}954 \text{ t}, \end{aligned}$$

daraus

$$H = 24\,[2\,(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) + \eta_5] = 142{,}7 \text{ t}.$$

Danach ist ein Kräfteplan gezeichnet und aus den darin gefundenen Stabkräften sind die in der Tabelle 28 angegebenen Stabquerschnitte berechnet worden (vgl. Fig. 220—222).

2. Jetzt werden sämtliche elastischen Kräfte w der Gurte und der Wand nach der Gl. (83) aus

$$w = \frac{\Delta s}{r}$$

berechnet, und zwar für den Zustand »$H = -1$«. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 28 zusammengestellt.

Tabelle 28. Berechnung der elastischen

Stab	Stabkraft aus $H=-1$ t	Stablänge m	Stabquerschnitt cm²	Stablängenänderungen $\Delta s = S k$* mm	Einfluß der Gurte			
					Hebelarm r_m	$+10000 w$**	y_m	$+yw$
$a-a_o$	− 0,63	7,40	30	− 0,074	—	—	—	—
$a-1_u$	+ 1,18	7,13	200	+ 0,020	6,22	0,032	7,40	0,0237
a_o-1_u	+ 0,83	6,97	30	+ 0,092	—	—	—	—
a_o-1_o	− 0,75	6,27	30	− 0,075	5,15	0,146	3,86	0,0564
1_u-1_o	− 0,58	5,37	30	− 0,049	—	—	—	—
1_u-2_u	+ 1,89	6,62	180	+ 0,033	4,91	0,067	9,23	0,0618
1_o-2_u	+ 1,04	6,53	50	+ 0,065	—	—	—	—
1_o-2_o	− 1,72	6,16	70	− 0,072	3,87	0,186	6,65	0,1237
2_u-2_o	− 0,45	3,98	30	− 0,028	—	—	—	—
2_u-3_u	+ 2,80	6,30	120	+ 0,070	3,84	0,182	10,63	0,1935
2_o-3_u	+ 1,18	6,35	70	+ 0,051	—	—	—	—
2_o-3_o	− 2,82	6,08	120	− 0,068	3,07	0,222	8,54	0,1896
3_u-3_o	− 0,25	3,08	20	− 0,018	—	—	—	—
3_u-4_u	+ 3,85	6,10	60	+ 0,186	3,04	0,611	11,62	0,7100
3_o-4_u	+ 1,07	6,32	70	+ 0,046	—	—	—	—
3_o-4_o	− 3,82	6,03	170	− 0,065	2,53	0,257	9,64	0,2478
4_u-4_o	+ 0,07	2,57	20	+ 0,004	—	—	—	—
4_u-5_u	+ 4,82	6,01	40	+ 0,345	2,59	1,332	12,21	1,6264
4_o-5_u	+ 0,38	6,39	30	+ 0,039	—	—	—	—
4_o-5_o	− 4,17	6,00	190	− 0,063	2,40	0,263	10,0	0,2630
5_u-5_o	+ 0,35	2,40	20	+ 0,020	—	—	—	—
					$\frac{1}{2}\sum w = +\frac{3{,}266}{10000}$		$\frac{1}{2}\sum yw = +3{,}4959$	

* $E = 2100 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$; ** $w = \frac{\Delta s}{r}$.

w-Kräfte und der Σyw.

Knoten	Einfluß der Wand: Streben		Ständer		Streben		Ständer		Knoten	Gesamteinfluß von Gurten und Wand: Gurte	Wand
	w_m	w_{m+1}	w_m	w_{m+1}	y	yw	y	yw		$10000\,w$	$10000\,w$
a	—	—0,144	—	—	14,071	—0,2026	—	—			
1_u	+0,200	—	—0,067	—	14,248	+0,2850	19,467	—0,1304			
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1_u	+0,213	+0,124
1_u	—	—0,132	—	+0,123	14,639	—0,1932	7,40	+0,0910			
—	—	—	—	—	—	—	—	—			
2_u	+0,177	—	—0,041	—	14,639	+0,2591	22,002	—0,0902			
—	—	—	—	—	—	—	—	—	2_u	+0,368	+0,081
2_u	—	—0,137	—	+0,082	15,009	—0,2056	19,467	+0,1600			
—	—	—	—	—	—	—	—	—			
3_u	+0,175	—	—0,030	—	15,009	+0,2627	39,337	—0,1180			
—	—	—	—	—	—	—	—	—	3_u	+0,833	+0,032
3_u	—	—0,160	—	+0,047	15,184	—0,2427	22,002	+0,1034			
—	—	—	—	—	—	—	—	—			
4_u	+0,185	—	+0,006	—	15,184	+0,2809	5,622	+0,0034			
—	—	—	—	—	—	—	—	—	4_u	+1,589	+0,055
4_u	—	—0,166	—	+0,030	15,082	—0,2504	39,337	+0,1180			
—	—	—	—	—	—	—	—	—			
5_u	+0,172	—	—	—0,007	15,082	+0,2594	5,622	—0,0039			
—	—	—	—	—	—	—	—	—	5_u	+0,263	+0,159
5_u	—	—	+0,061	—0,067	—	—	10,0	+0,0610 —0,0670			
—	$10000\,w$		$10000\,w$		—	—	—	—			
$\frac{1}{2}\Sigma w = +\frac{0,314}{10000}$			$\frac{1}{2}\Sigma w = +\frac{0,137}{10000}$		$\frac{1}{2}\Sigma yw = 0,2526$		$\frac{1}{2}\Sigma yw = 0,128$		$\frac{1}{2}\Sigma w = \frac{3,717}{10000}$		

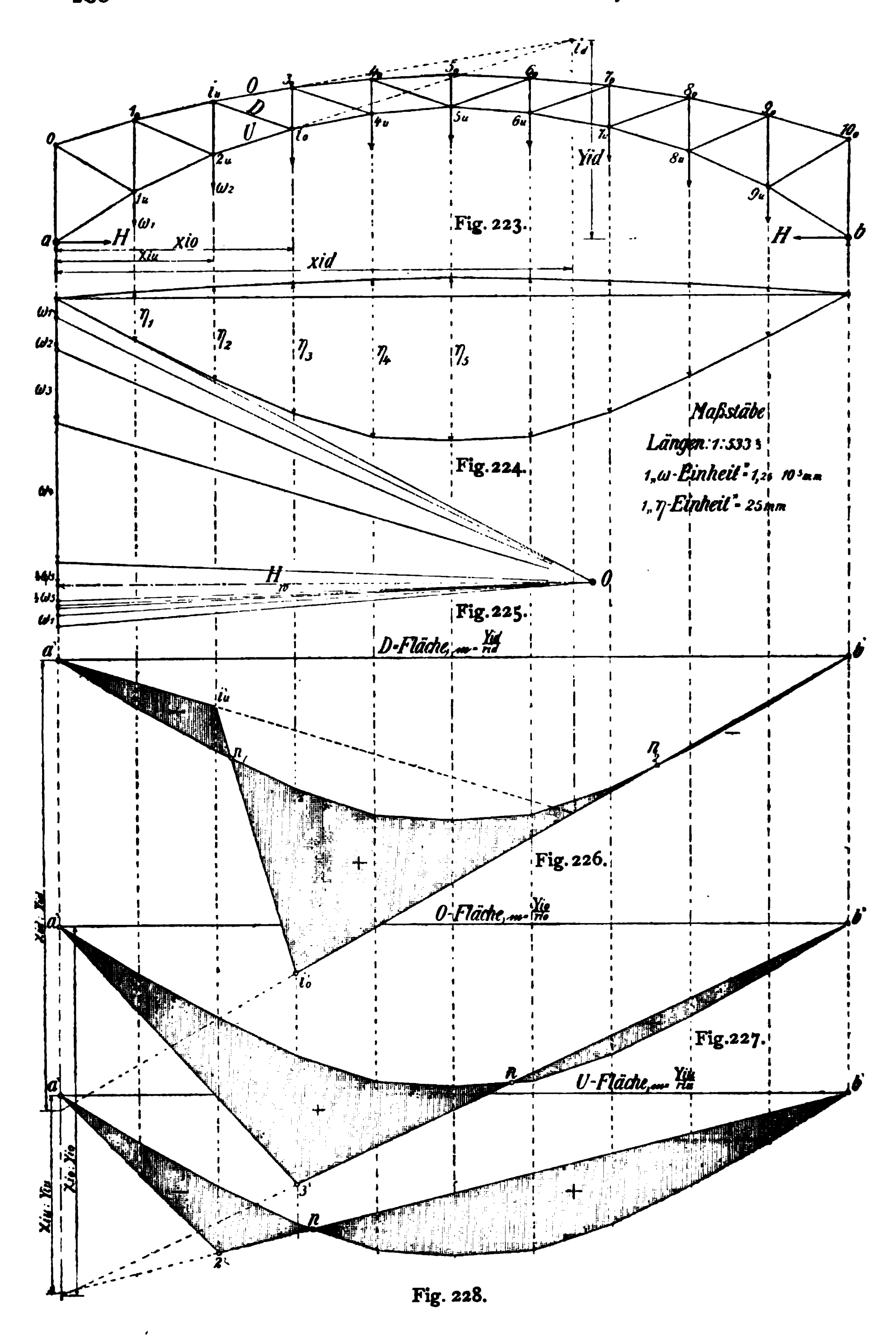

Fig. 223.
Fig. 224.
Fig. 225.
D-Fläche
Fig. 226.
O-Fläche
Fig. 227.
U-Fläche
Maßstäbe
Längen: 1:533 $\frac{1}{3}$
1 „ω-Einheit" = 1,25 10^5 mm
1 „η-Einheit" = 25 mm

Fig. 228.

Nach der Tabelle 28 erhält man (für die y in *Millimetern*)

$$\sum yw = 6{,}9918 + 0{,}5052 + 0{,}2560 = 7{,}7530$$

und (bei Fortfall der auf die Stützen fallenden elastischen Kräfte)

$$\sum w = 2\left(\frac{3{,}266 + 0{,}314 + 0{,}137}{10000}\right) = \frac{7{,}434}{10000}\,.$$

Danach ist die Bogenkraftfläche (Fig. 224—225) mit der Polweite $\sum yw$ gezeichnet. Der Maßstab für ihre Ordinaten η wurde

$$1\,\mathrm{t} = 25\,\mathrm{mm}$$

angenommen. Daraus berechnet sich für die gewählten Längenmaße

$$H_w = \left(\frac{\sum yw}{25}\right)\frac{3}{1600} = \frac{23{,}259}{40000}\ w\text{-Einheiten.}$$

Eine w-Einheit wurde gleich 125000 mm gesetzt. Das gibt

$$H_w = \frac{23{,}259 \cdot 125}{40} = 72{,}68\,\mathrm{mm}.$$

Für die vorher festgesetzten Knotenlasten von 24 t berechnet sich jetzt, wenn die betreffenden Werte von η aus der Fig. 224 abgegriffen werden,

$$H = 24\,[2\,(0{,}276 + 0{,}525 + 0{,}742 + 0{,}898) + 0{,}928] = 119{,}5\,\mathrm{t}.$$

3. Es sind die Einflußflächen von D, O und U (Fig. 226—228) dargestellt worden. Maßgebend für die Darstellung waren die Werte von $\frac{x}{y}$. Diese berechneten sich

für die O-Fläche mit $\frac{x}{y} = \frac{18{,}0}{8{,}54} = 2{,}107$,

- - U-Fläche - $\frac{x}{y} = \frac{12{,}0}{10{,}63} = 1{,}129$,

- - D-Fläche - $\frac{x_i}{y_i} = \frac{38{,}539}{15{,}009} = 2{,}567$.

Das Weitere ergeben die Figuren 226—228.

b. Einfluß der Temperatur.

Aufgabe 53. *Der vorbehandelte Bogenträger, dessen in* Fig. 223 *gezeichnetes Bild bei* + 10° C *als spannungslos angesehen werden darf, erleidet folgende Temperaturerhöhungen:*

im Obergurt bis auf 45° C,
- *Untergurt* - - 25° C,
in der Wand - - 35° C.

Die durch diesen Temperaturzustand verursachte Bogenkraft H_t ist zu ermitteln.

1. H_t berechnet sich (nach Gl. 209) aus

$$H_t = \frac{\sum S_a \Delta s_t}{\sum S_a^2 k} = \frac{\sum S_a (\alpha_t t s)}{\sum S_a^2 \frac{s}{EF}} .$$

Die Berechnung ist in der folgenden Tabelle 29 durchgeführt. Dabei ist $\alpha_t = 0{,}000012$ gesetzt. t beträgt für den Obergurt 35°, Untergurt 15° und die Wand 25° C.

Tabelle 29. Berechnung der Temperaturbogenkraft H_t.

	Stab	S_a* für $H = -1$ (t)	Stablänge* s (m)	Stab-* querschnitt F (cm²)	$+\Delta s_t = \alpha_t t s$ (mm)	$S_a \cdot \Delta s_t$ (tmm)	$S_a^2 \cdot \frac{s}{EF}$ (tmm)
Obergurt	a_0—1_o	—0,75	6,27	30	2,633	— 1,975	0,056
	1_o—2_o	— 1,72	6,16	70	2,587	— 4,450	0,124
	2_o—3_o	—2,82	6,08	120	2,554	— 7,202	0,192
	3_o—4_o	—3,82	6,03	170	2,533	— 9,676	0,246
	4_o—5_o	—4,17	6,00	190	2,520	—10,508	0,261
Untergurt	a—1_u	+ 1,18	7,13	200	1,283	+ 1,513	0,024
	1_u—2_u	+ 1,89	6,62	180	1,192	+ 2,253	0,063
	2_u—3_u	+ 2,80	6,30	120	1,135	+ 3,178	0,196
	3_u—4_u	+ 3,85	6,10	60	1,098	+ 4,227	0,718
	4_u - 5_u	+ 4,82	6,01	40	1,082	+ 5,215	1,662
Streben	a_o—1_u	+ 0,83	6,97	30	2,091	+ 1,736	0,076
	1_o—2_u	+ 1,04	6,53	50	1,959	+ 2,037	0,067
	2_o—3_u	+ 1,18	6,35	70	1,905	+ 2,248	0,060
	3_o—4_u	+ 1,07	6,32	70	1,896	+ 2,029	0,049
	4_o—5_u	+ 0,38	6,39	30	1,917	+ 0,728	0,015
Ständer	a—a_o	—0,63	7,40	30	2,220	— 1,399	0,047
	1_u—1_o	—0,58	5,37	30	1,611	— 0,934	0,029
	2_u—2_o	—0,45	3,98	30	1,194	— 0,537	0,013
	3_u—3_o	—0,25	3,08	20	0,924	— 0,231	0,005
	4_u—4_o	+ 0,07	2,57	20	0,771	+ 0,054	0,0003
	5_u—5_o	+ 0,35	2,40	20	0,720	+ 0,252**	0,007**
	* Vgl. Tabelle 28.		** Nur die Hälfte.		Σ =	—11,316	3,907

Daraus folgt

$$H_t = \frac{-11{,}316}{3{,}907} = -2{,}9 \text{ t.}$$

Weil (nach **37**, a)

$$\sum S_a^2 k = \sum y w ,$$

so müßte die doppelte Summe der letzten Spalte der Tabelle 29 gleich der in der Aufgabe 52 berechneten

$$\sum yw = 7{,}753$$

sein. Das stimmt ziemlich gut. Denn es ist

$$\sum S_a^2 k = 2 \cdot 3{,}907 = 7{,}814.$$

2. Wollte man H_t graphisch darstellen, so würde dabei ein Verschiebungsplan seiner größeren Ungenauigkeit wegen gegenüber einer *wagerechten Biegelinie* zurückstehen müssen. Man berechne also für die gegebenen Δs_t alle

$$w_t = \frac{\Delta s_t}{r}$$

und bringe sie in den zugeordneten Momentenpunkten der Gurte und auch der Wandstäbe *wagerecht* an. Dann erhält man (nach **37**, c, wozu auch die Fig. 201 zu vergleichen ist) die Verschiebung δ_{at}. Somit erhält man

$$H_t = \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}} = \frac{\delta_{at}}{\sum S_a^2 k} = \frac{\delta_{at}}{\sum y w_t}\,.$$

Da die y in den vorigen Aufgaben schon berechnet worden sind, so sind (nach Mohr) die w_t für alle Wandstäbe in der Höhe y über der Kämpferlinie angreifend zu denken. Eine Zerlegung der w_t auf die Feldknoten braucht nicht ausgeführt zu werden.

Wenn man will, kann man die w_t auch für einen *Wandstabzug* berechnen (nach den Gl. 104—105 unter **19**, a).

Aufgabe 54. *Wie groß ist die Hebung oder Senkung δ_5 des Scheitelknotens 5_u im Untergurte des behandelten Bogenträgers* (Fig. 223), *wenn die in der vorigen Aufgabe angegebenen Temperaturerhöhungen eingetreten sind?*

Für eine im Knoten 5_u wirkend *gedachte* lotrechte Krafteinheit ist (nach Gl. 62) anzuschreiben

$$1 \cdot \delta_5 = \sum \overline{S} \cdot \Delta s\,,$$

worin die Δs diejenigen Stablängenänderungen sind, die von den Einflüssen der Temperatur und der Temperaturbogenkraft verursacht werden. Danach erhält man

$$\delta_5 = \sum \overline{S}(\alpha_t ts + H_t S_a k). \tag{234}$$

Darin bedeutet

$\overline{S}$: eine allein von der in 5_u wirkend *gedachten* Krafteinheit verursachte Stabkraft.

S_a: eine für »$H_t = 1$« berechnete Stabkraft.

$\alpha_t\, ts$, S_a und H_t sind aus voriger Aufgabe bekannt. Die Werte $\bar{S}$ sind noch zu berechnen. Danach ist δ_5 in der Tabelle 30 berechnet worden. Es ergab sich *eine Hebung*

$$\delta_5 = 9{,}745 \text{ mm}.$$

Tabelle 30. Berechnung der Scheitelsenkung des Bogenträgers.

Stab	Δst** $= \alpha_t\, ts$ mm	S_a** für $H_t = 1$ t	$H_t \cdot S_a \frac{s}{EF}$ mm	$\bar{S}$ für »Eins« in 5_u t	$\bar{S}(\alpha_t\, ts + H_t S_a k)$ mm
$a-1_o$	2,633	+ 0,75	− 0,218	− 0,58	− 1,401
1_o-2_o	2,587	+ 1,72	− 0,209	− 1,55	− 3,686
2_o-3_o	2,554	+ 2,82	− 0,206	− 2,98	− 6,997
3_o-4_o	2,533	+ 3,82	− 0,189	− 4,71	−11,040
4_o-5_o	2,520	+ 4,17	− 0,183	− 6,24	−14,583
$a-1_u$	1,283	− 1,18	+ 0,006	+ 0	0
1_u-2_u	1,192	− 1,89	+ 0,096	+ 0,62	+ 0,799
2_u-3_u	1,135	− 2,80	+ 0,203	+ 1,58	+ 2,114
3_u-4_u	1,098	− 3,85	+ 0,539	+ 2,99	+ 4,895
4_u-5_u	1,082	− 4,82	+ 1,000	+ 4,71	+ 9,806
$a-1_u$	2,091	− 0,83	+ 0,267	+ 0,65	+ 1,533
1_o-2_u	1,959	− 1,04	+ 0,189	+ 1,03	+ 2,212
2_o-3_u	1,905	− 1,18	+ 0,148	+ 1,52	+ 3,121
3_o-4_u	1,896	− 1,07	+ 0,133	+ 1,85	+ 3,754
4_o-5_u	1,917	− 0,38	+ 0,113	+ 1,64	+ 3,329
$a-a$	2,220	+ 0,63	− 0,215	− 0,50	− 1,003
1_u-1_o	1,611	+ 0,58	− 0,142	− 0,59	− 0,867
2_u-2_o	1,194	+ 0,45	− 0,081	− 0,62	− 0,690
3_u-3_o	0,924	+ 0,25	− 0,052	− 0,55	− 0,480
4_u-4_o	0,771	− 0,07	+ 0,012	− 0,33	− 0,250
5_u-5_o	0,720	− 0,35	+ 0,058	− 0,47	− 0,311
** Nach Tabelle 29.		Die Summierung ergibt: $\delta_5 =$			− 9,745 mm

c. Näherungsrechnungen.

Aufgabe 55. *An Stelle der Kreisliniengurte des bisher behandelten Bogenträgers mögen parallele Parabelgurte treten, so daß Stützweite und Pfeilhöhe des Untergurtes sich nicht ändern. Wie groß muß dann annähernd die Höhe h des Parabelbogens gemacht werden, damit bei der in Aufgabe* 52 *vorgeschriebenen Vollbelastung (und für* $\beta = 1$*) die gleiche Bogenkraft erzeugt wird, wie bei den Kreisbogenträgern?*

Nach der Gl. (230) unter **39**, b, 2 ist für eine wandernde Einzellast »$P = 1$« in der Entfernung x von der Stütze a die Höhe η der Bogenkraftfläche mit

$$\eta = \frac{\frac{5f}{l^2}(x^4 - 2lx^3 + l^3x) + \frac{15}{4}h(lx - x^2)}{8f^2l + 5fhl}$$

anzuschreiben. Das gibt für $l = 60$ m und $f = 10$ m

$$\eta = \frac{x^4 - 120x^3 + 216\,000x + 270h(60x - x^2)}{720(4800 + 300h)}.$$

Hieraus berechne man für $x = 6$, 12, 18, 24 und 30 die bekannten Werte von $\eta_1 = \eta_9$, $\eta_2 = \eta_8$ bis η_5 *als Funktionen von h.*

Dann ist schließlich aus

$$142{,}7 \text{ t} = 24[2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) + \eta_5]$$

das h auszuscheiden.

Wollte man *auch die Bogenkraftfläche noch als Parabel* betrachten, so wäre (nach der Gl. (232) unter **39**, b, 3) *h von den η unabhängig*, d. h. bei einer Querschnitts-Einflußzahl $\beta = 1$ könnte h beliebig, also auch gleich Null gemacht werden, ohne daß dadurch die Bogenkraftfläche sich ändern würde.

Aufgabe 56. *Wie groß würde bei der in Aufgabe* 52 *gegebenen Vollbelastung* (*und für* $\beta = 1$) *die Bogenkraft ausfallen, wenn die Kämpfergelenke des Parabelbogens* (*nach* Fig. 214) *in die Mitte der Bogenhöhe h gelegt werden? Wie früher sei* $l = 60$ *und* $f = 10$ m, *dagegen* $h = 4$ m.

1. Nach Gl. (228) ist für die Ordinaten η der Bogenkraftfläche

$$\eta = \frac{f(x^4 - 2lx^3 + l^3x)}{l^3(1{,}6f^2 + 0{,}75h^2)}$$

anzuschreiben. Das gibt

$$\eta = \frac{(x^4 - 120x^3 + 216\,000x)}{21\,600(160 + 12)}.$$

Man berechne, wie in der vorigen Aufgabe, η_1 bis η_5. Dann erhält man

$$H = 24[2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) + \eta_5] = 166 \text{ t}.$$

2. Faßt man in diesem Falle *einfacher* die Bogenkraftfläche als Parabel auf, so erhält man (nach Gl. 229) die mittlere Höhe

$$\eta_5 = \frac{6fl}{32f^2 + 15h^2} = 1{,}046.$$

Die Belastung p für ein m Stützweite beträgt

$$p = 1{,}0 \cdot \tfrac{8}{2} = 4 \text{ t.}$$

Das gibt

$$H = \tfrac{2}{3}(1{,}04 \cdot 60)\, 4 = 166 \text{ t.}$$

Aufgabe 57. *Wie groß ist annähernd, bei Vollbelastung von* $p = 5 \frac{\text{t}}{\text{m}}$ *die Bogenkraft eines flachen Parallelbogenträgers von* 10 m *Pfeil und* 120 m *Stützweite, wenn durchweg* $\beta = 1$ *angenommen wird und wenn die Kämpfergelenke im Untergurte liegen?*

Für eine Bogenkraftparabel erhält man nach Gl. (231) die Höhe η in der Mitte mit

$$\eta = \frac{3\,l}{16 f} = \frac{360}{160} = 2{,}25.$$

Das gibt

$$H = \tfrac{2}{3}(2{,}25 \cdot 120)\, 5{,}0 = 900 \text{ t.}$$

Aufgabe 58. *Bei welcher Lage der Einzellast »$P = 1$« entsteht in der vorigen Aufgabe annähernd die größte Kämpferkraft K_a und wie groß ist sie?*

1. Einzellast und Kämpferkräfte schneiden sich in einem Punkte c_0 (Fig. 208) der Kämpferdrucklinie (Richtungslinie). Diese darf im vorliegenden Falle als eine Gerade angenommen werden, die in der Höhe z über der Kämpferlinie liegt (**38**, b. 4). Ist α der Winkel, den die Richtung einer Kämpferkraft K mit der wagerechten Kämpferlinie einschließt, so ist

$$K = \frac{H}{\cos\alpha} = H\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{z}{x},$$

wenn x, wie früher, den Abstand der Einzellast von der linken Stütze bedeutet. Das gibt

$$K = \frac{H}{x}\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Es ist aber (nach Gl. 232) für die wandernde Einzellast

$$H = \frac{3x(l - x)}{4fl} \tag{235}$$

oder

$$K = \frac{3}{4fl}\left[(l - x)\sqrt{x^2 + z^2}\right]. \tag{236}$$

Daraus

$$\frac{dK}{dx} = \frac{3}{4fl}\left[\frac{lx - 2x^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right].$$

Der Grenzwert von K findet sich somit aus

$$lx - 2x^2 - z^2 = 0.$$

Nach den Gl. (231) und (233) ist

$$z = \frac{1}{4}\frac{l}{\delta_{ca}}$$

und

$$\delta_{ca} = \frac{3l}{16f}.$$

Das gibt

$$z = \frac{4f}{3} = \frac{40}{3} \tag{237}$$

oder

$$x^2 - \frac{lx}{2} = -z^2.$$

Dieser quadratischen Gleichung entsprechen für $l = 120$ m die Werte

$$+x = 3{,}13 \text{ m und } 56{,}87 \text{ m}.$$

2. Danach ist

$$H = 0{,}23 \text{ und } 2{,}24,$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \begin{cases} 4{,}37 \\ 1{,}03 \end{cases}$$

und

$$K = \frac{H}{\cos\alpha} = \begin{cases} 0{,}9989 \\ 2{,}307 \end{cases}.$$

§ 8. Bogenträger ohne Gelenk.

Setzt man bei gegliederten Bogenträgern innere Bestimmtheit voraus, so gleicht ihre Berechnung in der Hauptsache derjenigen der Vollwandträger. Ein Unterschied in der Behandlung beider ist nur insofern vorhanden, als für die Darstellung der Biegelinien des Hauptsystemes der Vollwandträger jede elastische Kraft eines Querschnittes aus einer Integration innerhalb gewisser Grenzen genommen werden muß, während sie für Fachwerksknoten unmittelbar gegeben ist. Als den allgemeineren Fall stellen wir hier die Behandlung der Vollwandträger voran. Das entspricht auch dem Gange der Entwicklung der Theorie, worüber näheres in den geschichtlichen Rückblicken des zweiten Abschnittes zu finden ist. Die im 2. Bande (unter **43**) bereits gegebenen Grundlagen der Elastizitätstheorie der Bogenträger bilden den Ausgang der folgenden Betrachtungen.

41. Einleitung.

a. Bogenmoment und Hauptsystem.

1. Wie man die drei überzähligen Größen unmittelbar in den einfachsten Ausdrücken erhalten kann, wurde schon unter **36**, b (Aufgabe 47) gezeigt.

Nach den ausführlichen Darlegungen im 2. Bande (unter **43**, b) sind (für eine *veränderliche* Dehnungszahl) die drei überzähligen Größen an folgende drei Grundbedingungen gebunden:

$$\int \frac{M_m}{EJ} x\,du = 0; \quad \int \frac{M_m}{EJ} y\,du = 0; \quad \int \frac{M_m}{EJ} du = 0. \qquad (238)$$

Darin bedeuten (mit Bezug auf die Fig. 229)

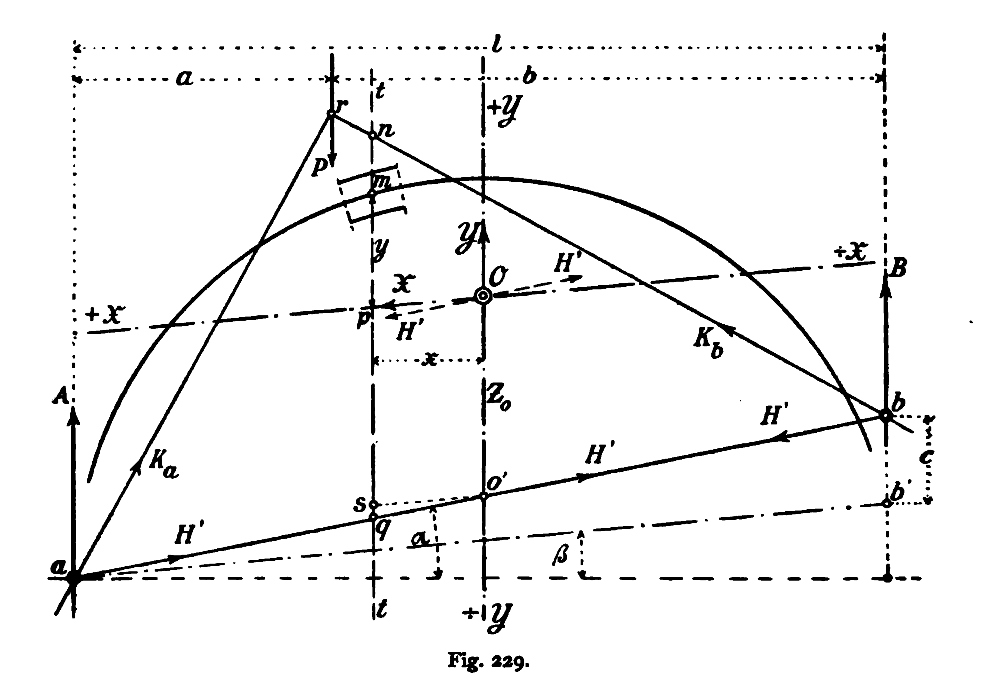


Fig. 229.

M_m: das Bogenmoment, bezogen auf einen, in lotrecht geführtem Schnitte tt liegenden Punkt m der Bogenachse.

x, y: Koordinaten des Punktes m, bezogen auf ein Achsensystem, dessen Ursprung O beliebig zu legen ist, wobei die Y-Achse lotrecht liegt und die X-Achse mit der Wagerechten einen beliebigen Winkel β einschließt.

J: das Trägheitsmoment eines bogenrecht (radial) geführten Querschnittes, bezogen auf eine durch m verlaufende, zur Trägerebene senkrecht stehende Schwerachse.

du: der in der Bogenachse gemessene differentiale Abstand der Nachbarquerschnitte des Punktes m.

Dabei möge an die (unter II. **43**) gemachte Voraussetzung erinnert werden, wonach bei der Entwicklung der obigen Bedingungen der Einfluß *der Längskraft im Querschnitte* auf die Formänderungen des Bogens vernachlässigt worden ist.

Das Bogenmoment ist für den Punkt m des lotrechten Schnittes und für eine im Schnittpunkte r der beiden Kämpferkräfte K_a und K_b angreifende Einzellast P (nach II. **36**, a) mit

$$M_m = H \cdot \overline{mn} \qquad (239)$$

anzuschreiben. n ist der Schnittpunkt der Kämpferkraft K_b mit dem lotrechten Schnitte tt. Die Bogenkraft H gilt positiv, wenn sie im linken Bogenteile nach rechts, im rechten Bogenteile nach links hin zielt. *Für den linken Bogenteil ist M_m also positiv, wenn $\overline{mn}$ oberhalb von m liegt, und umgekehrt.*

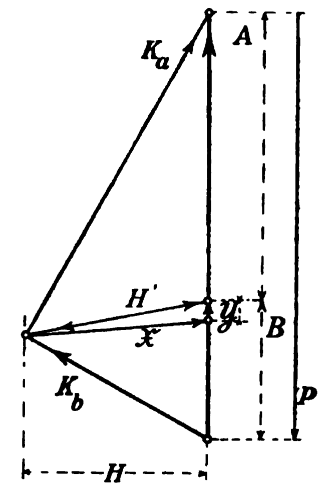


Fig. 230.

Mit Bezug auf die Fig. 229 kann man für $\overline{mn}$ anschreiben

$$\overline{mn} = \overline{nq} - \overline{pm} - \overline{pq}.$$

a und b seien die Angriffspunkte von K_a und K_b; l sei die wagerechte Entfernung zwischen a und b. Ferner werde die Strecke $\overline{bb'}$, die von einer durch a gelegten Parallelen zur X-Achse auf der Stützenlotrechten B abgeschnitten wird, gleich c gesetzt und die lotrecht gemessene Entfernung $\overline{Oo'}$ des Ursprunges O von der Kämpferlinie ab mit z_0 bezeichnet. Zieht man jetzt noch $o's \parallel \overline{ab'}$, so ist

$$\overline{qs} = x\frac{c}{l}$$

und

$$\overline{pq} = z_0 + \frac{x \cdot c}{l}.$$

Das gibt

$$\overline{mn} = \overline{nq} - y - z_0 - x\frac{c}{l}.$$

Die im lotrechten Schnitte m liegende Strecke $\overline{nq}$ stellt (wie bereits in II. **36**, a erläutert wurde) eine Ordinate der mit dem Pole H gezeichneten Momentenfläche der von der Einzellast erzeugten lotrechten äußern Kräftę vor. Das zugehörige Krafteck ist in der Fig. 230 dargestellt. Nach unserer früheren Bezeichnungsweise ist daher

$$\overline{nq} \cdot H = M_{am} = M_{bm},$$

je nachdem der linke oder der rechte Bogenteil betrachtet wird. Alles zusammen genommen gibt für den linken Teil:

$$M_m = M_{am} - Hy - Hz_0 - Hx\frac{c}{l}. \tag{240}$$

2. Die obige Gleichung für das Bogenmoment ist unmittelbar anzuschreiben, wenn man das Hauptsystem mit den äußern Kräften P und drei überzähligen Größen X, Y, Z belastet denkt (Fig. 229). Auf den linken Teil wirkt (außer der Einzellast P in r) im Punkte a die Kämpferkraft K_a. Diese zerlegt sich in A und H'. H' verschiebe man in der Kämpferlinienrichtung bis o' und außerdem bringe man im Ursprunge O zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte H' an. Dadurch ändert sich nichts im Gleichgewicht der äußern Kräfte. H' zerlege man in zwei Seitenkräfte, von denen eine (X) in die Richtung der X-Achse, die andere (Y) in die Richtung der Y-Achse fällt. Diese Zerlegung ist in den Fig. 229 und 230 ausgeführt. Danach ist

$$\begin{aligned} X &= \frac{H}{\cos\beta}, \\ Y &= H(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = H\frac{c}{l}. \end{aligned} \tag{241}$$

Danach kann das Hauptsystem als ein in a und b statisch bestimmt gestützter Balkenträger betrachtet werden, auf den folgende äußere Kräfte wirken:

1) *In r die Einzellast P*: sie erzeugt die Stützenkräfte A und B und in m das positive Moment $M_{am} = M_{bm}$.

2) *Im Ursprunge O des Achsenkreuzes zwei Kräfte X und Y in den betreffenden Achsenrichtungen*: sie erzeugen die zugehörigen negativen Momente $H \cdot y$ und $Y \cdot x$.

3) *Ein in der Trägerebene beliebig verschiebbares Moment Z*, das aus

$$Z = H'(z_0 \cos\alpha) = Hz_0 \tag{242}$$

bestimmt ist.

Setzt man die vorerklärten Größen X, Y, Z in die Gl. (240) ein, so erhält diese (für den linken Bogenteil) die Form

$$M_m = M_{am} - X(y\cos\beta) - Y \cdot x - Z. \tag{243}$$

Das durch die Kräfte P, X, Y, Z belastete Hauptsystem ist damit eindeutig beschrieben. *Liegt die X-Achse parallel zur Kämpferlinie ab, so verschwinden c und Y.* Legt man sie wagerecht, so verschwindet β, und X geht in die Bogenkraft H über.

b. Die Elastizitätsgleichungen und ihre Vereinfachung.

1. Wenn man die Grundbedingungen der Gl. (238) durch Einsetzen der Gl. (240) für das Bogenmoment umformt, so erhält man dadurch drei neue Gleichungen, aus denen die überzähligen Größen X, Y, Z als Funktionen der gegebenen Größen (M_{am}, J, x, y, z_0, c und l) auszuscheiden sind. Man erhält zunächst die Nullgleichungen von der Form

$$\begin{aligned}
&\int M_{am}\cdot x\cdot\frac{du}{EJ}-X\cos\beta\int xy\cdot\frac{du}{EJ}-Y\int x^2\cdot\frac{du}{EJ}-Z\int x\cdot\frac{du}{EJ}=0,\\
&\int M_{am}\cdot y\cdot\frac{du}{EJ}-X\cos\beta\int y^2\cdot\frac{du}{EJ}-Y\int xy\cdot\frac{du}{EJ}-Z\int y\cdot\frac{du}{EJ}=0,\quad(244)\\
&\int M_{am}\cdot\frac{du}{EJ}-X\cos\beta\int y\cdot\frac{du}{EJ}-Y\int x\cdot\frac{du}{EJ}-Z\int\frac{du}{EJ}=0.
\end{aligned}$$

Die allen Gliedern der Gleichungen gemeinsame Größe $\frac{du}{J}$ läßt sich, wie weiterhin (**42**) gezeigt wird, als eine *elastische Kraft* erklären, mit deren Hilfe *die Biegelinien des Hauptsystems* für die Zustände »$X = -1$«, »$Y = -1$« und »$Z = -1$« darzustellen sind. Wir setzen

$$\frac{du}{EJ}=w$$

und bestimmen die Lage des Achsensystems derart, daß

$$\int x\cdot w=0;\quad \int y\cdot w=0;\quad \int xy\cdot w=0 \qquad (245)$$

werden. Die ersten beiden Glieder dieser Gleichung sagen aus:

> *Der Ursprung O des Achsensystems muß im Schwerpunkte der elastischen Kräfte* $w=\frac{du}{J}$ *liegen.* Denn wenn das geschieht, läuft auch die Mittelkraft $\int w$ durch O und deren statische Momente $\int xw$ und $\int yw$, bezogen auf die durch O laufenden Schwerachsen, verschwinden.

Nach der dritten der Gl. (245) soll auch das Zentrifugalmoment aller w verschwinden, d. h. *die X-Achse muß der lotrecht zu führenden Y-Achse zugeordnet sein* (I. **94**).

Sobald obige Bedingungen über die Lage des Achsensystems erfüllt sind, gehen die Gl. (244) über in

$$\int M_{am} \cdot x \cdot w - Y\int x^2 w = 0\,,$$
$$\int M_{am} \cdot y \cdot w - X \cos\beta \int y^2 w = 0\,, \tag{246}$$
$$\int M_{am} \cdot w - Z\int w \quad = 0\,.$$

Daraus folgen die Elastizitätsgleichungen in ihrer einfachsten Form:

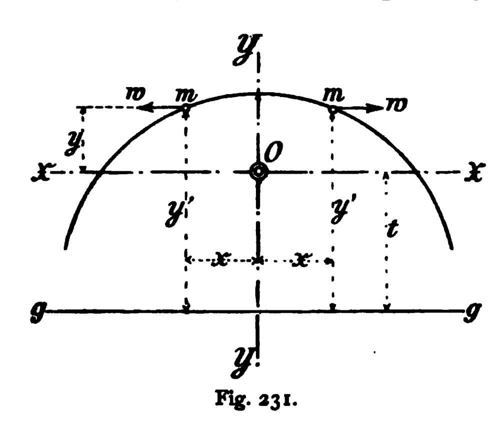


Fig. 231.

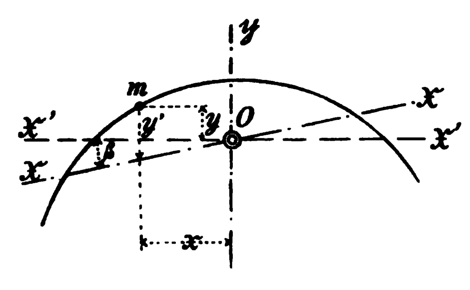


Fig. 232.

$$X = \frac{\int M_{am} \cdot y w}{\cos\beta \int y^2 w}\,,$$
$$Y = \frac{\int M_{am} \cdot x w}{\int x^2 \cdot w}\,, \tag{247}$$
$$Z = \frac{\int M_{am} \cdot w}{\int w}\,.$$

2. In einem *zur Y-Achse symmetrischen* Bogen verschwindet das Zentrifugalmoment auch für ein rechtwinkliges Achsenkreuz. Dann ist $\beta = 0$ und $\cos\beta = 1$. Der Abstand t zwischen dem Ursprunge O und einer zur wagerechten X-Achse parallelen beliebigen Geraden gg (Fig. 231) bestimmt sich dann aus

$$t = \frac{\int y' w}{\int w}\,. \tag{248}$$

Ist für einen unsymmetrischen Bogen (graphisch oder rechnerisch) O als Schwerpunkt aller w und somit auch die Y-Achse festgelegt, so findet man den Winkel β (Fig. 232) aus der Bedingung

$$y = y' + x \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

Das gibt

$$\int x \cdot y \cdot w = \int x(y' + x \operatorname{tg}\beta)\, w = 0$$

oder

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-\int xy' \cdot w}{\int x^2 \cdot w}. \tag{249}$$

42. Die Bedeutung der Summengrößen der Elastizitätsgleichungen.

a. Bedeutung der Zähler und seiner w-Größen.

1. Wir legen die Stützenlotrechten so, daß ihr wagerechter Abstand gleich der Stützweite l der Bogenachse wird. Schreibt man der Einfachheit und bessern Übersicht wegen

$$\begin{aligned} yw &= w_x \\ xw &= w_y \\ w &= w_z, \end{aligned} \tag{250}$$

so gehen die Gl. (247) über in

$$\begin{aligned} X &= \frac{\int M_{am} \cdot w_x}{\cos\beta \int y \cdot w_x}, \\ Y &= \frac{\int M_{am} \cdot w_y}{\int x \cdot w_y}, \\ Z &= \frac{\int M_{am} \cdot w_z}{\int w_z}. \end{aligned} \tag{251}$$

Wie gesagt, bedeuten die Zählergrößen dieser Gleichung nichts anderes als die Verschiebungen des Angriffspunktes r der Einzellast P, verursacht durch die betreffenden Zustände »$X = -1$«, $Y = -1$, $Z = -1$. Um das einzusehen, braucht man für jeden Zustand nur die Arbeitsgleichung MOHRS anzuschreiben. Man erhält dann z. B. für den Zustand »$X = -1$«, wobei (wie bekannt) X im Ursprunge O und in der Richtung der X-Achse angreift,

$$\bar{1} \cdot \delta_{rx} = \int_0^l \overline{M}_m \cdot \Delta d\varphi.$$

Darin ist $\overline{M}$ das von einer in r angreifenden, *gedachten* Lasteinheit im Punkte m erzeugte Moment. Dies Moment ist aber gleich dem von der wandernden Einzellast »$P = 1$« verursachten Moment M_{am}. Ferner ist $\Delta d\varphi$ die *Änderung des Winkels* der Nachbarquerschnitte in m, verursacht durch die *wirkliche* Belastung, d. i. von »$X = -1$«. Wenn

man nun, wie es praktisch (bei großen Krümmungshalbmessern ϱ) zulässig ist, die Winkeländerung (nach II. **35**, a) aus der Gleichung

$$\frac{\varDelta\, d\varphi}{du} = \frac{M}{EJ}$$

berechnet und bedenkt, daß im vorliegenden Falle

$$M = +1 \cdot y$$

ist, so hat man

$$\bar{1} \cdot \delta_{rx} = \int_0^l M_{am} \cdot \frac{y\, du}{EJ} = \int_0^l M_{am} \cdot w_x. \tag{252}$$

Man sieht, daß der Zählerwert der ersten Elastizitätsgleichung gleich $1 \cdot \delta_{rx}$ gesetzt werden darf. Weiter erkennt man aber, wie das »w_x« in Wirklichkeit eine elastische Kraft w im früheren Sinne (**5**, c) ist. Das heißt: *Man erhält die elastische Linie der durch »$X = -1$« belasteten Bogenachse mit Hilfe eines Kraftecks, in welchem jede elastische Kraft W gleich der Winkeländerung $\int \varDelta\, d\varphi$ des zugehörigen Laststreifens und die Polweite gleich »Eins« gemacht wird. Wählt man die Polweite gleich dem Nennerwerte, so geben die Ordinaten der erhaltenen Biegefläche unmittelbar die X an. Die Biegelinie ist dann Einflußlinie der X.*

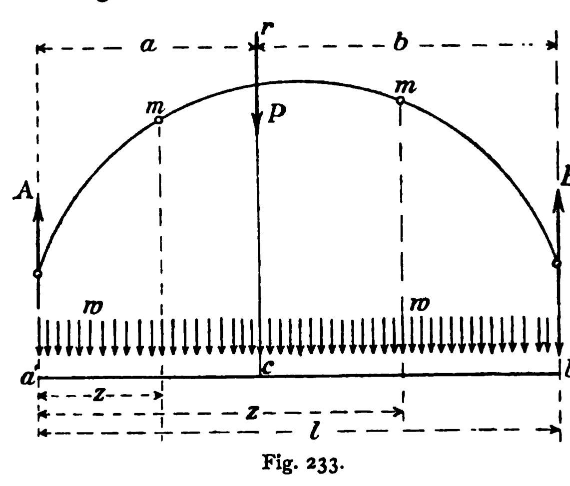


Fig. 233.

Was hier für die erste Elastizitätsgleichung nachgewiesen worden ist, gilt sinngemäß auch für die beiden andern, wenn man X mit Y oder Z und w_x mit w_y oder w_z vertauscht.

2. Man kann die Bedeutung der Zähler und seiner w-Größen auch auf rein analytischem Wege veranschaulichen.

Mit Bezug auf Fig. 233 möge bedeuten:

a und b: Abstände der in r angreifenden wandernden Einzellast P von den Stützenlotrechten;

z: Abstand eines durch m gelegten lotrechten Schnittes.

Dann ist eine der Zählergrößen $\int M_{am} \cdot w$ wie folgt auszudrücken:

Für die Balkenstrecke $a'c'$ ist $M_{am} = Az = P\frac{b}{l}z$,

- - - $b'c'$ - $M_{am} = B(l-z) = P\frac{a}{l}(l-z)$.

Daraus

$$\int_0^l M_{am} \cdot w = P\left[\frac{b}{l}\int_0^a z \cdot w + \frac{a}{l}\int_0^l (l-z)w\right]. \qquad (253)$$

Der in der eckigen Klammer stehende Summenwert bedeutet, wie nachzuweisen ist, *das Balkenmoment M_w aller Kräfte w, bezogen auf den Angriffspunkt r der wandernden Einzellast P.* Denn es ist

$$M_w = \int_0^a B \cdot b + \int_a^l A \cdot a\,,$$

worin

$$B = \frac{w \cdot z}{l} \quad \text{und} \quad A = \frac{w(l-z)}{l}$$

einzusetzen ist. Das gibt

$$M_w = \left[\frac{b}{l}\int_0^a z \cdot w + \frac{a}{l}\int_a^l (l-z)\,w\right]$$

oder

$$\int_0^l M_{am} \cdot w = M_w\,,$$

wenn unter M_w das Balkenmoment aller w-Kräfte in Beziehung auf den Angriffspunkt der wandernden Einzellast verstanden wird.

Man sieht, wie danach die Einflußlinien der überzähligen Größen Momentenlinien vorstellen, die mit Hilfe je eines Kraftecks der elastischen Kräfte w_x, w_y, w_z zu zeichnen sind, dessen Polweite gleich dem Nennerwerte der betreffenden Elastizitätsgleichung (251) *gemacht wird.* Vgl. dazu das gleiche Verfahren bei der Berechnung des Bogenträgers mit Kämpfergelenken unter § 7.

b. Bedingungen für die Lage des Koordinatenursprunges. Die drei Gleichungen (245)

$$\int x \cdot w_z = 0\,, \quad \int y \cdot w_z = 0\,, \quad \int x \cdot y \cdot w_z = 0\,,$$

mit deren Hilfe die Lage des Ursprunges O festgelegt wird, bedeuten *das Verschwinden von je einer Verschiebung des Punktes O, wenn dieser*

durch eine Scheibe mit dem Bogen verbunden gedacht wird (vgl. die Aufgabe 47 unter **36**, b). Danach können die Gleichungen in der Form geschrieben werden:

$$\bar{1} \cdot \delta_{xz} = 0\,; \quad \bar{1} \cdot \delta_{yz} = 0\,; \quad \bar{1} \cdot \delta_{xy} = 0\,,$$

wenn x, y, z die Angriffspunkte von X, Y, Z bedeuten und die Doppelzeiger xz, yz, xy die bekannte Bedeutung haben (**12**). Denn mit Hilfe der Arbeitsgleichung Mohrs ist unmittelbar anzuschreiben

$$\begin{aligned}
\bar{1} \cdot \delta_{xz} &= \int \bar{M}_x \cdot \Delta\, d\varphi_z = \int 1 \cdot y \cdot \frac{1 \cdot du}{EJ} = \int y w_z = 0\,, \\
\bar{1} \cdot \delta_{yz} &= \int \bar{M}_y \cdot \Delta\, d\varphi_z = \int 1 \cdot x \cdot \frac{1 \cdot du}{EJ} = \int x w_z = 0\,, \qquad (254) \\
\bar{1} \cdot \delta_{xy} &= \int \bar{M}_x \cdot \Delta\, d\varphi_y = \int 1 \cdot y \cdot x \cdot \frac{du}{EJ} = \int x \cdot y \cdot w_z = 0\,.
\end{aligned}$$

Statisch ausgedrückt heißt das soviel als der Schwerpunkt $O(xy)$ des Achsensystems ruht unter dem Angriffe der überzähligen Größen je für einen Zustand »$X = -1$«, »$Y = -1$« und »$Z = -1$« des Hauptsystems. Es ist gleich, ob man dabei das Hauptsystem, wie es hier geschehen ist, als einen in *a und b* gestützten, oder (wie in Aufgabe 47 unter **36**, b) als einen in *a oder b* eingespannten Balkenträger betrachtet. Der Unterschied bei der Berechnung der genannten beiden Hauptsysteme besteht nur darin, daß bei jenem die Einflußlinien der überzähligen Größen in *a und b* Nullpunkte erhalten, während bei diesem dort nur ein Nullpunkt in *a oder b* vorhanden ist (vgl. die Aufgaben unter **45** und **47**).

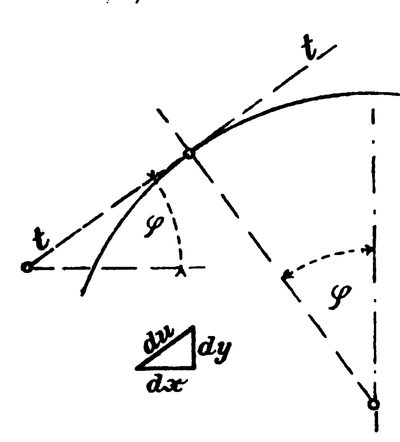


Fig. 234.

43. Berechnung der Summengrößen der Elastizitätsgleichungen.

a. Anwendung der Simpson-Regel.

1. Für praktische Aufgaben genügt es, wenn man die Integration des Zählers und Nenners der Elastizitätsgleichungen mit Hilfe der Simpson-Regel ausführt, von welcher nur wenige (etwa 3 bis 4 Glieder) genommen zu werden brauchen. Um dabei das du der w-Größen auszuscheiden, empfiehlt es sich den Winkel φ einzuführen, den die bogenrecht (radial) durch m geführte Querschnittlinie mit der Lotrechten einschließt. Es

ist dann in jedem Punkte m der Winkel, den die Tangente tt an die Bogenachse mit der Wagerechten einschließt, gleich φ, also

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

wenn dx die wagerechte Projektion von du vorstellt.

Dividiert man darauf Zähler und Nenner der Gl. (250) durch dx, wodurch diese ihren Wert nicht ändern, so ist anzuschreiben

$$\begin{aligned} w_x &= y\frac{du}{J} = \frac{y\,dx}{J\cos\varphi}, \\ w_y &= x\frac{du}{J} = \frac{x\,dx}{J\cos\varphi}, \\ w_z &= \frac{du}{J} = \frac{dx}{J\cos\varphi}. \end{aligned} \tag{255}$$

Das Integrationsverfahren vollzieht sich jetzt wie folgt: Man nimmt auf der Bogenachse eine *endliche* Zahl von Punkten m an, legt diese aber derart, daß möglichst viele aufeinander folgende Bogenstrecken $\varDelta u$ (Fig. 234) von Lotrechten begrenzt werden, deren wagerechte Abstände $\varDelta x$ gleich groß ausfallen. In der Fig. 235 sind z. B. bis zum Bogenscheitel sechs *endliche* du-Strecken gezeichnet, die von sieben m-Punkten (0, 1, 2 bis 6) begrenzt werden. Für jeden m-Querschnitt berechne man jetzt zuerst die w-Kräfte. Wie das geschehen kann, ist in der folgenden Tabelle 31 (für einen *symmetrischen* Bogen) angegeben.

Zur Tabelle 31 ist folgendes zu bemerken: Die Berechnung der grundlegenden w_z-Kräfte wird in den Spalten 1 bis 5 durchgeführt. d ist die Bogenstärke in einem m-Punkte. Es ist zu raten die Winkel φ zu berechnen, entweder aus

$$\sin\varphi = \frac{x}{r},$$

wenn $r = \overline{mc}$ und c in der Y-Achse liegt, oder aus andern geometrischen Beziehungen.

2. In der Spalte 6 sind die W_z-Kräfte berechnet, wozu *eine gewisse Zahl* von angrenzenden w_z-Kräften in die Simpson-Regel einzustellen ist. In praktischen Fällen genügen dazu zwei w_z-Kräfte, von denen eine links, die andere rechts von dem zu berechnenden

$$W_z = \int_m^{m+2} w_z$$

Tabelle 31. Zur Berechnung der Summengrößen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Punkt m	Abzisse x	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos\varphi}$	$J = \frac{1}{12} d^3$	$w_s =$ *** $\frac{1}{J\cos\varphi}$	$W_s = \sum_{m}^{m+2} w_s$	Ordinate y'	Ordinate y	$W_x = \sum y w_s$	$W_y = \sum x w_s$	$W_{xy} = \sum x y w_s$	$y W_x = \sum y w_x$	$x W_y = \sum x w_y$	Bemerkungen
0*													* Für den symmetrischen Bogen ist hier in Spalte 6 nur $\frac{1}{2} w_s$ zu rechnen.
1													*** Das unveränderte E hebt sich durch die Division von Zähler durch Nenner.
2													
3													
4													
5													
6**													
** Die in die Stützenlotrechten fallenden w-Kräfte können bei der *Darstellung der Einflußlinien* fortfallen.				$\frac{1}{2}\int_0^l w_s$		$\int^{\dagger} =$		0	0	0	† Bedingungsgleichungen für die Lage von O.		

Fig. 235.

liegt. Dann erhält man im vorliegenden Falle (Fig. 235)

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} W_{z0} &= \frac{n}{2 \cdot 3}(w_{z1} + w_{z1} + 4 w_{z0}), \\
W_{z1} &= \frac{n}{2 \cdot 3}(w_{z0} + w_{z2} + 4 w_{z1}), \\
W_{z2} &= \frac{n}{2 \cdot 3}(w_{z1} + w_{z3} + 4 w_{z2}), \\
W_{z3} &= \frac{n}{2 \cdot 3}(w_{z2} + 2 \cdot w_{z3}) + \frac{n'}{2 \cdot 3}(w_{z4} + 2 \cdot w_{z3}), \\
W_{z4} &= \frac{n'}{2 \cdot 3}(w_{z3} + w_{z5} + 4 w_{z4}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tfrac{1}{2} W_{z6} &= \frac{n'}{2 \cdot 3}(w_{z5} + w_{z5} + 4 w_{z6}).
\end{aligned}
\tag{256}
$$

b. Festlegen des Koordinatensystems und Nachprüfungen

Wenn die Rechnung bis zur Spalte 7 vorgeschritten ist, braucht man die Ordinaten y' (Fig. 235), um den Ursprung O des Achsenkreuzes festzulegen. Man erhält dann aus Gl. (248) den Abstand t der X-Achse von der zu ihr parallelen Geraden gg

$$
t = \frac{\int y' w}{\int w} = \frac{\int_0^l y' W_z}{\int_0^l W_z}.
$$

Damit sind auch die y der Spalte 8 und die Summengrößen der Spalten 9—13 gegeben.

Die W_z-Größen bilden die Grundlage zur Berechnung der in den Spalten 9—12 aufgeführten Größen. Es ist zu beachten, daß ein W_z die Mittelkraft einer gewissen Reihe von w_z vorstellt. Daher muß bei der *Nachprüfung* der in den Spalten 9, 10 und 11 enthaltenen Summen

$$
\begin{aligned}
\int x \cdot w_z &= \sum x \cdot W_z = 0, \\
\int y \cdot w_z &= \sum y \cdot W_z = 0, \\
\int xy \cdot w_z &= \sum xy \cdot W_z = 0
\end{aligned}
\tag{257}
$$

gefunden werden, wobei auf die verschiedenen Vorzeichen von x, y in den Quadranten des Achsenkreuzes zu achten ist. Jedenfalls muß sich auch

$$
\int_0^l w_z = \int_0^l W_z
$$

ergeben. Sonst sind die Einzelwerte von W_z entsprechend *auszugleichen*, ehe die Berechnung oder Darstellung der überzähligen Größen beginnen kann. Auch ist zu raten, die Integration aller w_z für eine Bogenhälfte durch Einstellen *sämtlicher* w_z der m-Punkte (von 0 bis 6) in die SIMPSON-Regel nachzuprüfen und danach die Einzelwerte auszugleichen.

Vgl. die Zahlenbeispiele der Aufgaben (unter **45**, **47**, **50**).

44. Darstellung der Einflußflächen der überzähligen Größen und der Randspannungen.

a. Die überzähligen Größen. Im Hinblick auf die ausführlich dargelegte Bedeutung der w-Größen im Zähler und Nenner der Elastizitätsgleichungen schreiben wir diese (für $P = 1$ und $H_w = 1$) jetzt in der Form

$$X = \frac{1 \cdot \delta_{rx}}{\cos\beta \int y w_x}, \quad Y = \frac{1 \cdot \delta_{ry}}{\int x \cdot w_y}, \quad Z = \frac{1 \cdot \delta_{rz}}{\int w_z}. \tag{258}$$

Für eine Polweite »Eins« des zugehörigen Kraftecks der w erhält man δ_{rx}, δ_{ry}, δ_{rz} unmittelbar aus der betreffenden Biegefläche, die also gleichzeitig Einflußfläche der zugehörigen überzähligen Größe ist. Wir wollen aber zuerst die Einflußflächen mit einem beliebigen Pole H_w gezeichnet denken und für X, Y, Z die drei Polweiten H_{wx}, H_{wy}, H_{wz} unterscheiden (Fig. 236—239).

In den Fig. 236—239 sind die drei Einflußflächen für einen unsymmetrischen Bogen dargestellt. Jedoch sind nur die *Seilecke* gezeichnet, die *maßgebenden Seillinien* sind fortgelassen worden.

1. *Die X-Fläche.* Oberhalb und unterhalb der X-Achse haben die y_{wx} verschiedene Vorzeichen. Es muß aber die Summe der positiven w_x gleich derjenigen der negativen w_x sein, weil die Gesamtsumme

$$\int y w_z = \int w_x = 0$$

ist. Danach ist das Krafteck der Fig. 237 aufgetragen. Seine Polweite H_{wx} ist gleich dem Nennerwert von X gemacht worden, d. h.

$$H_{wx} = \cos\beta \int y w_x = \text{»Eins«}.$$

Bezeichnet man die Höhen der X-Fläche mit η_x, so ergibt sich

$$X = + \eta_x. \tag{259}$$

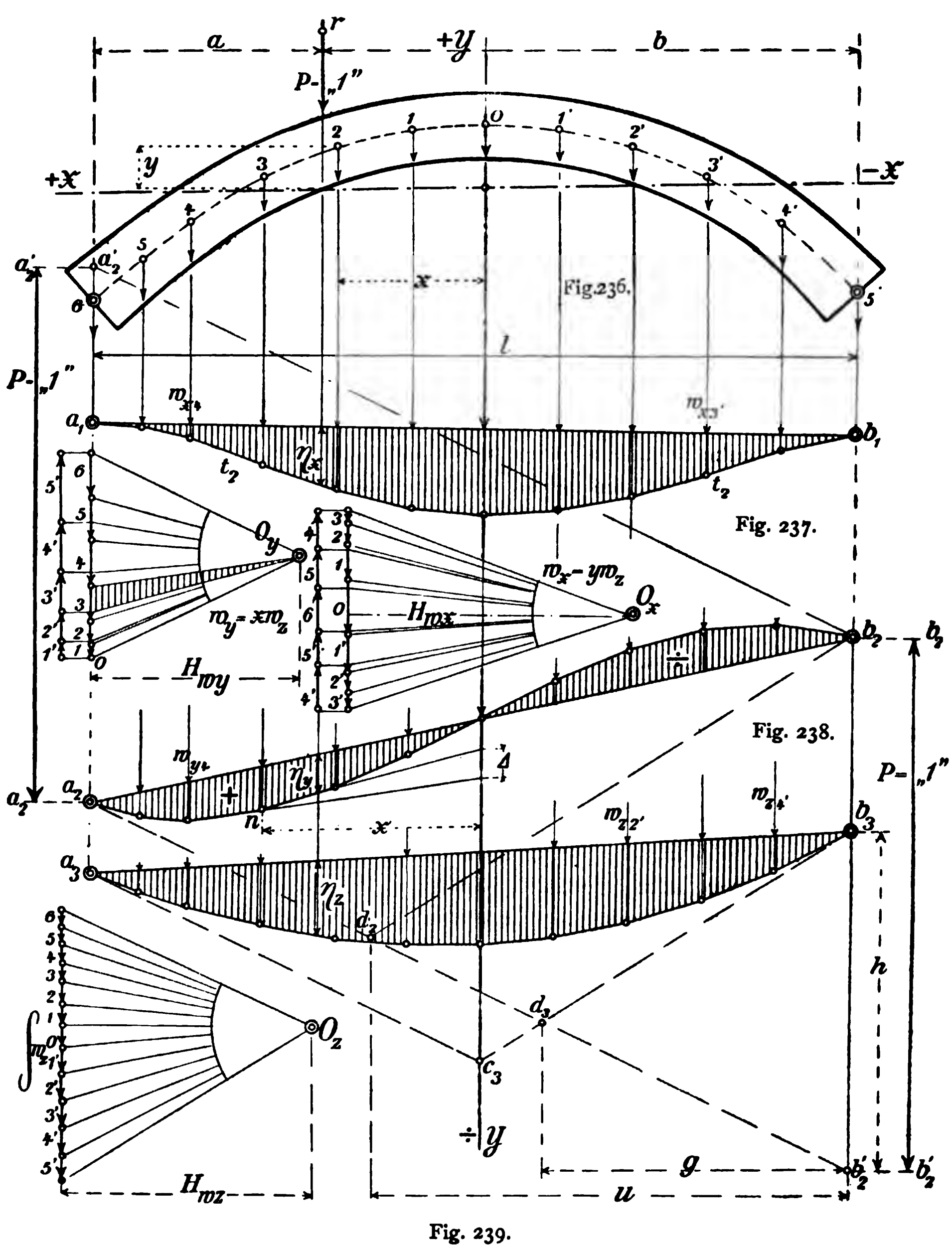


Fig. 239.

Die Biegelinie der X-Fläche besitzt in der Nähe von a_1 und b_1 je einen *Wendepunkt* (t_2), der lotrecht unter dem Schnittpunkt der Bogenachse mit der X-Achse zu liegen kommt.

2. *Die Y-Fläche.* Weil die x diesseits und jenseits der Y-Achse verschiedene Vorzeichen aufweisen, so zerfällt die Y-Fläche in zwei Teile, von denen derjenige links positive, der andere negative η_y besitzt (Fig. 238). Wir wählen H_{wy} beliebig, und verlängern die in a_2 und b_2 anstoßenden äußern Seileckseiten, bis sie die Stützenlotrechten A und B in den Punkten a'_2 und b'_2 schneiden. Nimmt man dann die Länge der Strecke $a_2 a'_2 = b_2 b'_2$ *als Grundmaß der »Einheit«* einer Verschiebung δ_{ry}, so erhält man

$$Y = \pm\, \eta_y\,,$$

was noch zn beweisen sein wird.

Man ziehe in einem Punkte n der Biegelinie (Seillinie) der Fig. 238 je eine Parallele zu den beiden Krafteckstrahlen, die das zugehörige w_y begrenzen. Die beiden Parallelen schneiden auf der Y-Achse eine Strecke Δ ab. Dann ist anzuschreiben

$$\frac{w_y}{H_{wy}} = \frac{\Delta}{x}\,,$$

wenn x die Abzisse des Punktes n vorstellt. Daraus folgt

$$\int \Delta = \text{»Eins«} = \frac{\int x w_y}{H_{wy}}$$

und

$$Y = \frac{1 \cdot \delta_{xy} \cdot H_{wy}}{\int x w_y} = 1 \cdot \delta_{xy} = \eta_y\,.$$

3. *Die Z-Fläche.* Die w_z sind alle positiv. Um die η aller drei Einflußflächen nach gleichem Maßstabe (mit Hilfe der Grundstrecke »Eins«) abgreifen zu können, lege man die in a_3 anstoßende Seileckseite (Fig. 239) *parallel* zur Seileckseite $a_2 b'_2$ (Fig. 238) und führe die in b_3 mündende Seileckseite $b_3 a'_3$ durch den Punkt c_3 der Y-Achse, die bekanntlich Schwerachse aller w_z ist. Man ziehe noch $\overline{b_2 d_2}$ parallel zur $\overline{b_3 c_3}$. Bezeichnet man dann den wagerechten Abstand des Punktes d_2 von b_3 mit u und des Punktes d_3 mit g, ferner die Strecke $b_3—b'_2$ mit h, so ist anzuschreiben

$$\frac{g}{h} = \frac{u}{\text{»Eins«}}\,.$$

Ferner

$$Z = \frac{1 \cdot \delta_{kz}}{\int w_z} = \frac{1 \cdot \eta_3 \cdot H_{wz}}{\int w_z} = \frac{1 \cdot \eta_z \cdot g}{h}$$

oder

$$Z = u \eta_z\,. \tag{260}$$

4. Weil die Strecken $\overline{a_2 a_2'}$ und $\overline{b_2 b_2'}$ der Stützenlotrechten gleich »Eins« sind, so stellen die Geraden $a_2 b_2'$ und $b_2 d_2$ *Einflußlinien der Balkenstützenkräfte* A und B dar. Zu beachten bleibt, daß in jeder Einflußfläche die äußersten Seileckseiten sich auf der Y-Achse schneiden. Man kann also die Lage der Y-Achse von vornherein auch *graphisch* festlegen. Eine analytische Nachprüfung ist zu raten. Auch die Lage des Ursprunges O ist graphisch zu finden, wenn man die W_s in beliebiger Richtung angreifen läßt und in bekannter Weise mit Hilfe von Kraft- und Seileck deren Schwerachse ermittelt, von welcher die Y-Achse in O geschnitten wird (I. **96**). Vgl. die Aufgabe 59 unter **45**.

b. Die Randspannungen (I. **104**, c, **110** und **111**).

1. Sobald man die Einflußlinie irgend einer Randspannung gezeichnet hat, kann man nachprüfen, ob die vorläufig (nach II. **44**, **45**, **49**) gewählten Stärken des Bogens ausreichende Sicherheit bieten (II. **45**, b). Eine Randspannung berechnet sich (nach I. **107**) mit

$$\sigma = \frac{L}{F}\left(1 + \frac{v}{k}\right),$$

wenn für das Verhältnis der Randfaserordinate zum Trägheitshalbmesser des betreffenden Querschnittes die *Kernweite* eingeführt und mit L die *Längskraft* bezeichnet wird, deren Abstand von der Schwerachse gleich v ist.

Im vorliegenden Falle braucht man bequemer die Beziehung

$$\sigma = \frac{M_k}{Fk}, \tag{261}$$

worin M_k das *Kernmoment* ist (I. **112** und II. **40**), denn eine Randspannung ist dann der Unveränderlichen Fk umgekehrt proportional. Ihre Einflußlinie ist daher gleich derjenigen des Kernmomentes, wenn der Multiplikator

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{Fk} = \frac{1}{W}$$

gesetzt wird. M_k ist aus M_m abzuleiten (Fig. 240).

2. Sind (Y) und (X) die zugeordneten Achsen eines Bogenquerschnittes, so liegt die Nulllinie parallel zur (X)-Achse und die den Querschnittumriß berührenden Parallelen zur Nulllinie geben die Berührungspunkte o und u, in denen die größten Randspannungen auftreten.

Sind o_k und u_k die in der Kraftlinie $(Y)(Y)$ liegenden Kernpunkte und heißen die zugehörigen Kernweiten k_o und k_u, so ist

$$\sigma_o = \frac{M_{ko}}{Fk_o},$$

$$\sigma_u = \frac{M_{ku}}{Fk_u}.$$

Es sind daher in jedem Querschnitte zwei Einflußlinien der Randspannungen zu beachten, von denen die eine der M_{ko}-, die andere der M_{ku}-Linie entspricht. Man kann verschiedene Wege einschlagen, um die M_k-Flächen darzustellen.

c. Die Einflußflächen der Kernmomente.

1. Man kann beide Kernmomente eines Querschnittes entweder *unmittelbar* oder mit Hilfe des zugehörigen Momentes M_m berechnen. Wenn man die unmittelbare Bestimmung wählt, so braucht man die M_m-Momente überhaupt nicht darzustellen. Man hat dann durch jeden

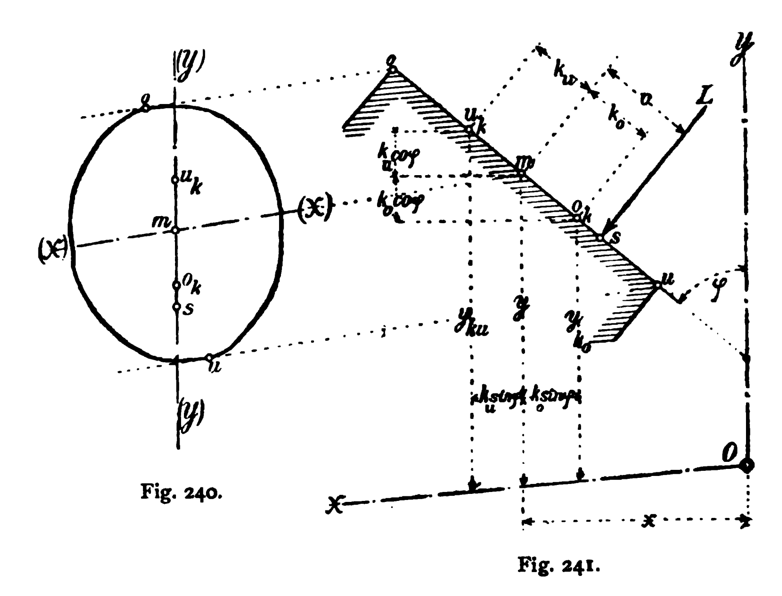


Fig. 240.

Fig. 241.

der beiden Kernpunkte k_o und k_u (Fig. 241) einen lorrechten Schnitt zu legen und dafür die M_k-Gleichungen anzuschreiben. An Stelle des Momentes M_{am} treten dabei die Momente

$$M_{ak_u} \quad \text{und} \quad M_{ak_o},$$

an Stelle von y und x

$$y_{ku} \quad \text{und} \quad y_{ko}$$

$$x_{ku} \quad \text{"} \quad x_{ko}.$$

Das gibt allgemein

$$M_{ko} = M_{ak_o} - X\cos\beta\,(y_{ko}) - Y(x_{ko}) - Z\,,$$

$$M_{ku} = M_{ak_u} - X\cos\beta\,(y_{ku}) - Y(x_{ku}) - Z\,,$$

oder mit Bezug auf die Fig. 241

$$M_{k_o} = M_{ak_o} - X\cos\beta\,(y - k_o\cos\varphi) - Y(x - k_o\sin\varphi) - Z$$
$$M_{k_u} = M_{ak_u} - X\cos\beta\,(y + k_u\cos\varphi) - Y(x + k_u\sin\varphi) - Z.$$

2. Will man eine M_k-Fläche *mittelbar* aus der M_m-Fläche ableiten, so hat man die Beziehungen

$$M_m = \pm L \cdot v$$

und
$$M_k = \pm L(v \mp k)$$

zu vereinigen. Daraus folgt

$$M_k = M_m\left(1 \mp \frac{k}{v}\right).$$

Die *genaue* Bestimmung von v ist aber etwas umständlich. Sie geschieht am besten mit Hilfe einer *Mittelkraftlinie* (II. **36**). s sei der

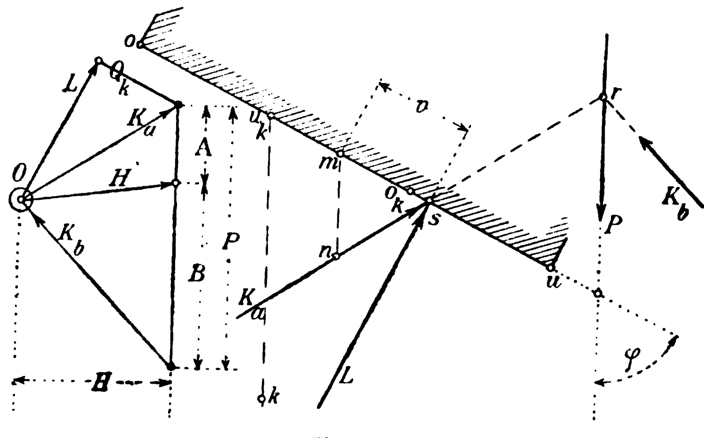


Fig. 242.

Stützpunkt, in welchem die Querschnittsfuge des rechten Bogenteiles von der Kämpferkraft K_a getroffen wird. Dann ist (Fig. 242)

$$v = \overline{ms}.$$

Die Strecke $\overline{ms}$ kann aber erst dargestellt werden, nachdem die Angriffspunkte von K_a und K_b und dazu H', A und B ermittelt worden sind. Das Nähere hierüber vgl. unter **48**, b.

3. Wenn man *angenähert* annimmt, daß die äußern Kräfte vom lotrechten Schnitte aus sich bogenrecht (radial) auf den Querschnitt übertragen, so darf man die Strecken $\overline{nm}$ und $\overline{sm}$ gleich groß setzen. Dann ist auch das Kernmoment für beide Schnitte gleichwertig und infolgedessen ist der Abstand $\overline{mk}$ im lotrechten Schnitte gleich der entsprechenden Kernweite des Querschnittes.

Für ein *symmetrisches* Steingewölbe erhält man danach

$$M_k = M_{am} - Xy_k - Yx - Z.$$

Weil nun in diesem Falle

$$y_k = y \pm k = y \pm \frac{d}{6}$$

ist, so erhält man

$$M_k = M_m \pm X\frac{d}{6} \tag{262}$$

je nachdem der eine oder andere der Kernpunkte in Frage kommt.

Das gibt angenähert

$$M_{ko} + M_{ku} = 2M_m. \tag{263}$$

Alles übrige ist aus dem folgenden Zahlenbeispiele zu entnehmen.

45. Zahlenbeispiel zum Momentenverfahren (Fig. 243).

Aufgabe 59. *Das Bruchsteingewölbe einer städtischen Straßenbrücke ist nach seiner Form und Stärke mit Hilfe des im 2. Bande* (unter § 8) *gegebenen Näherungsverfahrens vorläufig berechnet worden. Die erhaltenen Abmessungen und die Form der Bogenachse sollen durch Elastizitätsberechnungen nachgeprüft werden*[1].

Die Grundmaße des in der Fig. 243 dargestellten symmetrischen Bogens sind

Stützweite $l = 18$ m; *Pfeilhöhe* $f = 2{,}25$ m;
Bogenstärken: im Scheitel 0,80 m, im Kämpfer 1,10 m;
Höhe der Straßenkrone über dem Bogenscheitel 0,60 m;
Längsgefälle der Straße 1 : 80;
Straßenbahn: Holzpflaster auf Beton; Fußwege: Granit.
Gewichte für 1 cbm: Gewölbe $2{,}0\,\frac{\text{t}}{\text{cm}^3}$; Beton $1{,}8\,\frac{\text{t}}{\text{cm}^3}$;
Verkehrslast: $450\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$.

Der größte *Druck* darf im Gewölbe 30 atm nicht übersteigen; *Zug* wird nicht zugelassen.

a. Darstellung der überzähligen Größen.

1. *Berechnung der elastischen w-Kräfte.* Es sind 10 Punkte m in der Bogenachse angenommen (0 bis 10). Für die ersten sechs Δu-Strecken isl Δx gleich 1 m gemacht. Die übrigen vier Δx-Strecken sind alle gleich 0,818 m (Tabelle 32). Darauf wurden für eine Bogenhälfte die Werte von $\frac{1}{\cos\varphi}$, J und y' berechnet.

---

[1] Vgl.: *Ermittelung der Spannungen in steinernen Brücken nach der Elastizitätstheorie.* Nach den Vorträgen des Verfassers bearbeitet. 1901. S. 56. Die dort gegebenen Zahlen sind hier an einigen Stellen berichtigt worden.

Die überzähligen Größen wurden hier X_a, X_b, X_c genannt, so daß

$$\begin{aligned} X_a &= Y = \frac{1 \cdot \eta_a \cdot H_{wa}}{\int x w_a}, \\ X_b &= Z = \frac{1 \cdot \eta_b \cdot H_{wb}}{\int w_b}, \\ X_c &= X = \frac{1 \cdot \eta_c \cdot H_{wc}}{\int y \cdot w_c}. \end{aligned} \tag{264}$$

Dabei ist nach Gl. (250) und (255)

$$w_a = x w_b\,; \quad w_c = y \cdot w_b\,; \quad w_b = \frac{1}{J \cos \varphi}.$$

Die kleinen w und großen W wurden der Reihe nach so berechnet, wie es die Tabelle 32 angibt.

Wie früher gesagt (**42**, b), empfiehlt es sich, die $\sum w_b$ und $\sum W_b$ nachzuprüfen. Es ist

$$\sum_a^c w_b = \left[\frac{1{,}00}{3}\left(w_{b0} + 4 w_{b1} + 2 w_{b2} + 4 w_{b3} + 2 w_{b4} + 4 w_{b5} + w_{b5}\right) + \frac{0{,}818}{3}\left(w_{b6} + 4 w_{b7} + 2 w_{b8} + 4 w_{b9} + w_{b10}\right)\right]$$

und

$$\sum_0^c W_b = W_{b0} + W_{b1} + \cdots + W_{b10}.$$

Bei Abweichungen zwischen $\sum w$ und $\sum W$ von mehr als ein Hundertstel muß die Fehlerursache aufgesucht und die Reihe der w und W ausgeglichen werden.

2. *Die Lage des Koordinaten-Ursprunges* folgt jetzt, nach der Gl. (248), mit

$$t = \frac{\sum_a^c y' w_b}{\sum_a^c w_b} = 1{,}588 \text{ m}.$$

Damit sind die Ordinaten y, sowie dann auch alle w_c und W_c gegeben, wobei für den *halben Bogen*

$$\sum_a^b w_c = \sum_a^b W_c = 0$$

werden muß.

Tabelle 32. Berechnung der elastischen w-Kräfte.

Punkt	x m	d cm	$\frac{1}{\cos\varphi}$	J m^4	y' m	$w_b = \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{\cos\varphi}$	W_b-Kräfte	$y' w_b$	$y = y' - t$	$w_c = y \cdot w_b$	W_c-Kräfte	$w_a = x \cdot w_b$	W_a-Kräfte
0	0,00	80,0	1,000	0,042 666	2,164	23,44	11,38	50,72	+ 0,576	+ 13,50	+ 6,53	0,00	3,58
1	1,00	82,4	1,001	0,046 623	2,140	21,45	21,47	45,88	+ 0,552	+ 11,83	+ 11,76	21,45	19,89
2	2,00	84,8	1,005	0,050 817	2,067	19,76	19,76	40,81	+ 0,470	+ 8,83	+ 9,09	39,52	37,06
3	3,00	87,2	1,011	0,055 254	1,948	18,28	18,30	35,65	+ 0,360	+ 6,58	+ 6,44	54,84	52,06
4	4,00	89,5	1,019	0,059 543	1,758	17,12	17,09	29,94	+ 0,170	+ 2,92	+ 2,87	68,48	64,60
5	5,00	91,8	1,030	0,064 468	1,535	15,97	15,98	24,50	− 0,053	− 0,85	− 0,84	79,85	95,16
6	6,00	94,2	1,044	0,069 658	1,282	15,01	13,64	19,23	− 0,306	− 4,61	− 3,95	90,06	76,32
7	6,818	97,0	1,057	0,076 056	1,017	13,92	11,31	14,13	− 0,571	− 7,94	− 6,34	94,91	72,46
8	7,636	101,3	1,074	0,086 625	0,719	12,42	9,98	8,92	− 0,769	− 10,80	− 8,67	94,98	72,63
9	8,454	105,6	1,093	0,098 131	0,380	11,15	9,13	4,22	− 1,208	− 13,42	− 10,78	94,26	72,55
10	9,272	110,0	1,116	0,110 917	0,000	10,06	4,26	0,00	− 1,588	− 15,98	− 6,11	93,27	35,93
					$\sum = 20{,}945$	$\sum_a^c = 152{,}30$	$\sum = 152{,}30$			$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\sum_a^c = 582{,}24$	$\sum = 582{,}24$

3. *Die Darstellung der Einflußflächen* für X_a, X_b, X_c wird im Hinblick auf die Erläuterungen zu **44**a allein durch die Fig. 244—246 verständlich sein.

Die »Einheit« einer W-Kraft ist, um große y und passende Polweiten zu erhalten, für jede der drei Flächen verschieden angenommen worden.

Die *Bogenkraft*- oder M_{wc}-Fläche ist der Raumverteilung der Figuren wegen oben angestellt. Es ist nach Gl. (264)

$$X_c = H = \frac{1 \cdot \eta_c \cdot H_{wc}}{\sum y \cdot W_c}.$$

Die $\sum y W_c$ ist aus der Tabelle 32 zu entnehmen. Sie ist in der Fig. 243 auch graphisch ermittelt worden, wobei die W_c-Kräfte wagerecht wirkten. Das gab

$$\tfrac{1}{2} \sum y W_c = n_c \cdot H_{wc}$$

und

$$X_c = H = \frac{1 \cdot \eta_c}{2 n_c}, \tag{265}$$

wobei die Polweite H_{wc} beliebig groß gewählt werden kann. Sie wurde gleich 60 W_c-Einheiten gemacht.

Die X_b-Fläche ergiebt sich aus

$$X_b = \frac{1 \cdot \eta_b \cdot H_{wb}}{\sum W_b}.$$

Es wurde

$$H_{wb} = \tfrac{1}{2} \sum W_b$$

gemacht. Daraus folgt

$$X_b = \tfrac{1}{2} \eta_b. \tag{266}$$

Die X_a-Fläche wird durch

$$X_a = \frac{1 \cdot \eta_a \cdot H_{wa}}{\sum x \cdot W_a}$$

bestimmt.

Die Summengröße des Nenners erhält man mit

$$\sum x \cdot W_a = 2 n_a \cdot H_{wa},$$

wenn man durch Verlängerung der im Punkte 10 anstoßenden äußern Seileckseite auf der Y-Achse die Strecke n_a abschneidet (Fig. 245—246). Das gibt

$$X_a = \frac{1 \cdot \eta_a}{2 n_a}. \tag{267}$$

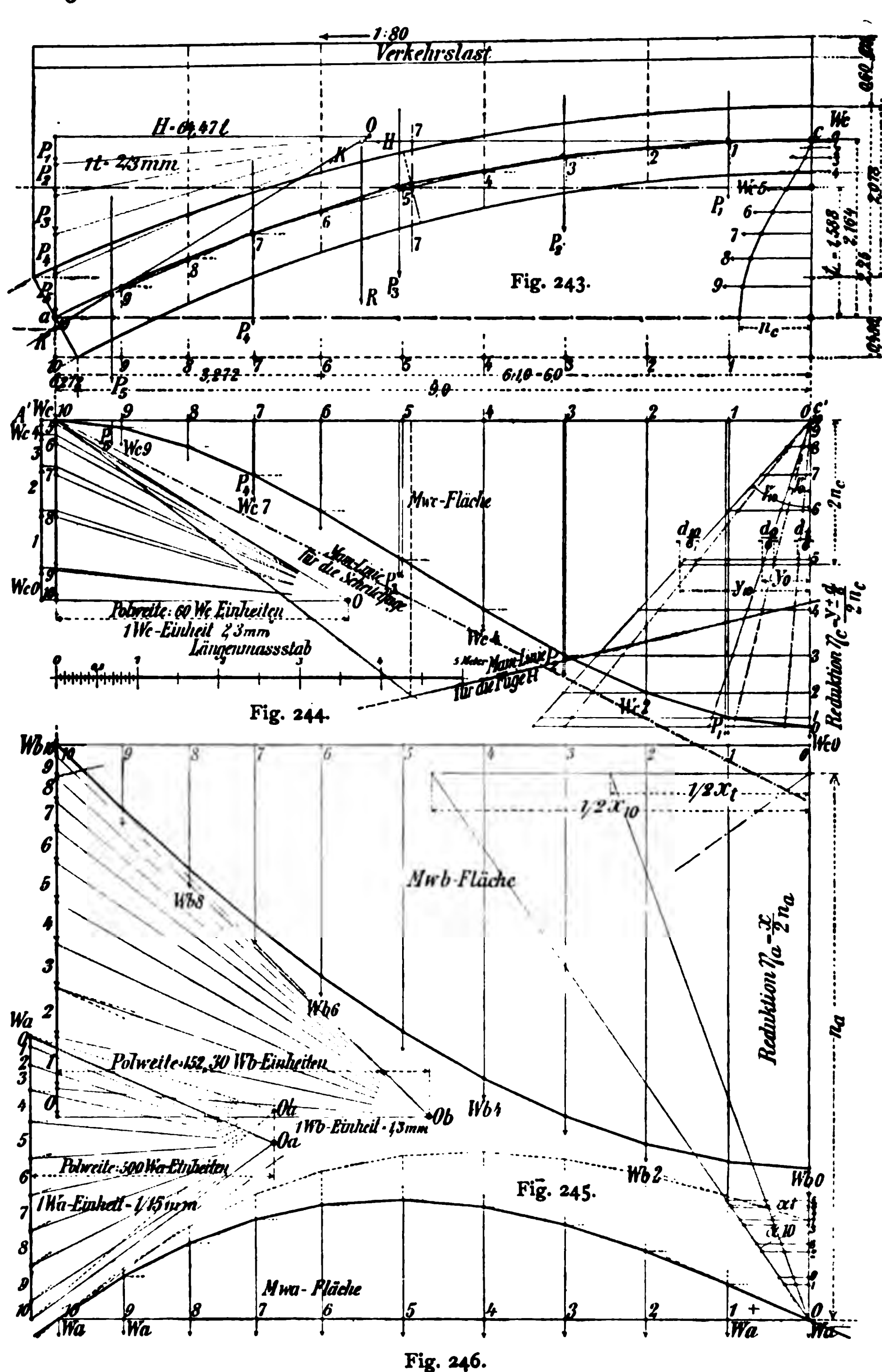


Fig. 243.

Fig. 244.

Fig. 245.

Fig. 246.

4. Die Größe einer Polweite ist aus der beliebig gewählten Einheit einer W-Kraft und der ebenfalls beliebig angenommenen Zahl der W-Einheiten einer Polweite zu berechnen. Danach sind alle Strecken, wie die η, sowie auch n_a und n_c *nach dem für die Stützweite gewählten Längenmaßstabe* abzugreifen.

b. Momente aus Eigengewicht und Verkehrslast.

1. Es werden folgende abgekürzte Bezeichnungen eingeführt:
Kernmomente: M_o und M_u;
Ordinaten der Einflußflächen M_a, M_m, M_c: η'_a, η'_m, η'_c.

Dann erhält man aus den Gl. (265—267)

$$\eta'_m = \eta_o - \left[\eta_a\left(\frac{x}{2\,n_a}\right) + \tfrac{1}{2}\eta_b + \eta_c\left(\frac{y}{2\,n_c}\right)\right]. \qquad (268)$$

Daraus

$$\eta'_o = \eta'_m + \eta_c\,\frac{d}{6},$$

$$\eta'_u = \eta'_m + \eta_c\,\frac{d}{6} \qquad (269)$$

und

$$\eta'_o + \eta'_u = 2\,\eta'_m .$$

Schreibt man

$$\eta'_m = \eta_o - [\eta_a \operatorname{tg}\alpha + \tfrac{1}{2}\eta_b + \eta_c \operatorname{tg}\gamma],$$

so ist darin

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{2\,n_a},$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{y \pm \frac{d}{2}}{2\,n_c}. \qquad (270)$$

In den Fig. 247—248 wurden für die Fugen im *Scheitel*, im *Kämpfer* und für die t—t-Fuge, deren m-Ordinate y = Null ist) die M_m-, M_o- und M_u-Fläche dargestellt. Die Unterlagen für die Momente aus dem Eigengewicht gibt die Tabelle 33.

In der 1. Spalte sind die Gewichte der einzelnen Laststreifen (II. § 8) angegeben. Deren Mittelkräfte sind in den Fig. 243 und 244 eingezeichnet. Die Ordinaten der Einflußflächen von M_o, M_m und M_u sind (wie schon erwähnt) mit η'_o, η'_m und η'_u bezeichnet. Sie sind aus den Gl. (268 u. 269) mit Hilfe der Tangentenwinkel α und γ berechnet (Fig. 244).

Der Klammerwert der Gl. (268) für η'_m ist mit E bezeichnet worden. So sind in der Fig. 247 drei E-Linien je für eine der betrachteten Fugen gezeichnet worden. Die drei η_o-Linien (für den Balken ab) sind zuerst dargestellt worden (Fig. 248). Sie sind (nach II. **5**, c) bekannt. Aus

$$\eta'_m = \eta_o - E$$

folgten die drei M_m-Linien.

Tabelle 33. Berechnung der Momente aus dem Eigengewicht.

1. Lasten	2. Kämpferfuge						3. t—t-Fuge						4. Scheitelfuge					
P-Kräfte t	η'_o m	η'_m m	η'_u m	M_o mt	M_m mt	M_u mt	η'_o	η'_m	η'_u	M_o	M_m	M_u	η'_o	η'_m	η'_u	M_o	M_m	M_u
P_5 = 10,63	−0,58	−0,60	−0,62	−6,165	− 6,378	− 6,591	+0,05	+0,03	+0,01	+0,532	+0,319	+0,106	−0,02	−0,04	−0,06	−0,213	−0,426	−0,638
P_4 = 7,63	−1,25	−1,325	−1,40	−9,538	−10,110	−10,682	+0,37	+0,32	+0,27	+2,823	+2,442	+2,060	−0,04	−0,095	−0,15	−0,305	−0,725	−1,145
P_3 = 7,31	−1,07	−1,25	−1,43	−7,822	− 9,138	−10,453	+1,08	+0,93	+0,78	+7,895	+6,798	+5,702	−0,07	−0,200	−0,33	−0,512	−1,462	−2,412
P_2 = 5,83	−0,19	−0,495	−0,80	−1,108	− 2,886	− 4,664	+0,44	−0,20	−0,04	+2,565	+1,166	−0,233	+0,12	−0,105	−0,33	+0,700	−0,612	−1,924
P_1 = 5,17	+0,82	+0,43	+0,04	+4,239	+ 2,223	+ 0,207	± 0	−0,29	−0,58	± 0	−1,500	−3,000	+0,65	+0,36	+0,07	+3,361	+1,862	+0,362
P'_1 = 5,17	+1,42	+1,03	+0,64	+7,341	+ 5,325	+ 3,309	−0,15	−0,45	−0,75	−0,776	−2,326	−3,878	+0,68	+0,36	+0,07	+3,361	+1,862	+0,362
P'_2 = 5,83	+1,42	+1,12	+0,82	+8,279	+ 6,530	+ 4,781	−0,14	−0,38	−0,62	−0,816	−2,215	−3,615	+0,12	−0,105	−0,33	+0,700	−0,612	−1,924
P'_3 = 7,31	+0,94	+0,77	+0,60	+6,871	+ 5,629	+ 4,386	−0,08	−0,23	−0,38	−0,585	−1,682	−2,778	−0,08	−0,21	−0,34	−0,585	−1,535	−2,485
P'_4 = 7,63	+0,41	+0,325	+0,24	+3,128	+ 2,480	+ 1,831	−0,04	−0,09	−0,14	−0,305	−0,687	−1,068	−0,04	−0,10	−0,16	−0,305	−0,763	−1,221
P'_5 = 10,63	+0,06	+0,04	+0,02	+0,638	+ 0,425	+ 0,213	−0,02	−0,03	−0,04	−0,213	−0,319	−0,425	−0,02	−0,035	−0,05	−0,213	−0,373	−0,532
				+5,863	− 5,900	−17,663				+11,120	−1,996	−7,129				+5,989	−2,784	−11,557

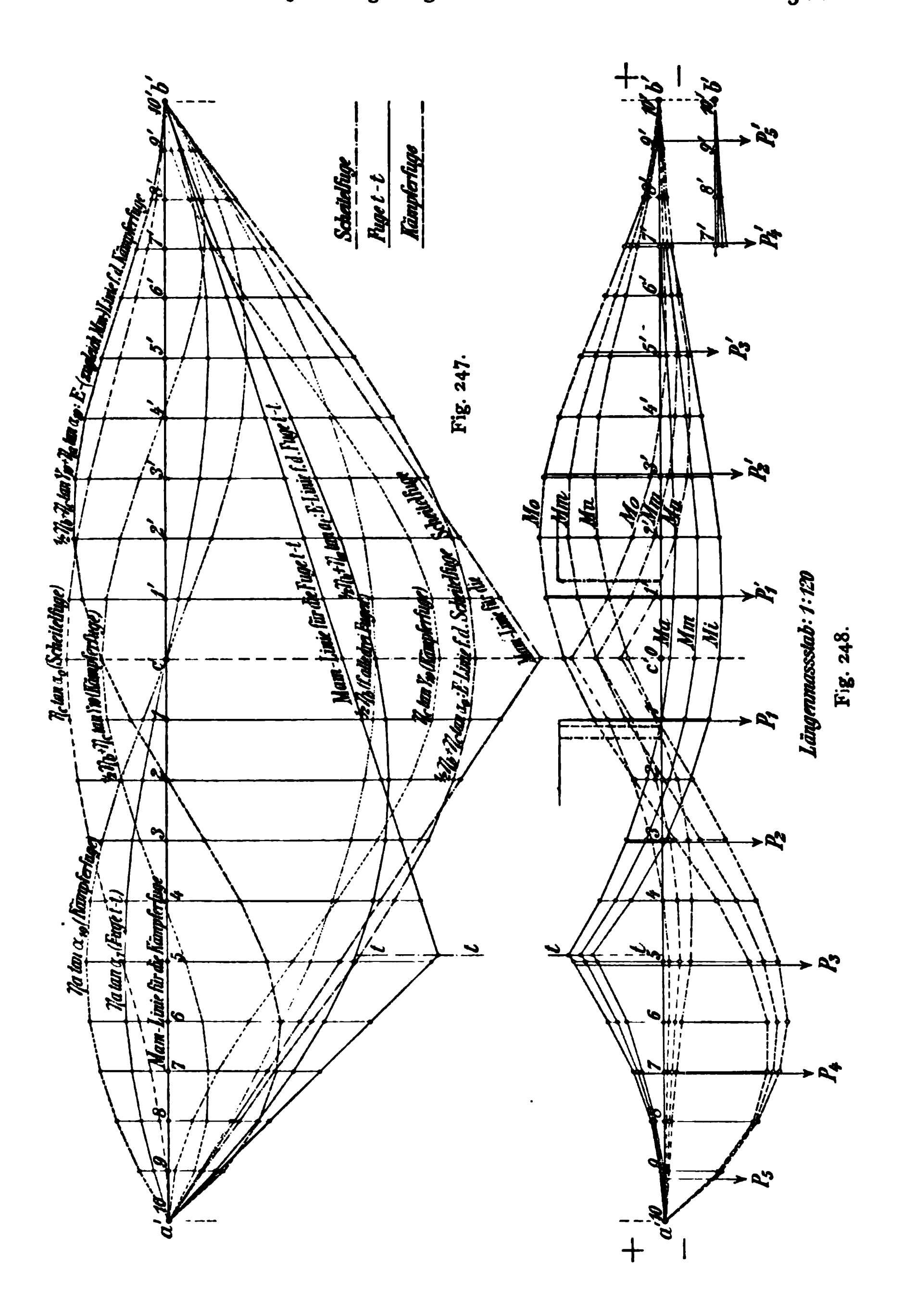


Fig. 247.

Fig. 248.

Darauf wurden die drei Linien der M_m, M_o und M_u (in Fig. 248) von einer Wagerechten $a'b'$ aufgetragen. Die M_o- und M_u-Linie sind zugleich Einflußlinien für σ_o und σ_u, wenn ihre Ordinaten mit

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{F \cdot k} = \frac{6}{d^2} \tag{271}$$

multipliziert werden.

Die Multiplikation der η' mit den betreffenden P-Werten des Eigengewichtes (P_1 bis P_5 und P_1' bis P_5') ist in der Tabelle 33 ausgeführt worden.

2. Die Unterlagen für die Berechnung der Momente aus der Gesamtbelastung liefert die Tabelle 34. Darin ist zwischen M_v und M_e, d. h. zwischen Moment aus der Verkehrslast $\left(p = 450 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$ und dem Eigengewicht unterschieden. In der Spalte 2 sind zuerst die positiven und negativen Teile der Einflußflächen (Fig. 247) angegeben und daraus sind durch Multiplikation mit $p = 0{,}45$ die Grenzwerte der Momente M_v berechnet worden. Die Werte der Momente M_e sind aus der Tabelle 33 zu entnehmen. In Spalte 3 sind die ungünstigsten Werte berechnet. Dazu ist zu bemerken:

Weil die für M_o und M_u aus der Gesamtlast berechneten Momente durchweg *verschiedene Vorzeichen haben, so muß die Längskraft L innerhalb des Kernes liegen.* Das heißt, sämtliche Randspannungen sind *Drücke.* Um daher die gefährlichste Lage der Verkehrslast zu finden (II. 6) *belaste man diejenigen Teile der Einflußfläche, welche den überhaupt größten Wert des Momentes* aus der Gesamtbelastung (Eigengewicht + Verkehrslast) ergeben. Z. B. findet man dann für die *Scheitel*fuge

$$\begin{aligned}
M_o &= + \ 5{,}989 + 1{,}526 = + \ 7{,}517\,, \\
M_o &= + \ 5{,}989 - 0{,}165 = - \ 5{,}824\,, \\
M_u &= - 11{,}557 - 1{,}468 = - 13{,}025\,, \\
M_u &= - 11{,}557 + 0{,}272 = - 11{,}285\,.
\end{aligned}$$

Der für die Randspannungen in der Scheitelfuge maßgebende größte Momentenwert ist also

$$M_u = 13{,}025$$

und erzeugt in der untern Randfaser einen entsprechend großen Druck usw.

c. Die Randspannungen. σ_o und σ_u sind zuerst aus der Gleichung

$$\sigma = \frac{M_k}{F \cdot k} = \frac{6 \cdot M_k}{10 d^2}$$

in atm berechnet worden, wobei

$$\frac{1\ \text{t}}{\text{m}^2} = \frac{1\ \text{kg}}{10\ \text{cm}^2}$$

zu setzen war. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 35 verzeichnet.

Tabelle 34. Berechnung der größten Momente aus der Gesamtlast.

1. Fuge	2. Verkehrslast.											
	Einflußfläche (m²)						Moment (mt)					
	M_o-Fläche		M_m-Fläche		M_u-Fläche		M_{o_v}		M_{m_v}		M_{u_v}	
Kämpferfuge	+ 10,055	− 5,427	+ 7,279	− 5,441	+ 4,710	− 6,620	+ 4,525	− 2,442	+ 3,276	− 2,448	+ 2,120	− 2,979
Fuge t—t	+ 3,536	− 0,848	+ 2,563	− 2,816	+ 1,956	− 5,117	+ 1,591	− 0,382	+ 1,153	− 1,267	+ 0,880	− 2,303
Scheitelfuge	+ 3,390	− 0,367	+ 2,822	− 1,485	+ 0,604	− 3,262	+ 1,526	− 0,165	+ 1,270	− 0,668	+ 0,272	+ 1,468

Tabelle 35. Berechnung der Spannungen und für die Proben.

Fuge	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	d	$\frac{d^2}{6}$	$\sigma_o = \frac{6M_o}{d^2} \cdot \frac{1}{10}$	$\sigma_u = \frac{6M_u}{d^2} \cdot \frac{1}{10}$	$M_m = \frac{M_o - M_u}{2}$	$\sigma_s = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2}$	$L = \frac{M_o + M_u}{d/3}$	$\sigma_m = \frac{L}{d} \cdot \frac{1}{10}$	$v = \frac{a}{6} \cdot \frac{M_o - M_u}{M_o + M_u}$	$M_m = Lv$
	(m)		atm	atm	mt	atm	t	atm	m	mt
Kämpferfuge	1,10	0,202	− 1,827	− 10,219	− 8,476	− 6,023	66,363	− 6,033	− 0,128	− 8,494
Fuge t—t	0,91	0,138	− 9,211	− 4,753	+ 3,076	− 6,982	63,527	− 6,981	+ 0,048(4)	+ 3,074
Scheitelfuge	0,80	0,107	− 5,969	− 12,173	− 3,319	− 9,071	72,795	− 9,099	− 0,045(4)	− 3,319

Zur *Nachprüfung* werden folgende Beziehungen benutzt.

1) In Spalte 5: $$M_m = \frac{M_o - M_u}{2},$$

diese Bedingung folgt für vorliegenden Fall aus der Gl. (263).

2) In Spalte 6: $$\sigma_s = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2},$$

worin σ_s die sog. *Schwerpunkt*spannung bedeutet.

3) In Spalte 7: $$L = \frac{3(M_o + M_u)}{d},$$

was aus $\sigma_s = \frac{L}{d}$ und den obigen Gl. 1 und 2 folgt.

4) In Spalte 8: $$\sigma_s = \frac{L}{10 d} \text{ in atm.}$$

5) In Spalte 9: $$v = \frac{d}{6}\left(\frac{M_o - M_u}{M_o + M_u}\right),$$

was aus den obigen Gl. 1 und aus $v \cdot L = M_m$ abzuleiten ist.

Auf solche Weise konnte M_m (in den Spalten 5 und 10) zweimal auf verschiedenen Wegen berechnet werden. Die gefundenen Unterschiede sind unerheblich.

Zu raten ist, schließlich für einige der gefährlichsten Lastlagen auch die *Stützlinien* zu zeichnen, um dadurch nochmals die Randspannungen graphisch nachzuprüfen (II. **48**). *Jede der Stützlinien muß im vorliegenden Falle* (nach II. **43**, c) *die Bogenachse in vier Punkten schneiden.* Tut sie das nicht, so sind Fehler bei der Berechnung untergelaufen, die richtig zu stellen sind, ehe man die berechneten Randspannungen als richtig ansehen darf. Vgl. darüber unter **48**, b.

46. Die Kämpferkraftlinie und ihre Anwendung.

a. Darstellung der Kämpferkraftrichtungen. Wenn man von dem Einflusse der Längskraft auf die Formänderung des Bogens absieht, so erhält man die bekannten Grundbedingungen der Gl. (238) in der Form

$$\int \frac{M_m}{EJ}\,du = 0; \quad \int \frac{M_m}{EJ}(x\,du) = 0; \quad \int \frac{M_m}{EJ}(y\,du) = 0.$$

Ihre Herleitung vgl. unter II. **43**, b. Setzt man

$$du = \frac{dx}{\cos\varphi}$$

und nimmt dazu das Dehnungsmaß, sowie auch — was in praktischen Fällen, namentlich für erste Näherungen zulässig ist —

$$J \cos\varphi = J$$

als *unveränderlich* an, so erhält man

$$\int M_m dx = 0; \quad \int M_m \cdot x \quad dx = 0; \quad \int M_m \cdot y \cdot dx = 0. \qquad (272)$$

Aus diesen Bedingungen lassen sich *Angriffspunkte und Richtungen der Kämpferdrücke* unmittelbar ableiten, wenn man die Gl. (240) für das Bogenmoment

$$M_m = M_{am} - Hy - Hz_0 - Hx \frac{c}{l}$$

zugrunde legt. Die erste der Grundbedingungen liefert dann (für eine lotrechte Einzellast) den Ausdruck

$$\int M_m \cdot dx = \int M_{am} \cdot dx - H \int y\, dx - Hz_0 \int dx - H \frac{c}{l} \int x\, dx = 0.$$

Ist der Ursprung O des Achsensystems (wie unter **41**, b) derart festgelegt, daß

$$\int x \cdot dx = 0,$$

$$\int y \cdot dx = 0,$$

$$\int x \cdot y \cdot dx = 0$$

wird, so gibt das

$$\int M_{am} dx = Hz_0 \int dx.$$

Bezeichnet h die Höhe der Momentfläche abc an der Einzellast P (Fig. 249), so ist

$$\int M_{am} dx = (\text{Fläche } abc)\, H = \frac{Hhl}{2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{Hhl}{2} = Hz_0 l,$$

oder weil

$$Hh = \frac{Pab}{l}$$

ist, auch

$$Hz_0 = \frac{Pab}{2l}. \qquad (273)$$

Aus der zweiten Grundbedingung erhält man bei entsprechender Lage von O (und wenn die Y-Achse Symmetrieachse ist)

$$\int M_{am} \cdot x\, dx = H \frac{c}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 dx. \qquad (274)$$

Das Integral der linken Seite berechnet sich am einfachsten als statisches Moment der M_{am}-Fläche bezogen auf die Y-Achse. Die Abszisse x_s des Schwerpunktes der Fläche abc ist gleich $\frac{1}{3}\left(\frac{l}{2} - a\right)$, daher

$$\int M_{am} \cdot x \cdot dx = \frac{Hhl}{2} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{l}{2} - a\right) = \frac{Pab(l - 2a)}{12}$$

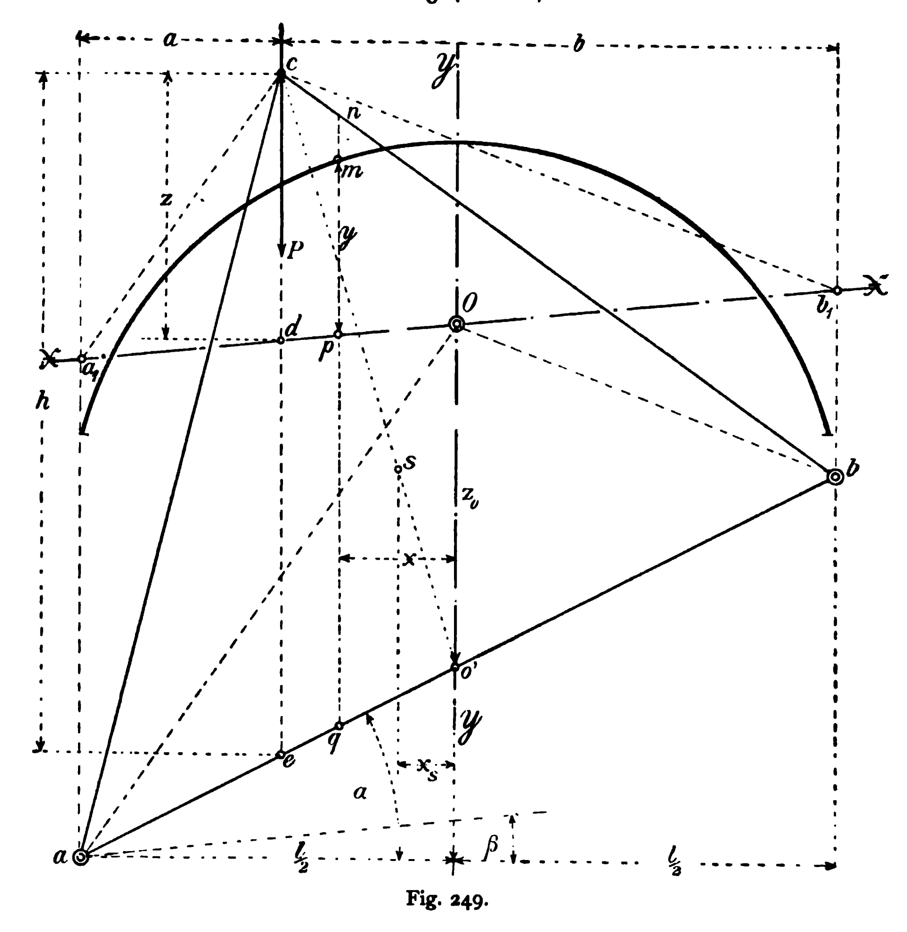


Fig. 249.

und daraus, in Verbindung mit der Gl. (274),

$$H\frac{c}{l} = \frac{Pab(l - 2a)}{l^3}. \tag{275}$$

Bezeichnet man die Ordinate des Punktes c mit z, so ist anzuschreiben

$$z = h - z_0 - \left(\frac{l}{2} - a\right)\frac{c}{l}$$

oder

$$z = \frac{Pab}{Hl} - \frac{Pab}{2Hl} - \left(\frac{l}{2} - a\right)\frac{Pab(l - 2a)}{Hl^3}.$$

Das gibt die *Gleichung der Kämpferdrucklinie* mit

$$z = \frac{2Pa^2b^2}{Hl^3}. \tag{276}$$

Sobald die Ordinaten z für verschiedene Lagen der wandernden Einzellast P berechnet worden sind, ist die *Kämpferdrucklinie* gegeben. Die *Angriffspunkte* a und b der Kämpferdrücke K_a und K_b sind dann nach folgendem Satze bequem darzustellen:

Verbinde den Endpunkt c einer Ordinate z mit dem Schnittpunkte a_1 der X-Achse und der Stützenlotrechten A. Ziehe zur $\overline{ca_1}$ eine Parallele durch den Ursprung O. Diese trifft dann die Stützenlotrechte A im Angriffspunkte a der Kämpferkraft K_a. Ebenso läßt sich der Angriffspunkt b der Kämpferkraft K_b finden: $\overline{Ob}$ parallel $\overline{cb_1}$. Bei der *Nachprüfung* muß die Kämpferlinie ab auf der Y-Achse eine Strecke

$$z_0 = \overline{Oo'} = \frac{Pab}{2Hl}$$

abschneiden.

b. Gerade Kämpferkraftlinie für Parabelbogenachsen. Aus der dritten Grundbedingung entnimmt man

$$\int M_m \cdot y\,dx = \int M_{am} \cdot y\,dx - H\int y^2\,dx = 0$$

oder

$$H = \frac{\int M_{am} \cdot y\,dx}{\int y^2\,dx}. \tag{277}$$

Setzt man hierin $y = f(x)$ aus der Parabelgleichung ein und verlegt dabei den Ursprung O des Achsensystems X, Y (den Gleichungen auf S. 325 entsprechend) in den *Schwerpunkt des Parabelbogens, also in eine Tiefe von ein Drittel der Pfeilhöhe f* unter den Parabelscheitel, wobei nach unserer früheren Voraussetzung die Y-Achse eine Symmetrieachse ist, so erhält man

$$H = \frac{15 \cdot P \cdot a^2 b^2}{4 \cdot fl^3} \tag{278}$$

und daraus in Verbindung mit der Gl. (276) die *Gleichung der Kämpferdrucklinie* mit

$$z = \left(\frac{8}{15}\right)f. \tag{279}$$

Die Kämpferdrucklinie $a_0 b_0$ ist demnach eine zur X-Achse parallele Gerade (Fig. 250).

Für *erste Annäherungen* empfiehlt sich die Verwendung der obigen geraden Kämpferdrucklinie sehr. Sobald diese gelegt ist, findet man die Angriffspunkte a und b der Kämpferdrücke nach dem von WINKLER[1] gegebenen (unter a. beschriebenen) einfachen graphischen Verfahren. Damit erhält man dann nach der Gl. (273)

$$z_0 = \frac{Pab}{2Hl}, \tag{280}$$

sowie auch $$c = l(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta).$$

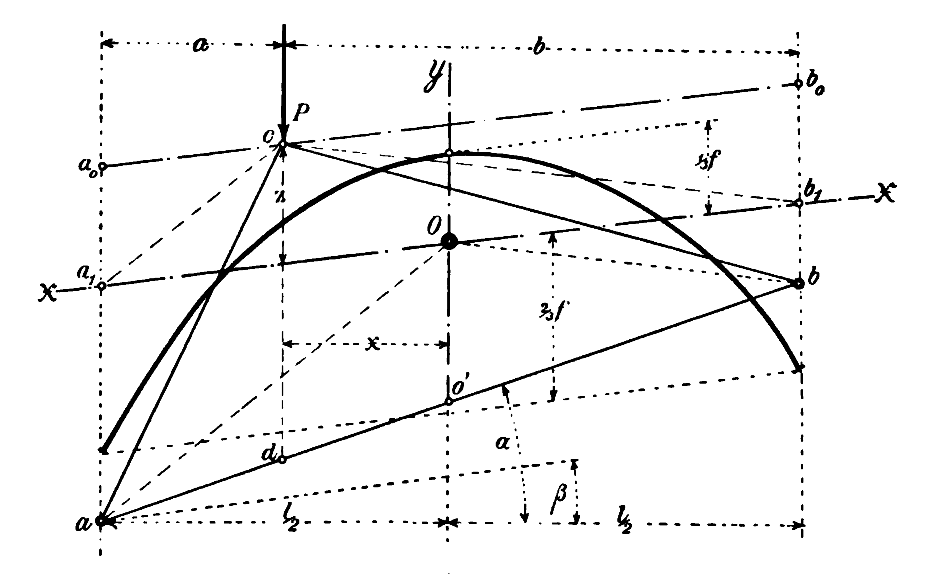


Fig. 250.

Somit ist auch nach Gl. (240) jedes Bogenmoment darzustellen.

Anwendungen der Kämpferkraftlinie vgl. man im folgenden Zahlenbeispiele. Bei dieser Gelegenheit möge bemerkt werden, daß LANDSBERG[2] das Kämpferdruckverfahren besonders ausgebildet und dabei eine graphische Darstellung der Kämpferdruckrichtungen gegeben hat, die ein wenig von der oben mitgeteilten abweicht.

---

[1] WINKLER, Lehre von der Elastizität und Festigkeit. 1867, S. 328—330.

[2] LANDSBERG, Beitrag zur Theorie der Gewölbe. Zeitschr. des Ver. deutscher Ing. 1901, Band 45, S. 1765.

47. Zahlenbeispiel zum Kämpferkraftverfahren.

Aufgabe 60. *Der in der Aufgabe* 59 *nach dem Momentenverfahren behandelte Steinbogen von* 18 m *Stützweite und* 2,25 m *Pfeilhöhe soll nach dem (unter* **46** *erläuterten) Kämpferkraftverfahren nochmals berechnet werden, wobei eine Parabelbogenachse und eine gerade Kämpferkraftlinie zugrunde zu legen ist.*

a. Stützlinie und Spannungen aus dem Eigengewicht.

1. Die Pfeilhöhe der Parabelbogenachse (Fig. 251) berechnet sich mit

$$f = 2{,}25 + 0{,}40 - 0{,}486 = 2{,}164 \text{ m}.$$

Daraus

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{2}{3} f = 1{,}44 \text{ m}, \\ z &= \tfrac{8}{15} f = 1{,}154 \text{ m}, \\ z + t &= \tfrac{18}{15} f = 2{,}60 \text{ m}. \end{aligned}$$

2. Das Gewölbe wurde in 18 Streifen geteilt, deren Gewichte P betragen:

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_I = \tfrac{1}{2}[(2{,}25 + 3{,}27)\,0{,}544 + (3{,}27 + 2{,}83)\,1{,}0]\,2{,}0 = 9{,}10 \text{ t} \\
P_2 &= P_{II} = \tfrac{1}{2}(2{,}83 + 2{,}45)\,2{,}0 \ldots\ldots = 5{,}28 \text{ t} \\
P_3 &= P_{III} = \tfrac{1}{2}(2{,}45 + 2{,}13)\,2{,}0 \ldots\ldots = 4{,}58 \text{ t} \\
P_4 &= P_{IV} = \tfrac{1}{2}(2{,}13 + 1{,}89)\,2{,}0 \ldots\ldots = 4{,}02 \text{ t} \\
P_5 &= P_V = \tfrac{1}{2}(1{,}89 + 1{,}67)\,2{,}0 \ldots\ldots = 3{,}56 \text{ t} \\
P_6 &= P_{VI} = \tfrac{1}{2}(1{,}67 + 1{,}51)\,2{,}0 \ldots\ldots = 3{,}18 \text{ t} \\
P_7 &= P_{VII} = \tfrac{1}{2}(1{,}51 + 1{,}39)\,2{,}0 \ldots\ldots = 1{,}90 \text{ t} \\
P_8 &= P_{VIII} = \tfrac{1}{2}(1{,}39 + 1{,}34)\,2{,}0 \ldots\ldots = 2{,}73 \text{ t} \\
P_9 &= P_{IX} = \tfrac{1}{2}(1{,}34 + 1{,}34)\,2{,}0 \ldots\ldots = 2{,}68 \text{ t} \\
& \hphantom{=} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 38{,}03 \text{ t}.
\end{aligned}$$

3. Man bestimmt jetzt für jede der 18 Schwerachsen der Laststreifengewichte P (Fig. 251) die Angriffspunkte der Kämpferkräfte K_a und K_b.[1] Damit sind für jeden der 18 Punkte die Richtungen der zugehörigen Kämpferkräfte gegeben. Graphisch bildet jedes P mit dem zugehörigen K_a und K_b ein Kraftdreieck (Fig. 251).

Reiht man die sämtlichen Kämpferkräfte K_a (R_a) zu einer Kraftlinie zusammen (Fig. 252), so erhält man deren Mittelkraft K_{at} ihrer Größe und Richtung nach. Ihre Lage findet man in bekannter Weise (I. **54**—**55**) mit Hilfe eines zwischen die Richtungen der K_a (R_a) gelegten Seilecks. O' ist der beliebig gewählte Pol des zugehörigen Kraftecks (Fig. 252).

---

[1] Statt K_a und K_b ist in den Figuren R_a und R_b gedruckt.

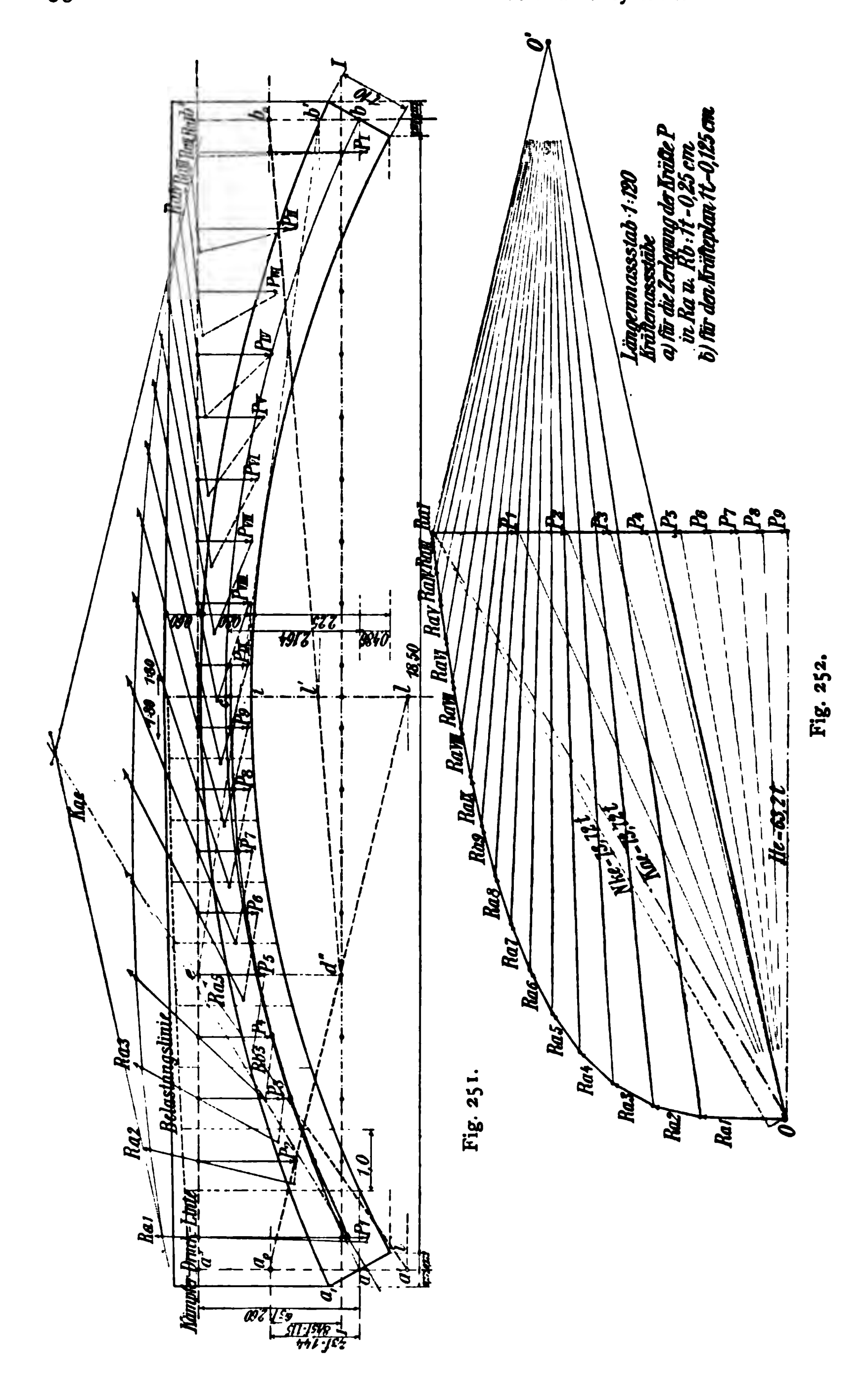


Fig. 251.

Fig. 252.

Um dann die Mittelkraftlinie (Stützlinie) für Eigengewicht zu erhalten, braucht man nur noch $\frac{1}{2}\sum P$, K_{ae} und die dadurch festgelegte Bogenkraft H_e zum Krafteck zusammen zu setzen, den Pol O in dessen linke Ecke zu legen und dazu das Seileck zwischen den Kraftrichtungen P zu zeichnen, dies Seileck umhüllt die Stützlinie. In den Fig. 251—252 sind Kraft- und Seileck rot dargestellt.

4. Die *Randspannungen* sind für die Querschnitte im Kämpfer, Scheitel und für die Fuge 5—5 berechnet, die um 0,33 m näher am Scheitel liegt, als die Fuge t—t in der Aufgabe 59. Man erhält aus der Grundformel (S. 311)

$$\sigma = \frac{L}{F}\left(1 \pm \frac{v}{k}\right).$$

Tabelle 36. Randspannungen aus dem Eigengewichte.

	Kämpfer	Scheitel	Lotrechte Fuge 5—5
Längskraft $L =$	— 73,72 t	— 63,2 t	— 63,2 t
Hebelarm $v =$	10 cm	6 cm	1 cm
Bogenstärke $d =$	110 cm	80 cm	91 cm
Innerer Rand $\sigma_i =$	— 10,35 atm	— 11,46 atm	— 7,40 atm
Äußerer Rand $\sigma_a =$	— 3,05 atm	— 4,35 atm	— 6,49 atm

Dabei wurde die Längskraft L[1] aus dem Krafteck der Fig. 252 abgegriffen.

b. Stützlinie und Spannungen aus der Verkehrslast (Fig. 253—254).

1. Die Verkehrslast war in der Aufgabe 59 zu 450 kg festgesetzt. Das Gewicht V eines Laststreifens beträgt danach

$$V = 0{,}45 \cdot 1 = 0{,}45 \text{ t}.$$

Wie Landsberg dies in der angegebenen Quelle[2] allgemein dargelegt hat, geben die für eine wandernde Einzellast V gezeichneten Kämpferkräfte über die *gefährlichste Lastlage* irgend einer Fuge unmittelbaren Aufschluß. Handelt es sich also, wie im vorliegenden Falle, um *angenäherte* Rechnungen, so kann man beim Bestimmen der Lastscheiden ohne vorherige Darstellung der Einflußflächen der überzähligen Größen auskommen. Man hat für irgend eine Fuge und einen dazugehörigen Randpunkt a oder i sowohl den Einfluß der links als auch

[1] Für L ist in den Fig. 251—254 immer N gedruckt.

[2] Zeitschr. des Ver. deutscher Ing. 1901. Bd. 45, S. 1768.

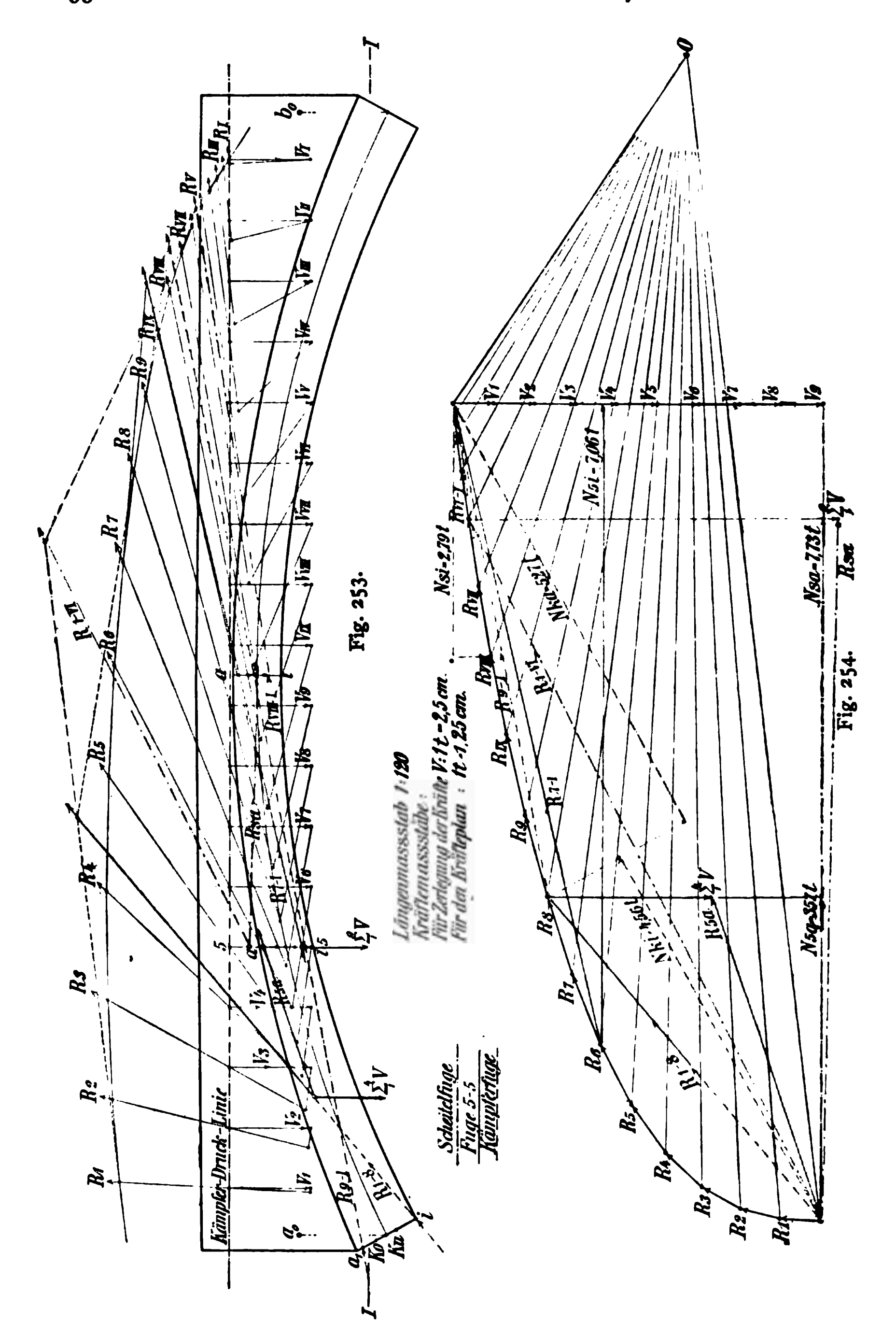


Fig. 253.

Fig. 254.

der rechts liegenden Kämpferkräfte der einzelnen Lastpunkte (1—9 und I—IX) zu prüfen. Das geschieht dadurch, daß man den Schnittpunkt jeder Kämpferkraft mit der Fuge ermittelt und sieht, welchen Sinn die dadurch im beobachteten Randpunkte hervorgerufene Spannung hat. Auf solche Weise ist schnell und bequem zu ermitteln, *welche Reihe* von Kämpferkräften Spannungen *gleichen Sinnes* erzeugt.

Im vorliegenden Falle handelt es sich (wie auch die genaue Lösung der Aufgabe 59 erwiesen hat) nur um *Druck*spannungen: in der Fig. 253 sind die Richtungen und Größen der Kämpferkräfte K_a (R) für rechtsseitige Belastung in bekannter Weise festgelegt. Die Kämpferkräfte aus der linksseitigen Belastung ergeben sich aus einem Spiegelbilde der Fig. 253—254.

Größe und Lage einer *Reihe* von gefährlichsten Kämpferkräften wurden für die drei in Frage kommenden Fugen, wie es in den Fig. 253—254 mit roter Farbe dargestellt ist, je besonders ermittelt. Dazu diente das Krafteck mit dem Pole O und ein mit dessen Hilfe gezeichnetes Seileck, dessen äußere Seiten parallel zu den im Krafteck an die erste und letzte Kämpferkraft der Reihe gelegten Strahlen geführt wurden. So erhielt man für jede Reihe die Lage der Mittelkraft und damit auch deren Schnittpunkt (Stützpunkt) mit der beobachteten Fuge, also auch den Angriffspunkt der Längskraft L (N).

Die Ergebnisse veranschaulicht die Tabelle 37.

Tabelle 37. Größte Randspannungen aus der Verkehrslast.

	Randpunkt	Kämpferfuge	Scheitelfuge	Lotrechte Fuge 5—5[2]	Bemerkungen
Gefährlichste Belastung	i	R_1 bis R_8	R_{VII} bis R_I[1]	R_7 bis R_I	[1] Die *genauere* Lage der Lastscheide ist aus der Einflußfläche der überzähligen Größen zu bestimmen. [2] Hier stimmen die Lastscheiden mit der genaueren Untersuchung (Aufgabe 59) überein.
	a	R_9 bis R_I	R_I bis R_{VI}	R_1 bis R_8	
Längskraft L_k	i	4,56 t	2,79 t	7,06 t	
	a	5,27 t	7,73 t	3,57 t	
Hebelarm v	i	55 cm	19 cm	25 cm	
	a	44 cm	2 cm	36 cm	
Randspannung σ	i	— 1,66 atm	— 0,85 atm	— 2,05 atm	
	a	— 1,63 atm	— 1,11 atm	— 1,32 atm	

In der Tabelle 38 sind noch die im vorliegenden Falle erhaltenen größten Randspannungen mit den in der Aufgabe 59 ermittelten verglichen worden.

Tabelle 38. Vergleich der Ergebnisse der Aufgaben 59 u. 60.

Fuge und Randpunkt		Größte Randspannungen in atm			Bemerkungen
		Aufgabe 60		Aufgabe 59	
		Eigengewicht	Vollbelastung	Vollbelastung	
Kämpfer	a	3,05	4,68	1,83	[1] Fuge 5—5 liegt in $\frac{l}{4}$ vom Kämpfer und ein wenig rechts von der Fuge *t*—*t*.
	i	10,35	12,01	10,22	
Scheitel	a	4,35	5,46	5,97	
	i	11,46	12,31	12,17	
Fuge *t*—*t* oder 5—5[1]	a	6,49	7,87	9,21	
	i	7,40	9,54	4,75	

Man sieht, wie die Unterschiede im Scheitel geringfügig, erheblicher im Kämpfer und am größten in der Fuge 5—5 sind. Auch beachte man, wie schon bei der hier vorliegenden *kleinen Stützweite von* 18 m *der Einfluß des Eigengewichtes denjenigen der Verkehrslast weit überwiegt* (vgl. **48**, a).

Es besteht kein Zweifel darüber, daß man bei der Anwendung der *genaueren* Kämpferkraftlinie, nach dem von Winkler gegebenen Verfahren (**46**, a), schärfere Ergebnisse erzielen wird als mit Hilfe der geraden Kämpferkraftlinie. Auch ist jene Anwendung, in Verbindung mit dem Kämpferkraftverfahren, recht bequem, weil man dabei nur *eine* Einflußfläche, diejenige der Bogenkraft H, gebraucht (Gl. 276).

48. Zusätze für den Vollwandbogen.

a. Der überhaupt gefährlichste Querschnitt.

1. Im Zahlenbeispiel (unter **45**, b, c) wurde bereits gezeigt, wie man schon während der Rechnung mancherlei Proben auf die Richtigkeit der Ergebnisse anstellen kann. Dabei war das Endziel die Ermittelung der größten Randspannungen für einzelne ausgezeichnete Querschnitte, in Scheitel, Kämpfer und dazwischen liegenden Fugen. Damit dürfen aber im allgemeinen die Rechnungen noch nicht abgeschlossen werden. Denn es gilt immer noch *den überhaupt gefährlichsten Querschnitt* zu finden. Wie man dessen Lage *angenähert* und *unmittelbar* angeben kann, wurde bereits im II. Bande erläutert, worüber die dortigen Absätze **41** und **48** nachzulesen sind. Die Elastizitätstheorie hat uns aber bisher im allgemeinen kein Mittel an die Hand gegeben, um die Lage der gefährlichsten Fuge *unmittelbar* feststellen zu können. Um sie zu finden, müßte man zuerst für eine ausreichende Zahl von Querschnitten mit Hilfe der Momenten-Einflußflächen (**44**) je die größten Randspannungen berechnen (**45**, c). Darauf könnte man die gewonnenen

Größen σ_o und σ_u über der Kämpferlinie als (je zu einer Fugenabszisse gehörige) Ordinaten auftragen. So erhielte man zwei krumme Linien (die eine für σ_o, die andere für σ_u), aus denen die Abszisse z für die Lage der überhaupt gefährlichsten Fuge abzugreifen wäre. Einer solchen Darstellung bedarf es aber gewöhnlich nicht, weil jede Bogenform gewisse Anhaltspunkte bietet, die zur unmittelbaren Ermittelung der gesuchten Gefahrfuge führen können.

2. Beim *weitgespannten Bogen* wird der Einfluß des Eigengewichtes denjenigen der Verkehrslast weit überwiegen. Die gefährlichste Fuge kann deshalb, ohne Berücksichtigung der Verkehrslast, unmittelbar gefunden werden, wenn man eine *Stützlinie für das Eigengewicht* zeichnet oder besser deren Lage berechnet, weil die Zeichnung zu ungenau wird. Bei symmetrischem Bogen muß diese viermal, bei Unsymmetrie mindestens dreimal die Bogenachse schneiden (II. **43**, c). Außerdem gibt in diesem Falle auch der allgemeine Ausdruck für das Kernmoment Aufschluß über die Lage der gefährlichsten Fugen. Nach Gl. (**44**, c, 1) ist nämlich anzuschreiben

$$M_k = M_{am} - (X y_k \cos\beta + Y x + Z),$$

worin der Klammerwert das *Einspannungsmoment darstellt*, das positiv oder negativ werden kann. M_k und die Randspannungen σ_o oder σ_u können danach ihren größten Wert erhalten,

1) *wenn X und Y positiv sind und Z negativ ist*

für $y_k = 0$, d. h. in einer Fuge, deren oberer oder unterer Kernpunkt in der X-Achse liegt,

oder für $x = 0$, d. h. in der in die Y-Achse fallenden Fuge, das ist bei symmetrischen Gewölben die Scheitelfuge;

2) *wenn X, Y und Z positiv sind*

für die größte negative Kämpferordinate y_k.

Beim *Bogen kleinerer Weite* überwiegt der Einfluß die Verkehrslast. Die im Zahlenbeispiel (**45**, b) in Fig. 248 dargestellten Einflußlinien der M_k-Flächen für Scheitel, Kämpfer und eine dazwischen liegende Fuge veranschaulichen die gefährlichsten Lastlagen. Die größten Randspannungen aus der Verkehrslast entstehen danach in der Regel

in der Scheitelfuge bei *Voll*belastung,

in der Kämpferfuge und einer ungefähr in der Mitte zwischen Scheitel und Kämpfer liegenden Fuge bei *einseitiger* Belastung.

Die einseitige Belastung braucht man dabei genau genug nur bis zur Scheitellotrechten reichen zu lassen. Bei dem im II. Bande (in § 8) beschriebenen Näherungsverfahren wurde die Lastscheide bestimmt.

3. Von großem Einflusse auf die Grenzwerte der Randspannungen in den gefährlichsten Fugen ist die *Führung der Bogenachse.* In wichtigen Fällen sollte man nie unterlassen, vor Beginn der Rechnungen die *günstigste* Bogenachse festzustellen, wie es in § 8 des II. Bandes (unter **44**) ausführlich dargelegt worden ist. *Als günstigste Bogenachse gilt diejenige, für welche alle Momente M_m verschwinden, die aus dem Eigengewichte und der halben (sog. mittleren), über die ganze Stützweite gleichmäßig verteilten Verkehrslast herrühren.* Der heute noch viel geübte Brauch, die Bogenachse mit der allein aus dem Eigengewichte herrührenden Bogenkraft zu zeichnen, ist nicht zu empfehlen (II. **37**, a).

b. Stützlinien oder Mittelkraftlinien[1]. Jede Stützlinie ist durch drei ihrer Punkte eindeutig bestimmt. Für symmetrisch belastete Bogenhälften genügen zwei Punkte. Wenn aber das zur Darstellung der Stützlinie dienende Krafteck unmittelbar festgelegt wird, so braucht man nur *einen* Punkt der Stützlinie, z. B. den Angriffspunkt eines der beiden Kämpferkräfte. Sind auch die übrigen beiden Durchgangspunkte, z. B. die Angriffspunkte der andern Kämpferkraft und die Bogenkraft einer Scheitelfuge bekannt, so können sie insofern zur Nachprüfung der Darstellung dienen, als die mit dem vorher festgelegten Krafteck gezeichnete Stützlinie durch sie verlaufen muß.

Wie man für beliebige Lagen einer Einzellast Angriffspunkt, Richtung und Größe der Kämpferkräfte *annähernd* darstellen und somit das für die Zeichnung einer beliebigen Stützlinie dienende Krafteck unmittelbar festlegen kann, wurde unter **46** beschrieben. Hier handelt es sich aber um eine möglichst scharfe *Nachprüfung* von bereits erhaltenen Rechnungsergebnissen durch nachträgliches Eintragen einer geeigneten Stützlinie, aus welcher man die M_m oder M_k unmittelbar abgreifen, also auch die Richtigkeit der berechneten Randspannungen nochmals nachprüfen kann. Eine solche Stützlinie wird man möglichst genau mit Hilfe der Einflußflächen der überzähligen Größen darstellen müssen. Wie dies geschehen kann, soll an einem Beispiele gezeigt werden.

Ist R die Mittelkraft aller auf den Bogen wirkenden lotrechten Lasten (einschließlich Eigengewicht), so ist das Krafteck zur Darstellung der Stützlinie im Bogen bestimmt, sobald die beiden überzähligen Größen X und Y bekannt sind. Denn deren Mittelkraft ist die Kämpferlinienkraft H' (Fig. 255), die im Trennungspunkte zwischen den (statisch bestimmbaren) Balkenstützenkräften A und B anzutragen ist, um den Pol O des Kraftecks zu erhalten. Damit erhält man zugleich Größe

[1] Vgl. I. **64** und II. § 8.

und Richtung der Kämpferkräfte K_a und K_b. Zur völligen Lösung der gestellten Aufgabe bedarf man also nur noch *eines Angriffspunktes* einer Kämpferkraft.

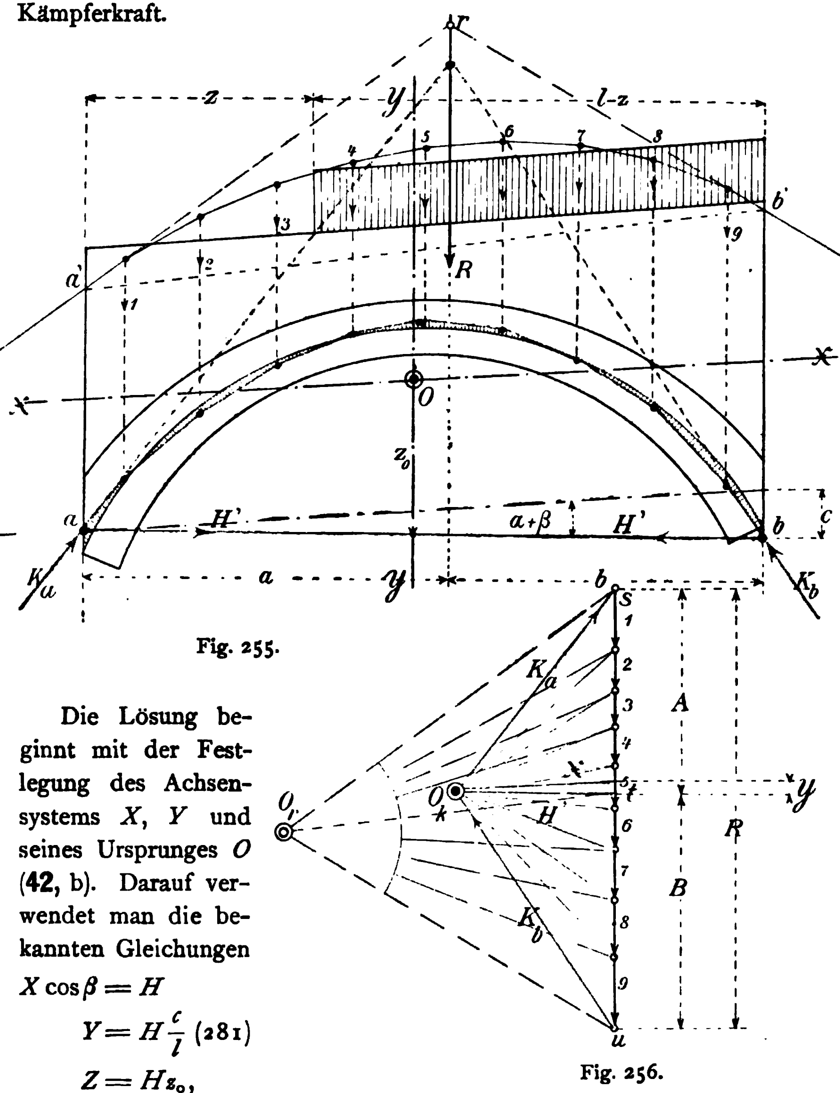


Fig. 255.

Fig. 256.

Die Lösung beginnt mit der Festlegung des Achsensystems X, Y und seines Ursprunges O (**42,** b). Darauf verwendet man die bekannten Gleichungen

$$X \cos \beta = H$$

$$Y = H \frac{c}{l} \quad (281)$$

$$Z = H z_0,$$

um auch die Punkte a und b der Kämpferlinie $\overline{ab}$ festzulegen. Es sei

f_x, f_y, f_z: veränderlicher Inhalt je einer der X-, Y- und Z-Flächen in qm für eine Breite $\varDelta x$,

g: veränderliches Eigengewicht in t/m,

p: unveränderliche Verkehrslast in t/m.

Dann ist

$$H = \cos\beta\left[\sum_0^l g\cdot f_x + p\sum_z^l f_x\right], \tag{282}$$

wenn $(l - z)$ die Länge der Verkehrslast bezeichnet. Ferner folgt

$$c = \frac{l}{H}\left[\sum_0^l g\cdot f_y + p\sum_z^l f_y\right] \tag{283}$$

und

$$z_0 = \frac{1}{H}\left[\sum_0^l g\cdot f_z + p\sum_z^l f_z\right]. \tag{284}$$

Die Ausrechnung des Klammerwertes hat (genau genommen) mit Hilfe der SIMPSON-Regel zu geschehen, weil die Einflußflächen für X, Y und Z von krummen Linien begrenzt werden.

Durch Auftragen von c und z_0 läßt sich jetzt die Kämpferlinie $\overline{ab}$ festlegen (Fig. 255). Trägt man dann noch im Trennungspunkte t von A und B

$$H' = \frac{H}{\cos\alpha}$$

parallel der $\overline{ab}$ auf, so erhält man den Pol O_k des gesuchten Kraftecks. A und B sind vorher in bekannter Weise zu berechnen. In der Fig. 256 ist das graphisch geschehen, mit Hilfe eines Kraftecks $O_r s u$, dessen Pol O_r beliebig gelegt wurde, und des danach gezeichneten Seilecks mit der Schlußlinie $a'b'$: $O_r t$ parallel zur $a'b'$. Im Schnittpunkte r dieses Hilfsseilecks greift die Mittelkraft R aller Lasten an. Es ist

$$R = A + B = \sum_0^l g\cdot \Delta x + p\sum_z^l \Delta x.$$

Sind a und b die Abstände zwischen R und den Stützenkraft-Lotrechten, so ist

$$A = \frac{Rb}{l},$$

$$B = \frac{Ra}{l}.$$

Die *erste Probe* auf die Richtigkeit der bisherigen Rechnungen ergibt sich, wenn man durch die Angriffspunkte a und b Parallelen zu den Strahlen $O_k - s$ und $O_k - u$ des Kraftecks legt. Diese müssen sich auf der Richtungslinie von R in einem Punkte c treffen.

Schließlich zeichnet man von a oder b aus, zwischen den Lastrichtungen die gesuchte Mittelkraftlinie, welcher die *Stützlinie* einzuschieben ist (I. **64**, **65** und II. **44**). Verläuft diese nicht durch b,

so sind Fehler bei der Rechnung oder Darstellung unterlaufen, die verbessert werden müssen. Schneidet sie nicht mindestens dreimal die Bogenachse, so rührt das ebenfalls von Ungenauigkeiten der Rechnungen usw. her, die zu beseitigen sind.

c. Temperatureinflüsse. Vgl. hierüber den II. Band unter **49**, c.

49. Zusätze für den Fachwerkbogen.

a. Unterschiede in der Behandlung des vollwandigen und gegliederten Bogens.

1. Der wesentlichste Unterschied in den Berechnungen beider genannten Bogenarten beruht darin, daß die Vollwand *Integrationen* der in unendlich nahen Querschnitten aufeinander folgenden elastischen Kräfte w (und ihrer statischen Momente) fordert, während solche beim Fachwerkbogen nicht nötig werden. Hier greifen die elastischen Kräfte in den Knoten an, weshalb einfache Summierungen der w-Kräfte ausreichen, um die *Biegelinien* und die daraus abzuleitenden Einflußlinien der überzähligen Größen festzulegen. Weil in den Knoten mittelbare Lastübertragung vorausgesetzt wird, so sind die Biegelinien hier Seilecke. Für die Vollwand der Steinbogen erscheinen sie als Seillinien (II. **1**, c). Weiter ist folgendes zu beachten:

Als Hauptsystem kann man in beiden Vergleichsfällen entweder einen an einem Ende eingespannten (**36**, b, Aufgabe 47) oder einen an beiden Enden gestützten Balken (**41**, a) wählen. Aus den (unter **36**, a) aufgeführten Gründen erscheint es aber am bequemsten, mit dem letztgenannten Hauptsystem zu rechnen. Beim Vollwandbogen, der meistens eine ausgesprochene, möglichst günstig gelegte *Bogenachse* besitzt, stützten wir das Hauptsystem in den durch die Endpunkte der Bogenachse verlaufenden Lotrechten. Das ist beim gelenklosen Fachwerkbogen weniger zweckmäßig. Denn ein solcher besitzt gewöhnlich keine so ausgesprochene Bogenachse, wie der Vollwandbogen, und wenn man als Hauptsystem nicht einen *Auslegeträger* erhalten will, so legt man die Stützenlotrechten A und B am besten durch die äußersten Fachwerksknoten der Einspannung (Fig. 257).

2. Für das Hauptsystem des gelenklosen Fachwerkbogens gelten ohne weiteres die grundlegenden Gl. (239) und (240) für das Bogenmoment M_m, wenn m irgend einen Knoten oder einen Momentenpunkt in einem lotrechten Schnitte tt bezeichnet. Setzt man also wie früher

$$X = \frac{H}{\cos\beta}, \quad Y = H\frac{c}{l}, \quad Z = Hz_0, \tag{285}$$

so erhält man auch hier die Gl. (243) in der Form

$$M_m = M_{am} - (X \cos\beta y + Yx - Z).$$

Legt man ferner den Ursprung O des Achsensystems (nach **41**, b) derart, daß

$$\sum x w_z = 0; \quad \sum y w_z = 0; \quad \sum xy w_z = 0$$

wird, so verschwinden in den allgemeinen Elastizitätsgleichungen (nach Aufgabe 47, **36**, b) alle Verschiebungen δ mit den aus verschiedenen Buchstaben gebildeten Doppelzeigern. Man erhält dann (nach Gl. 251) und unter Beachtung des unter **42**, b Gesagten:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\sum M_{am} w_x}{\cos\beta \sum y w_x}, \\ Y &= \frac{\sum M_{am} w_y}{\sum x w_y}, \\ Z &= \frac{\sum M_{am} w_z}{\sum w_z}. \end{aligned}\right\} \quad (286)$$

Bei Einführung des Querschnittverhältnisses (**37**, b)

$$\frac{F_0}{F} = \beta$$

erhält man (nacheinander) für die Zustände »$Z = -1$«, »$Y = -1$« und »$X = -1$« und für Polweiten EF_0

$$\left.\begin{aligned} w_z &= \frac{\Delta s}{r} = \beta\left(\frac{s}{r^2}\right), \\ w_y &= x w_z = \beta\left(x \frac{s}{r^2}\right), \\ w_x &= y w_z = \beta\left(y \frac{s}{r^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (287)$$

Darin bedeuten bekanntlich s irgend eine *Stablänge* und r der einem Stabe zugeordnete Hebelbarm der Stabkraft.

3. Das (unter **42**) über die Bedeutung der Summengrößen Gesagte gilt auch hier, so daß die Elastizitätsgleichungen in der Form der Gl. (258) (für $P = 1$ in r und $H_w = 1$) wie folgt angeschrieben werden können:

$$X = \frac{1 \cdot \delta_{rx}}{\cos\beta(\delta_{xx})} = \frac{1 \cdot \delta_{rx}}{\cos\beta \sum' y w_x} = \frac{\sum' S_0 S_x k}{\cos\beta \sum' S_x^2 k},$$

$$Y = \frac{1 \cdot \delta_{ry}}{\delta_{yy}} = \frac{1 \cdot \delta_{ry}}{\sum' x w_y} = \frac{\sum' S_0 S_y k}{\sum' S_y^2 k}, \tag{288}$$

$$Z = \frac{1 \cdot \delta_{rz}}{\delta_{zz}} = \frac{1 \cdot \delta_{rz}}{\sum' w_z} = \frac{\sum' S_0 S_z k}{\sum' S_z^2 k}.$$

Wir wiederholen hierzu: die δ-Werte im Zähler und Nenner auf der linken Seite der Gl. (288) können mit Hilfe der Arbeitsgleichungen MOHRS (**10**, b) unmittelbar so angeschrieben werden, wie sie auf der rechten Seite aufgeführt worden sind. Also bedeuten

S_0, S_x, S_y, S_z: eine für die Zustände »$X, Y, Z = 0$«, »$X = -1$«, »$Y = -1$«, »$Z = -1$« berechnete Stabkraft;

k: das bekannte Dehnungsvermögen (**11**, a).

Alle übrigen Einzelheiten der Berechnung sind im folgenden Zahlenbeispiele zu vergleichen.

b. Temperatureinflüsse und Näherungsrechnungen.

1. Wenn eine beliebige Zunahme oder Abnahme der Wärme vorausgesetzt wird, so gelten hier (nach Gl. 258) die Elastizitätsgleichungen

$$X_t = \frac{\delta_{xt}}{\cos\beta(\delta_{xx})} = \frac{\sum' S_x \Delta s_t}{\cos\beta \sum' S_x^2 k},$$

$$Y_t = \frac{\delta_{yt}}{\delta_{yy}} = \frac{\sum' S_y \Delta s_t}{\sum' S_y^2 k}, \tag{289}$$

$$Z_t = \frac{\delta_{zt}}{\delta_{zz}} = \frac{\sum' S_z \Delta s_t}{\sum' S_z^2 k},$$

worin bei graphischer Darstellung der δ-Werte die Polweite H_w gleich »Eins« zu nehmen ist. Daraus erhält man, weil M_{am} verschwindet, das von der Temperatur erzeugte Bogenmoment mit

$$-M_{mt} = X_t y \cos\beta + Y_t x + Z_t.$$

2. Näherungsweise nimmt man wohl eine *überall gleiche* Temperaturänderung an. In vielen Fällen, bei bedeutenden Stützweiten, namentlich aber bei kleinen Pfeilhöhen im Vergleiche zur Stützweite, ist das unzulässig, wenn Obergurt und Untergurt verschiedene Sonnenbestrahlung erfahren (**33**). Setzt man trotzdem gleiche Temperaturänderungen aller Stäbe voraus, so gilt hier das, was im II. Bande (unter **48**, c) gesagt

ist: Von den drei Grundbedingungen (Gl. 238) verschwinden die beiden letzten, weil weder eine Verdrehung der Kämpferfuge (verursacht durch Z), noch eine lotrechte Verschiebung eines ihrer Punkte (verursacht durch Y) eintritt. Danach verschwinden in den Gl. (244) und (246) auch Z und Y. Man erhält demnach

$$M_{mt} = X_t y \cos\beta \tag{290}$$

und $X_t \cos\beta$ berechnet sich aus der Gl. (289) mit

$$X_t \cos\beta = \frac{\delta_{xt}}{\delta_{xx}} = \frac{\sum S_x \Delta s_t}{\sum S_x^2 k}, \tag{291}$$

d. h. ähnlich wie das H_t beim Zweigelenkbogen (**37**, c).

3. Wenn man die *Formänderung der Wandstäbe* vernachlässigen und im übrigen die gleichen Voraussetzungen machen will, wie unter **46**, so kann man *für die erste Annäherung* die Kämpferkraftlinie aus der Gl. (276) mit

$$z = \frac{2 P a^2 b^2}{H l^3} \tag{292}$$

anschreiben und die Angriffspunkte a und b der Kämpferkräfte K_a und K_b (nach Winkler) so festlegen, wie es in Fig. 249 dargestellt ist.

Ebenso darf man unter gleichen Voraussetzungen für den Bogen mit *Parabel*gurten eine *gerade* Kämpferkraftlinie benutzen, deren Lage durch die Gl. (279) mit

$$z = (\tfrac{8}{15}) f \tag{293}$$

bestimmt ist, wenn die Lotrechten für A und B durch die Endpunkte der Bogenachse gelegt werden und wenn f deren Pfeilhöhe vorstellt.

50. Zahlenbeispiel zur Berechnung des Fachwerkbogens.

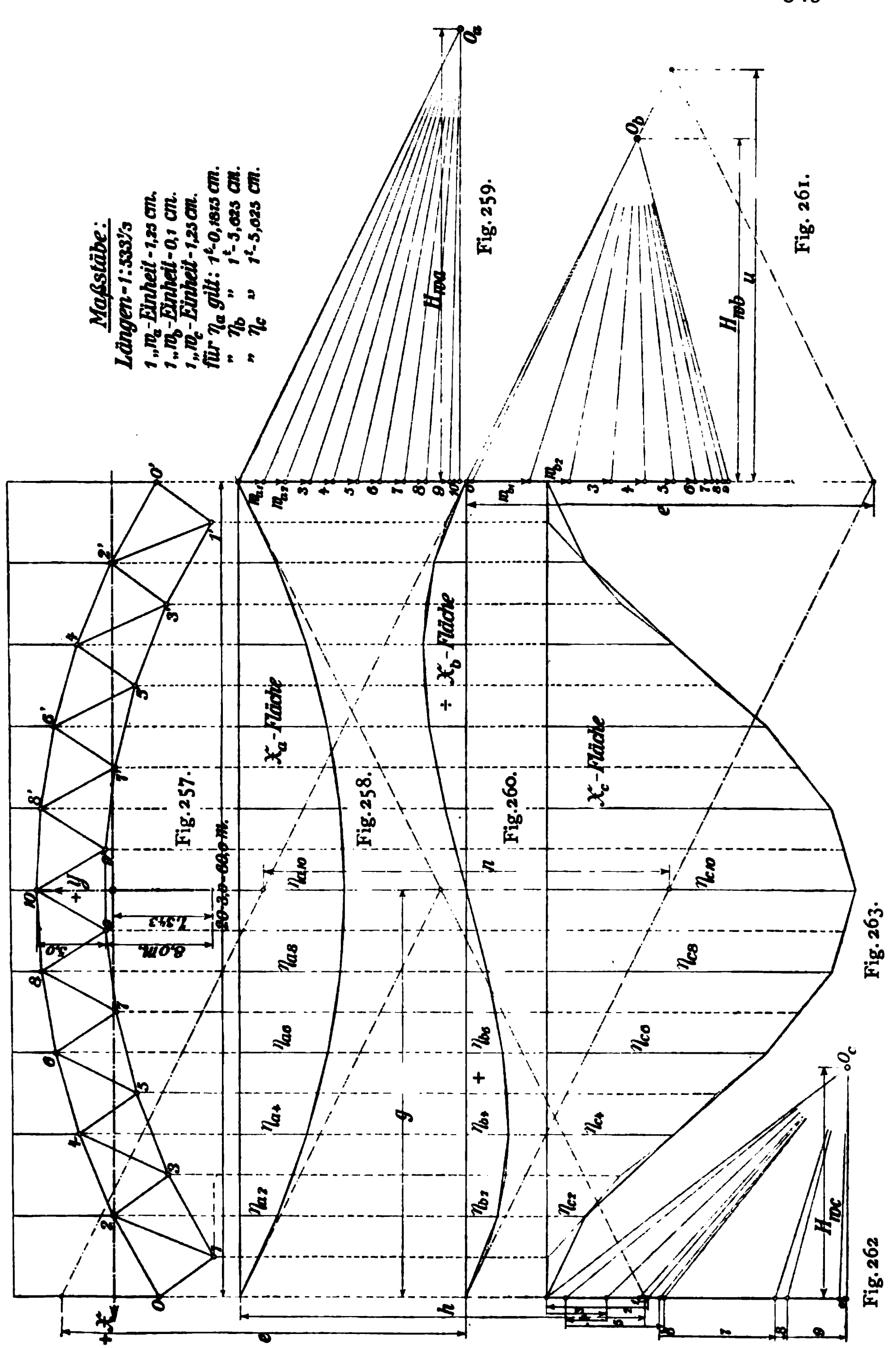
Aufgabe 61. *Für den in der* Fig. 257 *dargestellten, beiderseits eingespannten (symmetrischen) Fachwerkbogen mit Kreisgurten sind die überzähligen Größen zu bestimmen und zwar zuerst (unter geeigneten Annahmen für die Stabquerschnitte) angenähert, sodann genauer mit Hilfe der bei der Näherungsrechnung erhaltenen Größen. Dabei ist der Obergurt als Lastgurt, die Breite der Brücke mit* 10 m *und deren Belastung aus Verkehr und Eigengewicht mit* $0{,}75 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^2}$ *anzunehmen.*

a. Erste Bestimmung des Koordinatenursprunges.

1. Die Krümmungshalbmesser für U und O berechnen sich mit

$$R_u = \frac{27^2 + 8^2}{16} = 49{,}5625 \text{ m},$$

$$R_o = R_u + 5\,\text{m} = 54{,}5625 \text{ m}.$$



Maßstäbe:
Fig. 257.
Fig. 258.
X_a-Fläche
Fig. 259.
Fig. 260.
X_b-Fläche
Fig. 261.
Fig. 262
X_c-Fläche
Fig. 263.

Tabelle 39. Koordinaten x_0, y_0 in Metern.

Knoten	x_0	y_0	Knoten	x_0	y_0
0	30,0	4,012	6	12,0	11,664
1	27,0	0,000	7	9,0	7,176
2	24,0	7,438	8	6,0	12,669
3	21,0	3,331	9	3,0	7,898
4	18,0	9,945	10	0,0	13,0
5	15,0	5,675	—	—	—

Die gerechneten Koordinaten x_0, y_0 der Knoten, bezogen auf eine durch Knoten 1 gelegte wagerechte X-Achse, sowie die Stablängen s sind aus den folgenden Tabellen 39, 40 und 41 zu entnehmen.

2. Die früher (Gl. 251) und (258) mit X, Y, Z bezeichneten überzähligen Größen werden hier X_c, X_b, X_a genannt. Die lotrechte Y-Achse ist als Symmetrieachse gegeben. Die durch den Ursprung O verlaufende wagerechte X-Achse fällt mit der Richtung der Mittelkraft aller wagerecht angreifenden elastischen w-Kräfte zusammen. Diese sind zu bestimmen aus

$$w_a = \frac{\varDelta s}{r} = \frac{M}{r^2} \frac{s}{EF}.$$

Setzt man (nach **40**, a) angenähert

$$\text{für die Gurte} \quad \beta = \frac{F_0}{F} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\text{- - Wand} \quad \beta = \frac{F_0}{F} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 3,$$

so sind die w_a (für den Zustand »$X_a = M = -1$«) aus

$$w_a = \beta\left(\frac{s}{r^2}\right)$$

zu berechnen.

Sämtliche Hebelarme r sind berechnet worden, ebenso die Koordinaten x_i und y_i der den Wandstäben zugeordneten Momentenpunkte i. Die Ergebnisse der Berechnung der w_a-Kräfte geben die Tabellen 40 und 41.

Bezeichnet man die *Ordinate des Ursprunges O* mit y_{ox}, so ist jetzt

$$y_{ox} = \frac{\sum w_a y_o}{\sum w_a} \tag{294}$$

oder

$$y_{ox} = \frac{18{,}0905 + 0{,}2154}{2{,}4929} = 7{,}343 \text{ m}.$$

Ohne Beachtung des Einflusses der Wand hätte man

$$y_{ox} = \frac{18{,}0905}{2{,}4624} = 7{,}347 \text{ m}$$

erhalten.

Tabelle 40. Elastische Kräfte w_a für die Gurte.

Knoten	Stab	Stablänge s m	Hebelarm r m	w_a für $\beta = 1$	Ordinate y_0 des Angriffspunktes m	$y_0 \cdot w_a$
1	0—2	6,909	4,972	0,2911	± 0	+ 0
3	2—4	6,503	4,946	0,2769	+ 3,331	+ 0,9224
5	4—6	6,241	4,931	0,2674	+ 5,675	+ 1,5175
7	6—8	6,084	4,922	0,2616	+ 7,176	+ 1,8772
9	8—10	6,009	4,929	0,2577	+ 7,898	+ 2,0353
2	1—3	6,863	5,047	0,2694	+ 7,438	+ 2,0038
4	3—5	6,442	5,069	0,2507	+ 9,945	+ 2,4932
6	5—7	6,185	5,082	0,2395	+ 11,664	+ 2,7935
8	7—9	6,043	5,095	0,2328	+ 12,669	+ 2,9493
10	9—9′	6,000	5,102	$(\frac{1}{2})$ 0,2305	+ 13,000	+ 1,4983
	—	—	—	2,4624	—	+ 18,0905

Tabelle 41. Elastische Kräfte w_a für die Wand.

Stab	Stablänge s m	Hebelarm $\bar{r_i}$ m	w_a für $\beta = 3$	Ordinate y_{0i} des Angriffspunktes m	$y_{0i} \cdot w_a$
1—2	8,020	260,289	0,0004	— 200,637	— 0,0803
3—4	7,263	147,847	0,0010	— 73,755	— 0,0738
5—6	6,998	110,417	0,0016	— 29,643	— 0,0474
7—8	6,259	86,755	0,0025	— 5,556	— 0,0139
9—10	5,919	77,132	0,0030	+ 7,898	+ 0,0237
0—1	5,010	—	—	—	—
2—3	5,086	44,302	0,0078	+ 25,001	+ 0,1950
4—5	5,219	51,347	0,0059	+ 24,913	+ 0,1470
6—7	5,398	58,585	0,0047	+ 22,278	+ 0,1047
8—9	5,636	68,978	0,0036	+ 17,013	+ 0,0612
—	—	—	0,0305	—	+ 0,2154

b. Erste Berechnung der Einflußflächen der überzähligen Größen.

1. Alle x, y zur Berechnung der w_b und w_c sind jetzt gegeben. Zu diesem Zwecke wurden die in den zugehörigen i-Momentenpunkten angreifenden w_a-Kräfte in je zwei gleichwertige auf die Knoten entfallende Kräfte zerlegt. Vgl. deren Werte in der Tabelle 42.

Tabelle 42. Verteilung der w_a und Berechnung der w_b und w_c.

Knoten-nummer	Stab	Elastische W_a-Kräfte: Verteilung in der Wand	Elastische W_a-Kräfte: Verteilung in den Gurten	Elastische W_a-Kräfte: Summa aller W_a	Koordinaten: $+x$ m	Koordinaten: $\pm y$ m	Elastische Kräfte: $+w_b = x \cdot w_a$	Elastische Kräfte: $\pm w_c = y \cdot w_a$	$y \cdot w_c$ +	$x \cdot w_b$ +
0	1—2	+ 0,0243	—	+ 0,0243	30,0	— 3,357	0,729	— 0,082	0,275	21,870
1	0—2	—	+ 0,2911	+ 0,2911	27,0	— 7,369	7,860	— 2,145	15,807	212,220
2	1—2	+ 0,0299	—	+ 0,2321	24,0	+ 0,069	5,570	+ 0,016	0,001	133,680
	2—3	— 0,0468	—							
	3—4	+ 0,0334	—							
	1—3	—	+ 0,2694							
3	2—4	—	+ 0,2769	+ 0,2769	21,0	— 4,038	5,815	— 1,118	4,514	122,115
4	2—3	+ 0,0546	—	+ 0,2559	18,0	+ 2,576	4,606	+ 0,659	1,698	82,908
	3—4	— 0,0324	—							
	4—5	— 0,0455	—							
	5—6	+ 0,0385	—							
	3—5	—	+ 0,2507							
5	4—6	—	+ 0,2674	+ 0,2674	15,0	— 1,694	4,011	— 0,453	0,767	60,165
6	4—5	+ 0,0514	—	+ 0,2544	12,0	+ 4,295	3,053	+ 1,093	4,694	36,636
	5—6	— 0,0369	—							
	6—7	— 0,0449	—							
	7—8	+ 0,0453	—							
	5—7	—	+ 0,2395							
7	6—8	—	+ 0,2616	+ 0,2616	9,0	— 0,193	2,354	— 0,050	0,010	21,186
8	6—7	+ 0,0496	—	+ 0,2421	6,0	+ 5,300	1,453	+ 1,283	6,800	8,718
	7—8	— 0,0428	—							
	8—9	— 0,0437	—							
	9—10	+ 0,0462	—							
	7—9	—	+ 0,2328							
9	8—10	—	+ 0,2577	+ 0,2577	3,0	+ 0,529	0,773	+ 0,136	0,072	2,319
10	8—9	+ 0,0472	—	+(½) 0,2346	0	+ 5,631	0	+ 0,661	3,722	0
	9—10	— 0,0432	—							
	9—9′	—	+(½) 0,2305							
* Soll nach Tab. 40–41 gleich 2,4929 sein!		$\frac{1}{2}\sum w_a = 2,4808$ *			—		$\frac{1}{2}\sum w_b = 35,495$	-0,00046 †	38,360	$\sum x \cdot w_b = 701,817$

† Sollte ± 0 geben, Fehler also gleich — 0,00092!

2. *Die Maßstäbe* der elastischen w-Kräfte wurden in den Fig. 258—260 wie folgt gewählt:

für die *Einheit* der w_a: 1,25 cm,
- - - - w_b: 0,10 - ,
- - - - w_c: 1,25 - .

Die in den Fig. 257—260 beliebig gewählte Strecke

$$g = h = n = e$$

ist gleich 30 m in nat. Größe, also (bei einem Längenmaßstabe 3 : 1600) gleich $e = 5{,}625$ cm zu rechnen.

3. *Die Polweiten* der w-Kraftecke folgten aus

$$H_{wa} = \sum w_a$$
$$H_{wb} = \frac{1}{e}\sum x \cdot w_b$$
$$H_{wc} = \frac{1}{e}\sum y \cdot w_c.$$

Das gibt mit $1\,w_a = 1\,w_c = 1{,}25$ cm und $e = 5{,}625$ cm

$$H_{wb} = \frac{100 \cdot 1403{,}634 \cdot 0{,}1}{5{,}625 \cdot \frac{1600}{3}} = 4{,}68 \text{ cm},$$
$$H_{wc} = \frac{100 \cdot 76{,}720 \cdot 1{,}25}{5{,}625 \cdot \frac{1600}{3}} = 12{,}75 \text{ cm}.$$

4. Aus den Gleichungen

$$X_a = \left(\frac{e}{g}\right)\eta_a;\quad X_b = \left(\frac{1}{e}\right)\eta_b;\quad X_c = \left(\frac{1}{e}\right)\eta_c$$

wurden die Ordinaten der drei Einflußflächen der überzähligen Größen für die Knoten 0 bis 10 berechnet und in den Fig. 258—260 aufgetragen. Aus der vorgeschriebenen Vollbelastung erhält man eine *Knotenlast*

$$P = 6 \cdot \frac{10}{2} \cdot 0{,}75 = 22{,}5 \text{ t}.$$

Dafür sind X_a und X_c berechnet. X_b wird wegen der Symmetrie des Bogens und seiner Vollbelastung gleich Null, denn es ist (nach Gl. 285)

$$Y = X_b = H\frac{c}{l} = 0,$$

weil c gleich Null wird.

Es berechnen sich dann für die Knotenlasten von 22,5 t

$$X_a = Hz_0 = 22{,}5\left[2 \cdot \sum_2^8 \eta_a + \eta_{a-10}\right] = 1297 \text{ mt},$$
$$X_c = H = 22{,}5\left[2 \cdot \sum_2^8 \eta_c + \eta_{c-10}\right] = 90{,}9 \text{ t}.$$

Das gibt $z_0 = 14{,}27$ m.

Die durch das Moment X_a der in O wagerecht angreifenden Einzelkraft $X_c = H$ und der vorstehend angegebenen Knotenbelastung erzeugten Stabkräfte sind mit Hilfe eines Kräfteplanes dargestellt worden. Danach wurden sämtliche *Stabquerschnitte* und wirkliche Stablängenänderungen, sowie auch die durch »$M = -1$« erzeugten Stabkräfte S' berechnet, wie aus den Tabellen 43 und 44 zu entnehmen ist.

Die Zerlegung der in O angreifenden überzähligen Größen

$$\frac{X_a}{30} = 43{,}23 \text{ t}$$

und

$$X_c = 90{,}9 \text{ t}$$

erfolgte (nach dem unter **36**, in der Aufgabe 47 angegebenen Verfahren) in den beiden Richtungen O—0 und O—1. Darauf wurden alle in den Endknoten 0 und 1 angreifenden Kräfte (wozu in 0 auch die Balkenstützenkraft $A = 101{,}25$ t gehört) je zu einer Mittelkraft zusammengesetzt und schließlich der erwähnte Kräfteplan gezeichnet.

c. Zweite Bearbeitung der Aufgabe.

In der auf S. 344 angegebenen Gleichung für w_a sind jetzt die in den Tabellen 43 und 44 berechneten Werte von F einzusetzen.

Tabelle 43. Erneute Berechnung der elastischen w_a-Kräfte der Gurte.

Stab	Stabkraft S aus der Vollbelastung t	Stabquerschnitt F cm²	Stabkraft S' aus $M = -1$ t	Stablänge s m	Stablängenänderung $\Delta s' \cdot 10^6$ m	Hebelarm r m	$w_a \cdot 10^6$	Angriffsknoten
0—2	− 425	500	− 0,201	6,909	− 1,3226	4,972	+ 0,2660	1
2—4	− 474	550	− 0,202	6,503	− 1,1374	4,946	+ 0,2300	3
4—6	− 516	600	− 0,203	6,241	− 1,0055	4,931	+ 0,2039	5
6—8	− 544	620	− 0,203	6,084	− 0,9486	4,922	+ 0,1927	7
8—10	− 560	650	− 0,203	6,009	− 0,8940	4,929	+ 0,1814	9
1—3	+ 343	410	+ 0,198	6,863	+ 1,5782	5,047	+ 0,3127	2
3—5	+ 391	470	+ 0,197	6,442	+ 1,2857	5,069	+ 0,2536	4
5—7	+ 426	500	+ 0,197	6,185	+ 1,1604	5,082	+ 0,2283	6
7—9	+ 448	520	+ 0,196	6,043	+ 1,0846	5,095	+ 0,2129	8
9—9′	+ 456	540	+ 0,196	6,000	+ 1,0370	5,102	+ 0,2032	10

Tabelle 44. Erneute Berechnung und Verteilung der elastischen w_a-Kräfte der Wand.

Stab	Stabkraft S aus der Vollbelastung t	Stabquerschnitt F cm²	Stabkraft S' aus $M = -1$ t	Stablänge s m	Stablängenänderung $\Delta s' \cdot 10^6$ m	Hebelarme r_1 u. r_2 m	$w_a \cdot 10^6$	Angriffsknoten
1—2	— 61	70	+ 0,004	8,020	+ 0,2182	4,27	+ 0,0511	0
						4,35	— 0,0502	2
3—4	— 44	50	+ 0,007	7,263	+ 0,4842	4,42	+ 0,1095	2
						4,55	— 0,1064	4
5—6	— 21	30	+ 0,009	6,698	+ 0,9569	4,60	+ 0,2080	4
						4,80	— 0,2332	6
7—8	± 0	30	+ 0,012	6,259	+ 1,1192	4,79	+ 0,2336	6
						5,06	— 0,2212	8
9—10	+ 22	30	+ 0,013	5,919	+ 1,2214	5,01	+ 0,2438	8
						5,35	— 0,2282	10
0—1	— 34	40	—	5,010	—	—	—	—
						—	—	—
2—3	+ 78	90	+ 0,023	5,086	+ 0,6189	7,30	— 0,0848	2
						6,32	+ 0,0979	4
4—5	+ 71	90	+ 0,020	5,219	+ 0,5519	6,66	— 0,0829	4
						5,90	+ 0,0936	6
6—7	+ 57	70	+ 0,018	5,398	+ 0,6647	6,15	— 0,1081	6
						5,54	+ 0,1200	8
8—9	+ 44	50	+ 0,015	5,636	+ 0,8051	5,70	— 0,1412	8
						5,28	+ 0,1525	10

1. Die aus den Tabellen 43—44 entnommenen Werte von w_a sind in der Tabelle 45 für die Knoten 0 bis 10 zusammengezogen. Daraus folgt die *genauere Ordinate* y_{ox} *des Ursprunges O* mit

$$y_{ox} = \frac{\sum w_a \cdot y_o}{\sum w_a}$$

$$y_{ox} = \frac{16{,}3116 \cdot 10^{-6}}{2{,}2369 \cdot 10^{-6}} = 7{,}292 \text{ m.} \tag{295}$$

Tabelle 45. Zur Berechnung der Ordinate y_{ox} und der Einflußflächen x.

Knoten	w_a	y_o	$w_a \cdot y_o \cdot 10^6$	$w_b = w_a \cdot x$	$y = y_o - y_{ox}$ m	$w_c = w_a \cdot y$	$w_b \cdot x$	$w_c \cdot y$
0	$+0{,}6511 \cdot 10^{-6}$	4,012	$+0{,}2050$	$+1{,}5330\ 10^{-6}$	$-3{,}280$	$-0{,}1676 \cdot 10^{-6}$	$+\ 45{,}9900 \cdot 10^{-6}$	$+\ 0{,}5497 \cdot 10^{-6}$
1	$+0{,}2660 \cdot 10^{-6}$	0	0	$+7{,}1820 \cdot 10^{-6}$	$-7{,}292$	$-1{,}9397 \cdot 10^{-6}$	$+193{,}0140 \cdot 10^{-6}$	$+14{,}1443 \cdot 10^{-6}$
2	$+0{,}2872 \cdot 10^{-6}$	7,438	$+2{,}1362$	$+6{,}8928 \cdot 10^{-6}$	$+0{,}146$	$+0{,}0419 \cdot 10^{-6}$	$+165{,}4272 \cdot 10^{-6}$	$+\ 0{,}0061 \cdot 10^{-6}$
3	$+0{,}2300 \cdot 10^{-6}$	3,331	$+0{,}7661$	$+4{,}8300 \cdot 10^{-6}$	$-3{,}961$	$-0{,}9110 \cdot 10^{-6}$	$+101{,}4300 \cdot 10^{-6}$	$+\ 3{,}6085 \cdot 10^{-6}$
4	$+0{,}3702 \cdot 10^{-6}$	9,945	$+3{,}6816$	$+6{,}6636 \cdot 10^{-6}$	$+2{,}653$	$+0{,}9821 \cdot 10^{-6}$	$+119{,}9448 \cdot 10^{-6}$	$+\ 2{,}6055 \cdot 10^{-6}$
5	$+0{,}2039 \cdot 10^{-6}$	5,675	$+1{,}1571$	$+3{,}0585 \cdot 10^{-6}$	$-1{,}617$	$-0{,}3297 \cdot 10^{-6}$	$+\ 45{,}8775 \cdot 10^{-6}$	$+\ 0{,}5331 \cdot 10^{-6}$
6	$+0{,}2142 \cdot 10^{-6}$	11,664	$+2{,}4984$	$+2{,}5704 \cdot 10^{-6}$	$+4{,}372$	$+0{,}9365 \cdot 10^{-6}$	$+\ 30{,}8448 \cdot 10^{-6}$	$+\ 4{,}0925 \cdot 10^{-6}$
7	$+0{,}1927 \cdot 10^{-6}$	7,176	$+1{,}3828$	$+1{,}7343 \cdot 10^{-6}$	$-0{,}116$	$-0{,}0224 \cdot 10^{-6}$	$+\ 15{,}6087 \cdot 10^{-6}$	$+\ 0{,}0026 \cdot 10^{-6}$
8	$+0{,}2143 \cdot 10^{-6}$	12,669	$+2{,}7150$	$+1{,}2858 \cdot 10^{-6}$	$+5{,}377$	$+1{,}1523 \cdot 10^{-6}$	$+\ 7{,}7148 \cdot 10^{-}$	$+\ 6{,}1959 \cdot 10^{-6}$
9	$+0{,}1814 \cdot 10^{-6}$	7,898	$+1{,}4327$	$+0{,}5442 \cdot 10^{-6}$	$+0{,}606$	$+0{,}1099 \cdot 10^{-6}$	$+\ 1{,}6326 \cdot 10^{-}$	$+\ 0{,}0666 \cdot 10^{-6}$
10	$+0{,}0259 \cdot 10^{-6}$	13,0	$+0{,}3367$	0	$+5{,}708$	$+0{,}1478 \cdot 10^{-6}$	0	$+\ 0{,}8436 \cdot 10^{-6}$
	$\frac{1}{2}\sum w_a = +\frac{2{,}2369}{10^6}$		$\frac{1}{2}\sum w_a y_o = +\frac{16{,}3116}{10^6}$	$\frac{1}{2}\sum w_b = +\frac{36{,}2946}{10^3}$		$\frac{1}{2}\sum w_c = +\frac{0{,}0001^*}{10^6}$	$\frac{1}{2}\sum w_b \cdot x = +\frac{728{,}3844}{10^6}$	$\frac{1}{2}\sum w_c \cdot y = +\frac{32{,}6484}{10^6}$

* Fehler gegen 0,0000 gleich $+\frac{1}{5 \cdot 10^6}$ mm.

2. *Maßstäbe und Polweiten.* $e = n = g = h$ ist wie früher gleich 5,625 cm angenommen.

1 w-Einheit ist

für w_a gleich $1{,}25 \cdot 10^6$ cm,
- w_b - $0{,}075 \cdot 10^6$ cm,
- w_c - $2{,}0 \cdot 10^6$ cm.

Daraus die *Polweiten*:

$$H_{wb} = \frac{\sum w_b \cdot x}{e} = \frac{2 \cdot 728{,}3844 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}075 \cdot 10^6}{5{,}625 \cdot \frac{16}{3}} = 3{,}642 \text{ cm},$$

$$H_{wc} = \frac{\sum w_c \cdot y}{e} = \frac{2 \cdot 32{,}6484 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}0 \cdot 10^6}{5{,}625 \cdot \frac{16}{3}} = 4{,}353 \text{ cm}.$$

Danach können die Einflußflächen der X dargestellt werden, wie es in der ersten Bearbeitung in den Fig. 258—263 geschehen ist. Dabei können die Maßstäbe für die *Ordinaten* η der Einflußflächen beibehalten werden.

3. Für eine Darstellung von *Einflußflächen der Stabkräfte* gilt die Gleichung

$$S_m = \frac{\eta_{am}}{r_m} - \left(\frac{\eta_a}{r_m} + \eta_b \frac{x_m}{r_m} + \eta_c \frac{y_m}{r_m}\right),$$

worin $\frac{\eta_{am}}{r_m} = S_0$, d. h. gleich der für den Zustand »$X = 0$« berechneten Stabkraft ist. Führt man Hilfstangentenwinkel ein, so erhält man

$$S_m = (\eta_{am} - \eta_a)\,\text{tg}\,\alpha - \eta_b \cdot \text{tg}\,\beta - \eta_c\,\text{tg}\,\gamma, \tag{296}$$

wenn

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{r_m}; \quad \text{tg}\,\beta = \frac{x_m}{r_m}; \quad \text{tg}\,\gamma = \frac{y_m}{r_m}$$

gemacht wird. Das Weitere ergibt sich aus **32**, b.

§ 9. Durchgehende gerade Balkenträger auf unverschiebbaren Stützpunkten.

51. Allgemeines über eine Näherungsberechnung für unverschiebliche Stützpunkte.

a. Vereinfachte Biegelinien.

1. Gelenklose, über mehr als zwei Stützen durchgehende Träger sind statisch unbestimmt. Wird, wie bei den Bogenträgern geschehen ist, bei den gegliederten Trägern *innere* Bestimmtheit vorausgesetzt, so handelt es sich nur um die Berechnung der überzähligen *äußern* Kräfte und diese sind für Fachwerke und Vollwandträger gleich, abgesehen von den bekannten Unterschieden bei der Darstellung der Biegelinien.

Die elastische Linie der Vollwandträger und die Biegelinie des Hauptsystems der Fachwerke spielt bei der Berechnung eine Hauptrolle. Deshalb hat Verfasser bereits im § 2 (unter **6**) die elastische Linie als Berechnungsgrundlage statisch unbestimmter gerader Vollwandträger betrachtet und dabei die Berechnung eines durchgehenden Trägers auf drei Stützen gegeben (**6**, a und **7**, a). Ferner ist (unter **36**, b, Aufgabe 44) die Berechnung eines über drei Stützen durchgehenden Fachwerkträgers mit Hilfe einer Biegelinie durchgeführt, die gleichzeitig Einflußlinie der überzähligen Größe ist. Es empfiehlt sich, diese beiden Aufgaben vor dem Studium des Folgenden durchzuarbeiten.

2. Weil die Biegelinie *genau* nur zu zeichnen ist, wenn bei der Vollwand alle Trägheitsmomente des Trägers und beim Fachwerk dessen Grundmaße und Stabquerschnitte sämtlich gegeben sind, so werden praktische Aufgaben meist zuerst durch ein *Näherungsverfahren* gelöst, wie dies auch bei den Bogenträgern (**50**) geschehen ist. Danach werden dann Maße und Querschnitte bestimmt, mit deren Hilfe die Rechnung schließlich noch einmal nach einem genaueren Verfahren durchgeführt werden kann. Das Näherungsverfahren gründet sich auf

die Annahme, daß es zulässig sei, *bei der Darstellung einer Biegelinie die Momentenfläche als Belastungsfläche zu verwenden.* Nun sind aber die elastischen Kräfte (nach § 2 und § 4) aus den Gleichungen

$$w = \frac{M}{EJ} \text{ (bei Vollwandträgern)}$$

und $$w = \frac{\Delta s}{r} = \frac{Ms}{EFr^2} = \frac{Mk}{r^2} \text{ (bei Fachwerken)}$$

zu berechnen. Jene Annahme ist also ganz zutreffend nur dann, wenn (bei *unveränderlicher* Dehnungszahl E) in Vollwandträgern auch das Trägheitmoment J und in Fachwerken auch die Größe $\frac{s}{Fr^2}$ in jedem Schnitte unveränderlich wäre. Das ist aber in der Regel nicht der Fall. Trotzdem wird (mit Recht) in vielen Fällen, um die überzähligen Größen endgültig zu berechnen, die Biegelinie unter der beschriebenen Annahme gezeichnet, selbst wenn J auch nicht überall gleich groß oder die Veränderlichkeit der Größe $\frac{k}{r^2}$ nicht zu erheblich ist. Bei Trägern mit stark veränderlichen Höhen, namentlich wenn es Fachwerke sind, wird der ersten angenäherten Ermittelung der Querschnitte mit Hilfe *vereinfachter Biegelinien* immer noch eine genauere endgültige Berechnung folgen müssen.

b. Stützenmomente und Momentenflächen.

1. Die Stützpunkte des Trägers sollen *unverschiebbar* sein und *in gleicher Höhe liegen.* Der Einfluß *elastischer Stützenverschiebungen* und der Temperaturspannungen soll später im besondern betrachtet werden.

An den Trägerenden setzen wir einstäbige Stützung voraus. Dort ist daher das Moment gleich Null. Momente treten dann nur an den Zwischenstützen auf. Sie sind je nach der Art der Belastung negativ oder positiv und sollen *Stützenmomente* genannt werden.

Bei einem durchgehenden Träger auf n Stützen sind (nach obigen Voraussetzungen) immer $n - 2$ *überzählige Größen* zu berechnen. Als solche betrachten wir die Stützenmomente. Sobald deshalb diese für irgend eine Art der Belastung ermittelt worden sind, muß die gesamte Momentenfläche des durchgehenden Trägers aus den einfachen positiven Momentenflächen der einzelnen Trägeröffnungen abzuleiten sein (Fig. 264). Man braucht nur die Momente M_b, M_c, M_d in den Stützen b, c, d als Ordinaten aufzutragen, um den *Schlußlinienzug* $a'—b'—c'—d'—e'$ zu erhalten (Fig. 265), der die gesamte (schraffiert dargestellte) Momentenfläche gibt. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Darstellung läßt sich

in verschiedener Weise geben. Am einfachsten wohl, wenn man das *Hauptsystems* eines Trägers auf n Stützen, als n aufeinander folgende *einfache* Träger gebildet denkt und über jeder der mittleren $(n - 2)$ Stützen ein Stützenmoment X als überzählige Größe hinzufügt. Die Summierung des Zustandes »$X = 0$« und aller Zustände »X« gibt dann unmittelbar die in Fig. 265 dargestellte Momentenfläche.

Ein weiterer Beweis liegt in dem (unter I. **62**, a) beschriebenen Verfahren zur Darstellung der Momentenfläche eines durchgehenden *Gelenk*trägers. Dabei betrachtet man (wie dies auch in der Aufgabe 15 unter **7**, a geschehen ist) den durchgehenden Träger als *Auslege*träger,

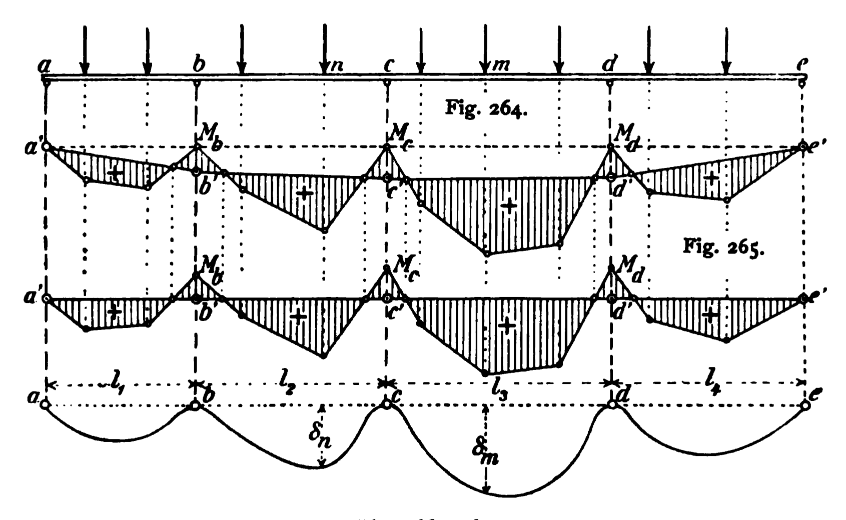


Fig. 266—267.

dessen $n - 2$ Gelenke in den Momentennullpunkten liegen: Nach erfolgter Bestimmung der $n - 2$ Stützenmomente sind auch die Wendepunkte der elastischen Linie gegeben. Wählt man $(n - 2)$ davon als Gelenkpunkte, so muß der Schlußlinienzug der Momentenfläche durch diese Punkte verlaufen und dabei auf den Stützenlotrechten die Ordinaten von M_b, M_c bis M_{n-1} abschneiden. Umgekehrt kann man zuerst auch die Stützenmomente auftragen, um dadurch den richtigen Schlußlinienzug für den durchgehenden Träger zu erhalten. Wie man zweckmäßig schließlich die Momentenfläche auf einen *geraden Schlußlinienzug* (Fig. 266) überträgt, ist bereits (unter I. **62** b) beschrieben.

2. Wir nehmen an, es sei eine *vereinfachte Biegelinie* mit Hilfe der Momentenfläche als Belastungsfläche gezeichnet worden (Fig. 267). Dann

kehrt die Biegelinie auf den positiven Strecken der Momentenfläche ihre Hohlseite nach oben, auf den negativen Strecken dagegen nach unten. Ihre Wendepunkte liegen, wie schon erwähnt, lotrecht unter den Momentennullpunkten. Sobald die Momentenfläche des durchgehenden Trägers mit Hilfe der überzähligen Größen der Stützenmomente dargestellt ist, sind auch die *Querkräfte* und *Stützenkräfte* gegeben und (nach I. **62**, a) in bekannter Weise zu berechnen.

52. Grundlagen des Näherungsverfahren bei Verwendung vereinfachter Biegelinien.

Dies Verfahren wird in allen praktischen Fällen als ein endgültiges gebraucht werden dürfen, wenn bei Vollwandträgern die Trägheitsmomente der verschiedenen Querschnitte nicht zu erheblich voneinander abweichen und ebenso wenn dazu bei *Parallel*fachwerken der Einfluß der Wand auf die Gestalt der Biegelinie vernachlässigt werden darf. Bei den Darlegungen dieser und der folgenden Nummer hat Verfasser die ausführliche und ausgezeichnet klare Arbeit von W. RITTER-Zürich[1] benutzt.

a. Drittelslinien.

1. Wir betrachten zuerst die Gestalt einer Momentenfläche, wenn nur eine einzige Öffnung des Trägers belastet ist, das sei z. B. die 2. Öffnung eines Trägers auf 5 Stützen (Fig. 268) mit den Weiten l_1 bis l_4. Der Stützendruck D ist dann negativ und daher ist das Stützenmoment M_d ausnahmsweise positiv.

Die Momentenfläche der zweiten Öffnung kann als die positive Momentenfläche des einfachen Balkens bc, vermindert um die Fläche des Trapezes $b'b_1c_1c'$ aufgefaßt werden. Das Trapez zerlegen wir durch die $\overline{b'c_1}$ in zwei Dreiecke.

In der dritten Öffnung ist die Momentenfläche gleich dem Unterschiede der beiden Dreiecksflächen $c_1c'd'$ und c_1d_1d'. In den Endöffnungen (l_1 und l_4) bildet die Momentenfläche immer ein Dreieck. Denkt man sich in dem Schwerpunkte jeder der genannten Dreiecksflächen und auch der einfachen Momentenfläche der belasteten Öffnung eine entsprechend positiv oder negativ gerichtete elastische W-Kraft wirkend, so kann man das Krafteck der W (Fig. 270) bilden und dazu das zweite, die Biegelinie darstellende Seileck zeichnen (Fig. 271). Dabei ist die Reihenfolge und der Sinn der W zu beachten. W_3, W_6, W_7 sind positiv, die übrigen W negativ gerichtet. Die Biegelinie zeigt besondere Eigenschaften, aus welchen wesentliche Berechnungsgrundlagen abzuleiten sind.

[1] Dr. W. RITTER. Anwendungen der graphischen Statik. Dritter Teil. Der kontinuierliche Balken. Zürich, 1900.

2. Alle Angriffspunkte der elastischen Kräfte (mit Ausnahme des zur einfachen Momentenfläche gehörenden) liegen in *Drittelspunkten* der betreffenden Öffnungen (Fig. 270). Ferner haben die Dreiecke $a' b_1 b'$ und $b_1 b' c_1$ gleiche Höhen, ihre Inhalte verhalten sich also wie ihre Grundlinien, d. h. wie $l_1 : l_2$. Verlängert man daher die an W_1 und W_2 stoßenden äußeren Seiten der Biegefläche bis zu ihrem Schnittpunkte b_2 — das ist der Angriffspunkt ihrer Mittelkraft — so liegt b_2 auf einer Lotrechten, die den wagerechten Abstand von W_1 und W_2 in umgekehrtem Verhältnisse dieser beiden Kräfte (also wie $l_2 : l_1$) teilt. Weil

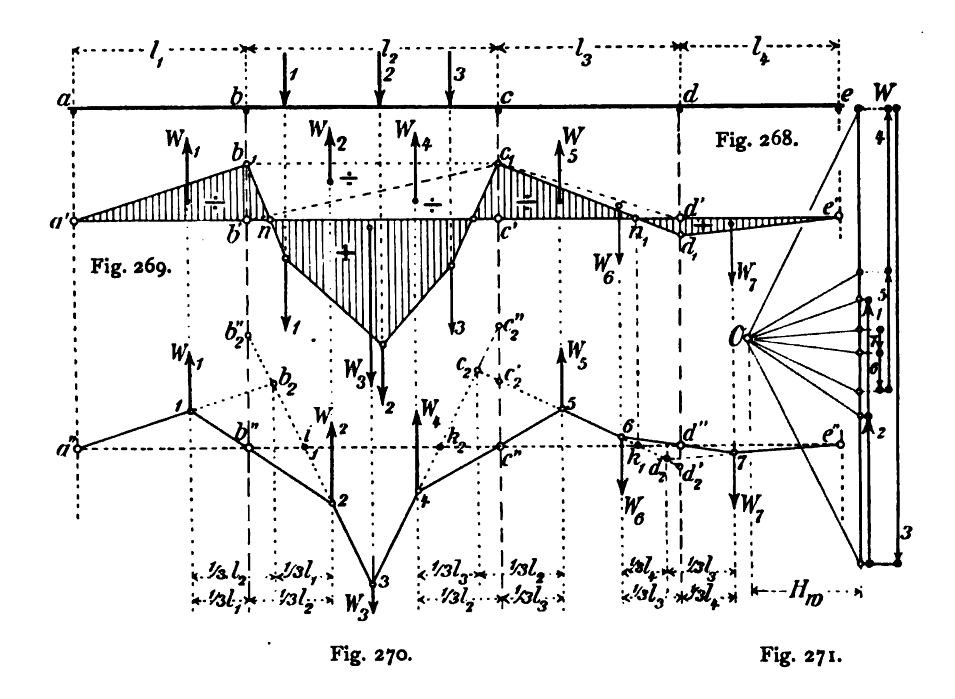


Fig. 270. Fig. 271.

der genannte Abstand gleich einem Drittel von $(l_1 + l_2)$ ist, so muß b_2 auf einer Lotrechten liegen, die man erhält, wenn man die beiden Drittel $\left(\frac{l_1}{3} \text{ und } \frac{l_2}{3}\right)$ in den zugehörigen Stützweiten miteinander vertauscht oder verschränkt. Ritter nennt diese Lotrechte die *verschränkte Drittellinie*.

In gleicher Weise schneiden sich die an W_4 und W_5 gelegten äußern Seiten der Biegefläche im Angriffspunkte c_2 ihrer Mittelkraft, also auf einer verschränkten Drittellinie der Stützweiten l_2 und l_3 (Fig. 270). Aus

gleichen Gründen liegt die Mittelkraft von W_6 und W_7 in einer verschränkten Drittellinie der 3. und 4. Öffnung. *Danach liegen sämtliche Ecken der Biegefläche, mit Ausnahme der Ecke bei W_3, auf Drittellinien und die Mittelkräfte von W_1 und W_2, W_4 und W_5, W_6 und W_7 fallen in verschränkte Drittellinien, ganz gleich in welcher Art die 2. Öffnung belastet ist.*

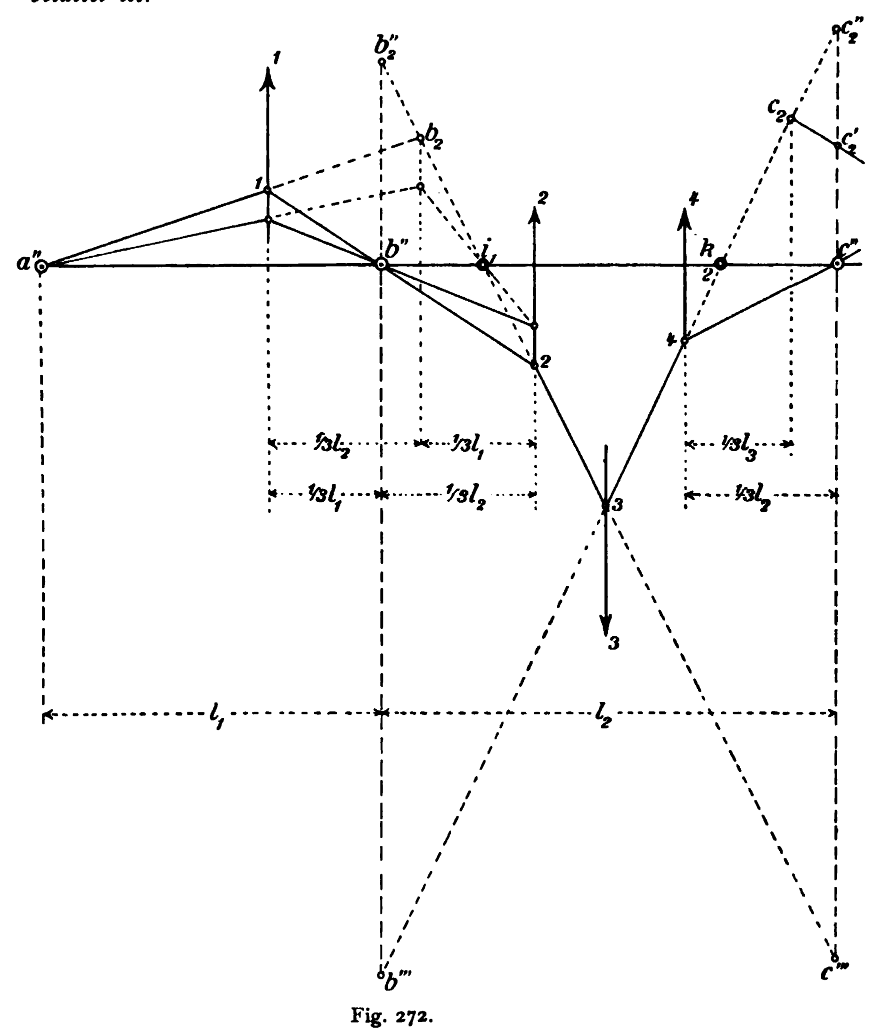


Fig. 272.

b. Festpunkte und Festlinien.

1. Die Fig. 272 stellt den linken Teil der in der Fig. 270 gezeichneten Biegefläche in größerem Maßstabe dar. Man beachte jetzt das

Dreieck 1—2—b_2, das von den Verlängerungen der an 1 und 2 stoßenden und der dazwischen liegenden 2. Seite der Biegefläche gebildet wird. Jeder seiner Eckpunkte liegt auf einer *festen* Lotrechten und zwei seiner Seiten verlaufen durch *feste* Punkte, d. h. Seite 1—b_2 durch a'' und Seite 1—2 durch b''. *Aus geometrischen Gründen muß daher auch die dritte Seite (nämlich b_2—2) durch einen Festpunkt gehen, der mit den beiden andern festen Punkten auf ein und derselben Geraden liegt.* Dieser Festpunkt ist das in der Trägerlinie liegende i_1. Die gleichen Verhältnisse liegen in den beiden Endöffnungen 3 und 4 der Fig. 270 vor. Dort ist k_1 der Festpunkt in der Trägerlinie, durch welchen (von e'' ab gerechnet) die letzte der drei Seiten der Biegelinie e''—7—6—5 verlaufen muß. Ebenso verläuft die letzte Seite des Biegelinienzuges 6—5—4—3 durch einen Festpunkt k_2 der zweiten Öffnung.

2. Es bleibt jetzt noch nachzuweisen, daß *die Lage der Festpunkte nur von dem Verhältnisse der betreffenden Stützweiten, nicht aber von der Art der Belastung der Öffnungen des Trägers abhängig ist.*

In der Fig. 270 sind c'_2 und d'_2 die Punkte, in welchen die Seite 5—6 die betreffenden Stützenlotrechten schneidet. Faßt man die Strecken $c''c'_2$ und $d''d'_2$ als Momente der elastischen Kräfte W_5 und W_6 auf, so erkennt man, wie diese Strecken sich wie $W_5 : W_6$ verhalten müssen, weil deren Hebelarme in bezug auf die zugehörigen Stützenlotrechten gleich groß, nämlich ein Drittel von l_3 sind. Ferner ist aber in Fig. 269

$$\frac{W_5}{W_6} = \frac{\overline{c'c_1}}{\overline{d'd_1}},$$

woraus folgt, daß der Festpunkt k_1 *lotrecht unter dem Nullpunkte n_1 der Momentenfläche liegen muß.* Wäre nicht die zweite, sondern die erste Öffnung belastet, so wäre das Moment lotrecht über k_2 ebenfalls gleich Null.

Das Nämliche läßt sich für den Punkt i_1 nachweisen, wenn die dritte oder vierte Öffnung belastet ist. Beachtet man noch, daß die Stützenmomente in a und e (nach unserer Voraussetzung) auch gleich Null sind, so lassen sich die vorstehenden Darlegungen in folgenden Satz fassen:

In jeder Öffnung eines durchgehenden Trägers gibt es in der Trägerlinie zwei Festpunkte i und k, die von den Verhältnissen der Stützweiten zueinander, nicht aber von der Art der Belastung der Öffnungen abhängig sind. Das Moment in einem Punkte i ist für alle Belastungen der rechts davon liegenden Öffnungen gleich Null, ebenso auch in einem Punkte k für alle Belastungen der links davon liegenden Öffnungen. Der linke Stützpunkt des Trägers wird hierbei als i-Punkt der ersten, der rechte Stützpunkt als k-Punkt der letzten Öffnung angesehen.

Aus obigen Darlegungen folgt weiter, daß in den durch bestimmte Festpunkte verlaufenden Lotrechten — den *Festlinien* — *die Momentennullpunkte und die Wendepunkte der Biegelinie liegen.*

3. *Die Darstellung der Festpunkte.*

Hierzu diene wieder der Träger auf 5 Stützen (Fig. 273). Zuerst zeichne man in allen Öffnungen die Drittelslinien. Dann ziehe man vom Endstützpunkt a aus eine beliebige Gerade, von welcher die zweite Drittelslinie der ersten Öffnung in 1 und die verschränkte Drittelslinie der zweiten Öffnung in b_2 getroffen wird. Weiter lege

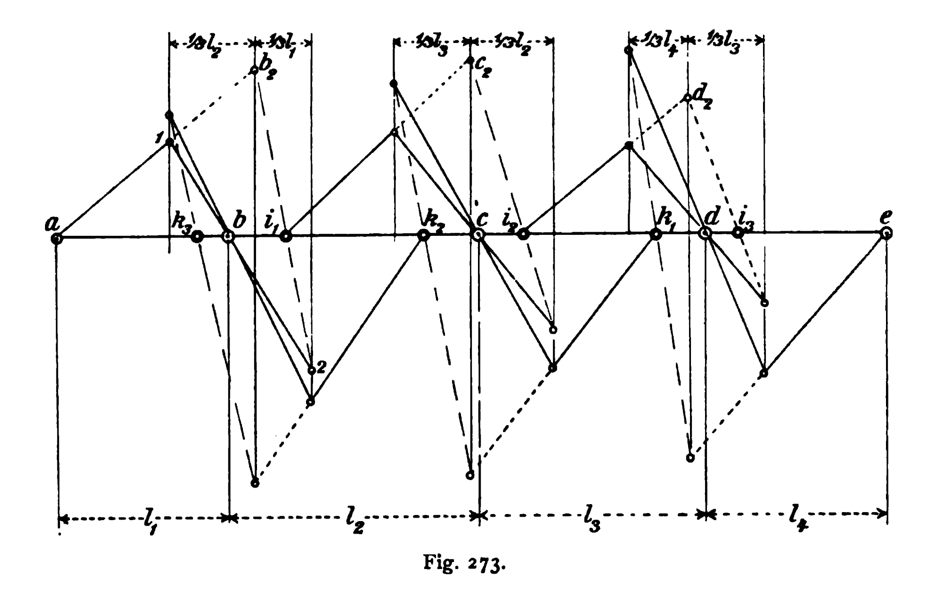


Fig. 273.

man eine Gerade durch die Punkte 1 und b und verlängere sie bis zu ihren Schnittpunkte 2 mit der ersten Drittelslinie der zweiten Öffnung. Dann trifft die Gerade b_2—2 *den ersten Festpunkt* i_1 der zweiten Öffnung.

Vom Festpunkte i_1 ausgehend wiederholt man das soeben erläuterte Verfahren und erhält so den zweiten Festpunkt i_2 der dritten Öffnung. Schließlich wird das Verfahren von i_2 aus nochmals durchgeführt, um den Festpunkt i_3 der vierten Öffnung zu erhalten. Die Festpunkte k_1 bis k_3 findet man ganz in gleicher Weise, wenn man von e ausgeht (Fig. 273). Bei symmetrischer Anordnung der Stützweiten in bezug auf die Trägermitte liegen auch die Festpunkte symmetrisch.

c. Kreuzlinien und ihre Verwendung zur Bestimmung der Stützenmomente.

Die Verbindungslinien zwischen den Punkten b''_2 *und* c''' *einerseits und den Punkten* c''_2 *und* b''' *anderseits* (Fig. 272), *deren Schnittpunkt auf der Schwerlinie der einfachen Momentenfläche der belasteten Öffnung liegt, heißen Kreuzlinien.* Als Beispiel diene wieder der Träger auf fünf Stützen, der in der zweiten Öffnung belastet ist (Fig. 268—271). Die Festpunkte seien vorbestimmt und darauf die Stützenmomente M_b und M_c und die ganze Momentenfläche darzustellen. Dazu beachte man zuerst, wie die in der Fig. 272 auf den betreffenden Stützenlotrechten abgeschnittenen Strecken $b'''b''_2$ und $c'''c''_2$ den statischen Momenten der Kraft W_3, bezogen auf jene Lotrechten, proportional sind. W_3 entspricht aber dem Inhalte der *einfachen Momentenfläche* der zweiten Öffnung, ist also *unabhängig* von den übrigen Belastungen des durchgehenden Trägers. Die Strecken $b'''b''_2$ und $c'''c''_2$ sind also in jedem Falle bekannt und man kann sie benutzen, um die gesamte Momentenfläche des durchgehenden Trägers darzustellen. Zu diesem Zwecke wollen wir die Polweite H_w des Kraftecks der Fig. 271 derart bestimmen, daß in der damit gezeichneten Biegefläche der Fig. 270 von den an die Kraft W_3 stoßenden Seiten die Strecken der Stützenmomente auf den Stützenlotrechten unmittelbar abgeschnitten werden. Betrachten wir dazu zuerst die Momente der Kräfte W_2 und W_4, bezogen auf die Stützenlotrechten. Es ist

$$W_2 \cdot \frac{l_2}{3} = \left(\frac{\overline{b'b_1} \cdot l_2}{2}\right)\frac{l_2}{3} = \frac{\overline{b'b_1} \cdot l_2^2}{6},$$

$$W_4 \cdot \frac{l_2}{3} = \left(\frac{\overline{c'c_1} \cdot l_2}{2}\right)\frac{l_2}{3} = \frac{\overline{c'c_1} \cdot l_2^2}{6}.$$

Die Strecken $b'b_1$ und $c'c_1$ sind aber (nach irgend einem Maßstabe abgegriffen) gleich den gesuchten Stützenmomenten. Das gibt

$$W_2 \cdot \frac{l_2}{3} = \frac{M_b l_2^2}{6},$$

$$W_4 \cdot \frac{l_2}{3} = \frac{M_c l_2^2}{6}.$$

Ferner gelten zwischen dem Krafteck der Fig. 271 und dem damit gezeichneten Seileck der Biegelinie die allgemeinen Beziehungen

$$\overline{b''b''_2} \cdot H_w = W_2 \cdot \frac{l_2}{3},$$

$$\overline{c''c''_2} \cdot H_w = W_4 \cdot \frac{l_2}{3}.$$

Das gibt

$$\overline{b''b''_2} \cdot H_w = \frac{M_b \cdot l_2^2}{6},$$

$$\overline{c''c''_2} \cdot H_w = \frac{M_c \cdot l_2^2}{6}.$$

Macht man also die Polweite $H_w = \frac{l_2^2}{6}$, so erhält man

$$M_b = \overline{b''b''_2}$$

und

$$M_c = \overline{c''c''_2}. \qquad (297)$$

Um die Stützenmomente zu finden, verwendet man (nach obigem) die *Kreuzlinien* wie folgt (Fig. 274):

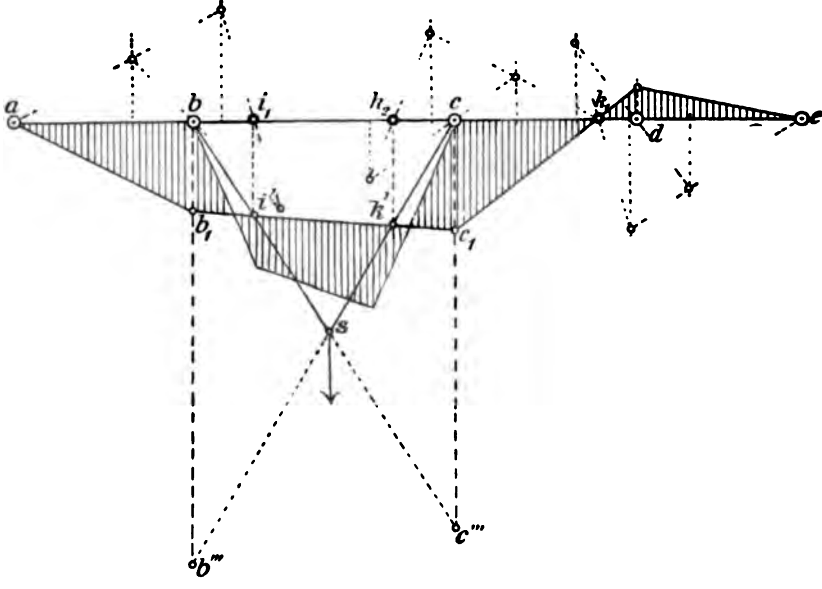


Fig. 274.

Nachdem die Festpunkte bestimmt worden sind, berechnet man Inhalt und Schwerpunkt der einfachen Momentenfläche in der belasteten Öffnung. Inhalt multipliziert mit dem Schwerpunktsabstande von einer Stützenlotrechten und dividiert mit einem Sechstel des Quadrates der belasteten Stützweite gibt dann die Strecken $b'''b''_2$ und $c'''c''_2$ der Fig. 272.

Diese Strecken sind in der Fig. 274 von b und c aus aufgetragen. Dadurch erhält man die Kreuzlinien $\overline{bc'''}$ und $\overline{cb'''}$. Treffen diese die Festlinien in den Punkten i' und k', so schneidet die Verlängerung der

Geraden $i'k'$ auf den benachbarten Stützenlotrechten die Strecken der gesuchten Stützenmomente ab. Verbindet man dann deren Endpunkte b_1 und c_1 mit den Festpunkten der übrigen Öffnungen, so erhält man dadurch die gesamte Momentenfläche des durchgehenden Trägers. Diese ist in der Fig. 274 durch Schraffieren hervorgehoben worden.

53. Darstellung von Momentenflächen mit Hilfe der vereinfachten Biegelinien.

a. Eine Öffnung ist gleichmäßig und voll belastet. Die einfache Momentenfläche der belasteten Öffnung ist in diesem Falle eine Parabel (Fig. 275). Deren Inhalt ist gleich zwei Drittel Pfeilhöhe f mal Stützweite l. Das statische Moment der zugehörigen elastischen Kraft, bezogen auf die Stützenlotrechten, beträgt demnach ein Drittel $f l^2$. Bezeichnet man die Länge der Abschnitte der Kreuzlinien auf jenen Lotrechten mit z_k, so erhält man

$$z_k = \frac{\frac{1}{3} f l^2}{\frac{1}{6} l^2} = 2 f. \tag{298}$$

Der Schnittpunkt s der Kreuzlinien fällt deshalb in den Scheitelpunkt der Parabel. Die Momentenfläche ist danach wie folgt zu zeichnen:

Verbinde den Scheitelpunkt s der einfachen Momentenparabel durch Gerade mit den Stützpunkten der belasteten Öffnung, dann liefern die Schnittpunhte i' und k' diser Geraden mit den Festlinien je einen Punkt der gesuchten Momentenfläche des durchgehenden Trägers.

Danach sind die Momentenflächen der beiden Fig. 275 und 276 gezeichnet, die ohne besondere Erläuterung an sich verständlich sind.

Hiernach ist leicht einzusehen, wie man für die Belastung mehrerer oder aller Öffnungen die Momentenfläche darstellen kann: Man behandelt jede belastete Öffnung, wie in den Fig. 275 und 276, für sich und summiert darauf für jeden Stützpunkt alle erhaltenen Stützenmomente, unter Berücksichtigung der Vorzeichen.

b. Die wandernde Einzellast. Die Einzellast P ruhe in der zweiten Öffnung (Fig. 277) im Punkte s, dessen Abstände von den Stützen b und c mit x und $(l_2 - x)$ bezeichnet werden. Dann bildet die einfache Momentenfläche ein Dreieck bsc des Inhaltes $\frac{1}{2} l_2 h$, wenn h seine Höhe vorstellt. Die Strecken z_k der Kreuzlinien berechnen sich danach aus

$$z_{kb} = \frac{\left(\frac{l_2 h}{2}\right)\left(\frac{l_2 + x}{3}\right)}{\frac{1}{6} l_2^2} = \frac{h}{l_2}(l_2 + x)$$

und

$$z_{kc} = \frac{\left(\frac{l_2 h}{2}\right)\left(\frac{2 l_2 - x}{3}\right)}{\frac{1}{6} l_2^2} = \frac{h}{l_2}(2 l_2 - x). \tag{299}$$

Die Hilfsstrecken z_k lassen sich mit Hilfe dieser Ausdrücke leicht darstellen: *Man trage zu beiden Seiten des Lastpunktes die Strecke* l_2 *auf. Von den dadurch erhaltenen Punkten* b' *und* c' *lege man Gerade durch die Spitze* s *des Dreiecks* $b\,c\,s$. *Diese Geraden schneiden auf den*

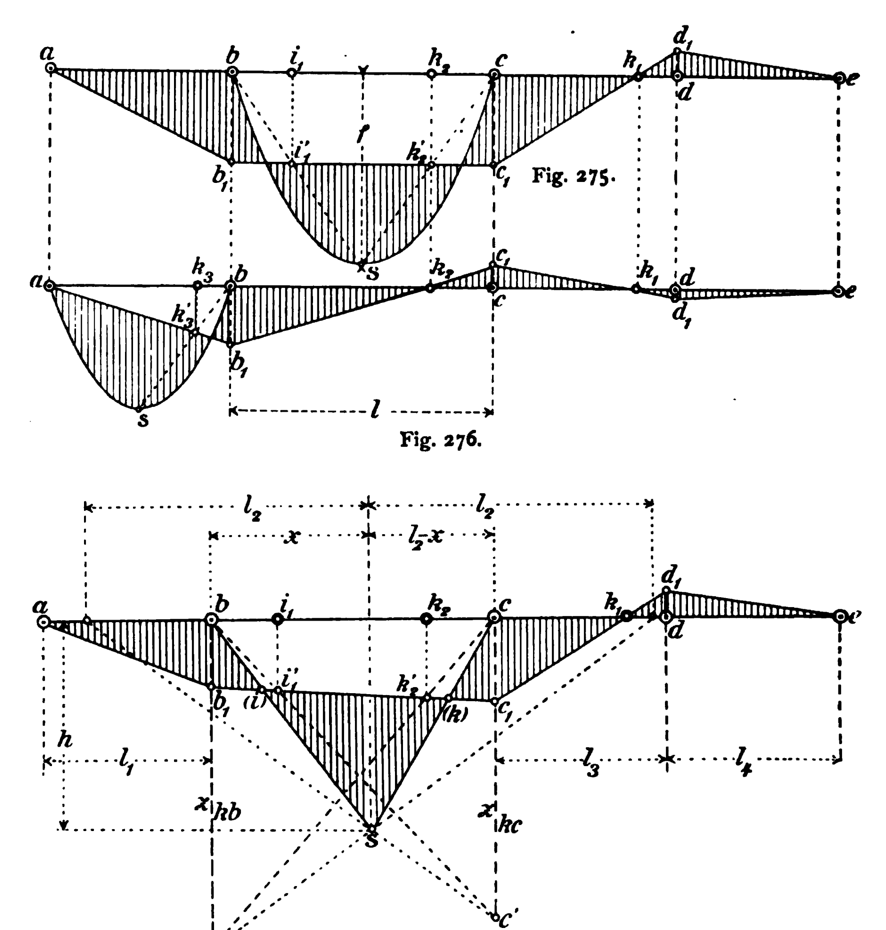


Fig. 275.

Fig. 276.

Fig. 277.

Stützenlotrechten der belasteten Öffnung die gesuchten Strecken z_k *ab.* Denn es ist gemacht

$$\frac{z_{kb}}{h} = \frac{l_2 + x}{l_2}$$

und

$$\frac{z_{kc}}{h} = \frac{2\,l_2 - x}{l_2}, \qquad (300)$$

wie es nach den (Gl. 299) vorgeschrieben war. *Damit ist die Momentenfläche festgelegt.*

In einer belasteten Mittelöffnung gibt es immer zwei Punkte (i) und (k), in denen das Moment verschwindet, die also *Wendepunkte der Biegelinie* sind. Man nennt diese Punkte zuweilen »*bewegliche Wendepunkte*«. RITTER weist nach, wie sich mit der Lage des Lastpunktes die Lage dieser beweglichen Wendepunkte ändert: *Wandert die Einzellast von links nach rechts, so bewegen sich* (i) *und* (k) *in gleicher Richtung, bleiben dabei aber immer innerhalb der belasteten Stützweite und außerhalb der Festlinienweite* ik.

54. Einflußlinien.

Nachdem für alle in Frage kommenden *Lastpunkte* (nach Fig. 277) die Momentenfläche gezeichnet ist, läßt sich danach die Einflußlinie des *Momentes* oder der *Querkraft* für einen beliebigen Schnitt n des Trägers (II. **2**) darstellen. Diese Einflußlinien sind das genaueste und bequemste Hilfsmittel zur Ermittelung der gefährlichsten Lastlagen.

a. Momente.

Aufgabe 62. *Es soll die Einflußlinie des Momentes* M_2 *für den Schnitt* 2 *der* 2. *Öffnung* bc *des in* Fig. 278—283 *dargestellten Trägers auf fünf Stützen gezeichnet werden. Die vier Öffnungen haben der Reihe nach* 45 m—60 m—60 m—45 m *Stützweite.*

1. Wegen der vorhandenen symmetrischen Anordnung sind in der Fig. 278 nur die beiden ersten Öffnungen dargestellt. In der Fig. 278 wandert die Einzellast in der zweiten, in der Fig. 280 in der ersten Öffnung. Für jeden der Lastpunkte 1, 2, 3, 4, 3′, 2′ und 1′ der zweiten Öffnung wurde zuerst die einfache Momentenfläche der Einzellast gezeichnet. Das gab lauter Dreiecke mit den Spitzen 1 bis 1′. Nach dem (unter **53**, b) beschriebenen Verfahren konnten jetzt auf der Stützenlotrechten die untern Punkte 1, 2, 3, 4 der Kreuzlinien gefunden werden. Die dazu notwendigen Geraden sind durch rote Farbe angedeutet. So gab z. B. die Verbindung des Punktes 4 der ersten Öffnung mit der Spitze 4 der einfachen Momentenfläche für Lastpunkt 4 den Endpunkt 4 der Kreuzlinien für die Lage der Einzellast in 4. Die derart erhaltenen Kreuzlinien treffen auf der Festlinie durch i diejenigen Punkte, durch welche der Schlußlinienzug der betreffenden Momentenfläche verlaufen muß. Weil die Lastpunkte in der Stützweite gleichweit voneinander entfernt sind, so liegen die Endpunkte 1, 2, 3, 4 der Kreuzlinien in der Stützenlotrechten b denjenigen in der Stützenlotrechten c wagerecht gegenüber. Dadurch sind auch alle Schnittpunkte der Festlinie durch k mit den Kreuzlinien 1 bis 4 gegeben. Somit

fanden sich sämtliche sieben Schlußlinienstrecken der zweiten Öffnung und dadurch war der über die vier Öffnungen reichende *Schlußlinienzug* für jede der sieben Momentenflächen festgelegt.

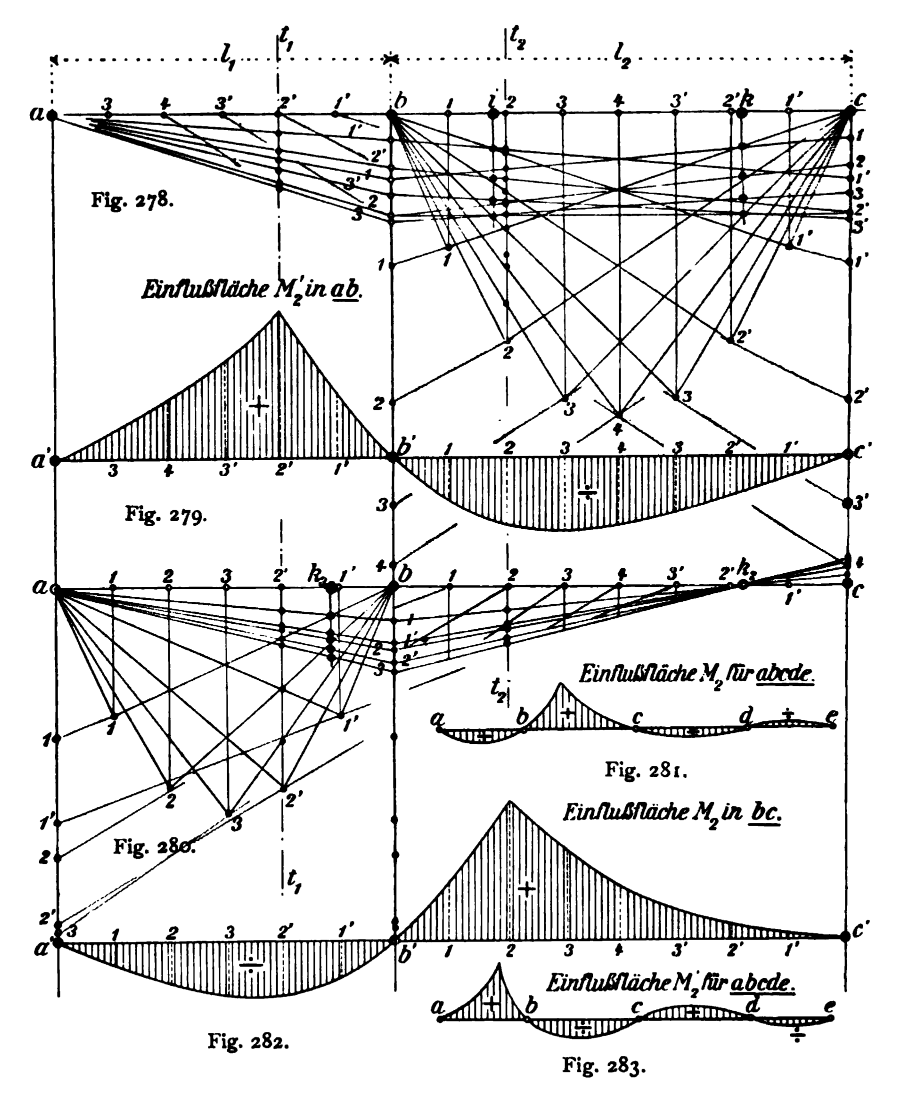


Fig. 278. Fig. 279. Fig. 280. Fig. 281. Fig. 282. Fig. 283.

2. Sämtliche Ordinaten *der Einflußfläche* M_2 *für den Schnitt* t_2 der zweiten Öffnung konnten jetzt in den Lastpunkten 1 bis 1′ aufgetragen werden, das ist in der Fig. 282 geschehen. Die zugehörigen Ordinatenstrecken sind im Schnitte t_2 der Fig. 278 durch schwarze Punkte

begrenzt. Um aber die Einflußfläche von M_2 auch *für den Lauf der Last in der ersten Öffnung* zeichnen zu können, mußten vorerst (in der Fig. 280) die dazu nötigen Schlußlinienstrecken der zweiten Öffnung dargestellt werden. Das ist mit Hilfe der in roter Farbe hervorgehobenen Kreuzlinien in der nämlichen Weise geschehen, wie vorhin für die Fig. 278 erläutert worden ist. Hier kommen nur die Schnittpunkte der Festlinie durch k_3 in Frage und (nach **52**, b) muß jeder Schlußlinienzug durch die Festpunkte k_2 und k_1 der zweiten und dritten Öffnung gehen. Auf solche Art sind auch hier in den vier Öffnungen alle Schlußlinienzüge festgelegt worden. Die Ordinaten der Einflußfläche M_2 (Fig. 282) sind für die erste Öffnung im Schnitte t_2 der zweiten Öffnung (Fig. 278) abzugreifen.

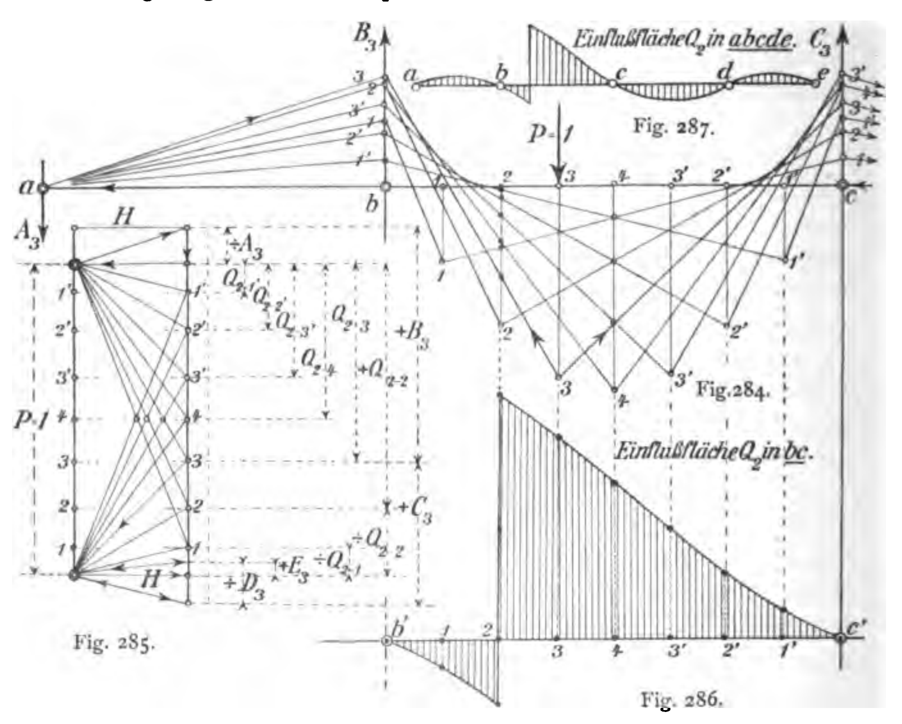
3. Die in den Fig. 278—280 gegebenen Darstellungen genügen, um die Einflußfläche des Momentes für einen beliebigen Schnitt in irgend einer der vier Öffnungen zu zeichnen. Fig. 279 gibt z. B. die *Einflußfläche des Momentes M_2' im Schnitte t_1 der ersten Öffnung für alle Lastpunkte zwischen den Stützen a bis c.* Es steht nichts im Wege, diese Einflußfläche auch noch über die beiden letzten Öffnungen auszudehnen, wie dies durch die Fig. 283 veranschaulicht wird. Ebenso gibt die Fig. 281 ein Bild der über alle vier Öffnungen ausgedehnten Einflußfläche M_2 im Schnitte t_2 der zweiten Öffnung. Aus der allgemeinen Gestalt der Momenteneinflußflächen lassen sich für die gefährlichsten Lastlagen die (unter d) gegebenen Regeln ableiten.

b. Querkräfte.

1. Aus der für irgend einen Lastpunkt der wandernden Einzellast gezeichneten Momentenfläche findet man die Querkraft Q für einen beliebigen Trägerschnitt n wie folgt. In der Fig. 284 sind die Momentenflächen für alle Lastpunkte der zweiten Öffnung des in der vorigen Aufgabe behandelten Trägers *auf einen geraden Schlußlinienzug* (I. **62**, b) *übertragen.*

Dadurch erhält man die in der Fig. 284 dargestellten *geschlossenen* Seilecke (I. **61**, b) in deren Knoten lotrechte äußere Kräfte angreifen. In jedem Knoten findet zwischen der dort wirkenden äußern Kraft und den anstoßenden Seileckkräften *Gleichgewicht* statt. Die Pfeilrichtungen der zugehörigen (in Fig. 285 dargestellten) Kraftecke sind durch das Gleichgewicht in den Einzelknoten bestimmt. Jedes Krafteck ist *geschlossen* und die gesuchten Querkraftgrößen sind aus ihm unmittelbar abzulesen. Ebenso bilden die Stützenkräfte $-A$, $+B$, $+C$, $-D$ und $+E$ mit der Einzellast eine geschlossene Kraftlinie (I. § 9). In der Fig. 285 sind danach *alle Stützenkräfte* für den Lastpunkt 3 und

außerdem die *Querkräfte* in der zweiten Öffnung für alle Lastpunkte 1, 2, 3, 4, 3′, 2′, 1′ dargestellt. Die Darstellung ist an sich verständlich. H bedeutet die Polweite für alle Kraftdreiecke, die aus P und den beiden anstoßenden Seileckkräften gebildet sind. Für die Bestimmung des *Vorzeichens* der Stützenkräfte ist zu beachten, ob die Parallele zum wagerechten Schlußlinienzug *oberhalb oder unterhalb* der Parallelen zur betrachteten Seileckseite liegt. Oberhalb gibt *negatives*, unterhalb *positives* Vorzeichen. So sind A_3 und E_3 negativ. Ebenso Q_{2-1} und Q_{2-2}. Alle übrigen Querkräfte sind positiv.



Danach konnte in der Fig. 286 *die Einflußfläche der Querkraft Q_2 im Schnitte 2 der zweiten Öffnung für die Strecke bc* gezeichnet werden. Um diese Einflußfläche über die vier Öffnungen ausdehnen zu können (Fig. 287), müssen noch die Momentenlinien für alle Lastpunkte der ersten Öffnung dargestellt und (am besten) auf einen *wagerechten Schlußlinienzug* übertragen werden.

c. Randspannungen und Stabkräfte. Die Einflußlinien für die Randspannungen der Vollwandträger und die Stabkräfte der durchgehenden Fachwerke bezieht man am einfachsten auf die Einflußlinien

des Momentes (wie es geschehen ist in § 7 und § 8 bei den Bogenträgern). Für Parallelfachwerk eignen sich für die Berechnung der *Wand*stabkräfte sehr gut auch die Einflußlinien der Querkraft (vgl. Aufgabe 44, Fig. 178, unter **36**, b).

d. Regeln für die gefährlichsten Lastlagen. Wir setzen *unmittelbare Belastung* voraus und betrachten zuerst diejenige Öffnung des Trägers, in welcher *der Schnitt* liegt, für welchen die Einflußfläche gezeichnet worden ist. Wir nennen sie die *Schnittöffnung*. Handelt es sich nun um die Einflußfläche eines Momentes, so ist deren allgemeine Gestalt abhängig davon, ob der Schnitt innerhalb oder außerhalb der beiden Festpunkte *i* und *k* der Schnittöffnung liegt (Fig. 274). Liegt der Schnitt *innerhalb* der Festpunkte (Fig. 281), so verursacht die Einzellast bei ihrer Wanderung innerhalb der Schnittöffnung in dem betrachteten Schnitte ein positives Moment. Verläßt aber die Einzellast die Schnittöffnung, so verändert sie das Vorzeichen des Momentes im Schnitte jedesmal, wenn sie eine Stütze überschreitet (Fig. 281 und 283). Die Ordinaten der Einflußfläche des Momentes wechseln also ihr Vorzeichen von einer Öffnung zur andern. Daraus folgt der Satz:

1. *Um das größte positive Moment eines Schnittes innerhalb der Festpunkte einer Öffnung zu erhalten, ist diese voll zu belasten und die übrigen Öffnungen müssen abwechselnd unbelastet und voll belastet sein. Die umgekehrte Art der Belastung erzeugt das größte negative Moment.*

Anders liegt die Sache, wenn der betrachtete Schnitt *t—t außerhalb* der Festpunkte einer Öffnung liegt. Man kann in diesem Falle einen *festen Lastpunkt l bestimmen, für welchen der bewegliche Wendepunkt* (*i*) *oder* (*k*) *mit dem betrachteten Schnitte zusammenfällt* (Fig. 288). Der Punkt *l* ist demnach eine *Lastscheide*, die immer außerhalb des betrachteten Schnittes *t—t* fällt. Weil nun jeder bewegliche Wendepunkt sich *in der Richtung* der Einzellast mitbewegt, so folgt daraus der Satz:

2. *Um das größte positive Moment eines Schnittes außerhalb der Festpunkte zu erhalten, ist nur die Strecke zwischen der Lastscheide l und der benachbarten Stütze voll zu belasten, die andere Strecke der Schnittöffnung unbelastet zu lassen. Außerdem müssen die übrigen Öffnungen abwechselnd unbelastet und voll belastet sein. Die umgekehrte Art der Belastung erzeugt das größte negative Moment.*

In der Schnittöffnung besitzt die *Einflußfläche der Querkraft immer eine Lastscheide, die mit dem betrachteten Schnitte zusammenfällt* (Fig. 287). *Zwischen ihr und den Stützenlotrechten wechselt die Querkraft von Strecke zu Strecke ihr Vorzeichen.* Mit andern Worten:

3. *Die positive Querkraft einer Schnittöffnung wird am größten, wenn sie links vom Schnitte unbelastet, rechts davon voll belastet ist und wenn die übrigen Öffnungen abwechselnd voll belastet und unbelastet sind, so daß an die unbelastete Strecke der Schnittöffnung eine belastete und an ihre voll belastete Strecke eine unbelastete Öffnung schließt. Für die negative Querkraft gilt das Umgekehrte.*

Bei *mittelbarer Belastung* ist die Einflußlinie zwischen zwei Querträgern eine Gerade. Das ändert aber an den obigen Regeln nichts.

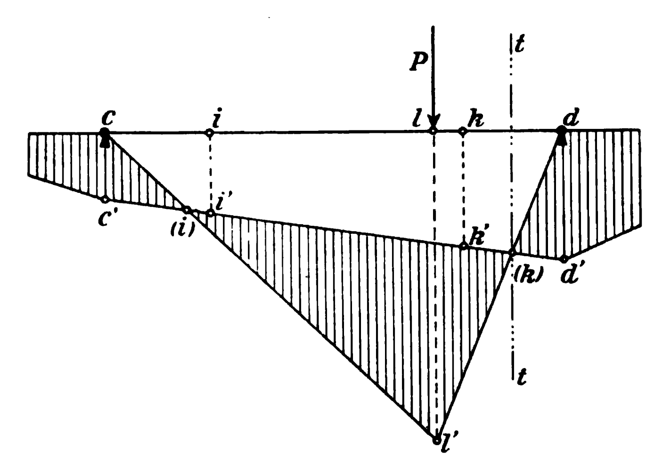


Fig. 288.

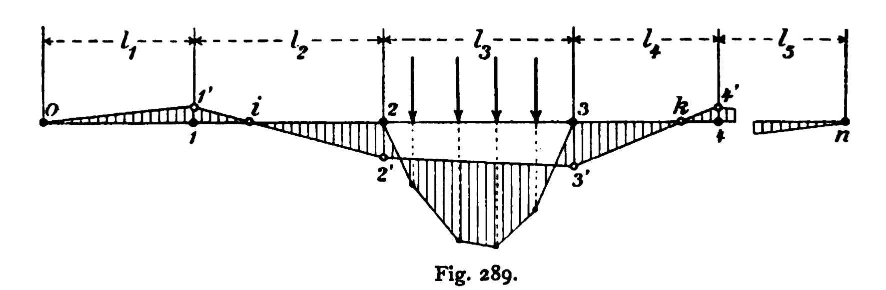


Fig. 289.

55. Grundlagen der Berechnung bei Verwendung genauer Biegelinien.

a. Grundgleichungen zur Berechnung der Stützenmomente.

1. Im vorigen ist gezeigt worden, *wie bei Belastung nur einer einzigen Öffnung* (Fig. 289) *der gesamte Schlußlinienzug der Momentenfläche gegeben ist, sobald die Schlußlinie in der belasteten Öffnung bekannt ist.* Denn von jeder Schlußlinie irgend einer Öffnung ist immer *ein* Punkt

gegeben. Das war links von der Belastung der Festpunkt *i*, rechts der Festpunkt *k*. Es wird nun zuerst zu zeigen sein, wie auch bei der Verwendung genauer Biegelinien mit Hilfe von je drei Festlinien einer Öffnung die Festpunkte *k* und *i* ermittelt werden können, die von der Belastung unabhängig liegen. Diese *genauen Festlinien*, wie sie von jetzt ab genannt werden sollen, weichen in ihrer Lage von derjenigen der Drittelslinien desto mehr ab, je mehr die für die genauen Biegelinien geltenden *Belastungsflächen* sich von der *Grundgestalt* der Momentenflächen (Fig. 269) unterscheiden, d. h. je veränderlicher die Trägheitsmomente der Trägerschnitte oder die Querschnitte und Hebelarme der Fachwerkstäbe ausfallen.

Nachdem die erwähnten Festpunkte *i* und *k* mit Hilfe der genauen Festlinien ermittelt worden sind, braucht man (unter der Voraussetzung, daß das Moment über den Endstützen verschwindet) nur noch zwei Punkte der Schlußlinie der belasteten Öffnung, um den gesamten Schlußlinienzug zu zeichnen. Ritter[1] findet die beiden genannten Punkte mit Hilfe von den genauen Biegelinien angepaßten *Kreuzlinien*. Verfasser verwendet dazu ein Verfahren, das zuerst von Claxton Fidler[2] angegeben und von Ostenfeld[3] erweitert worden ist. Dabei werden, als Ersatz für die genauen Kreuzlinien, wie sie Ritter anwendet, *außerhalb der Trägerlinie liegende* sog. *»charakteristische« Festpunkte* eingeführt, mit deren Hilfe die Berechnung durchgehender Träger *allgemein auch für elastisch verschiebbare Stützen durchgeführt werden kann und zwar derart, daß der gesamte Schlußlinienzug der Momentenfläche unmittelbar dargestellt wird.* Wir benutzen das Verfahren hier zunächst nur für unverschiebbare Stützen.

2. Wie früher betrachten wir das *Hauptsystem als eine Reihe von einfachen Trägern* (Fig. 290 und 291) und die negativ genommenen Stützenmomente *M* als *überzählige Größen*. Vorläufig setzen wir den Fall einer beliebigen Belastung in allen Öffnungen voraus. Dann wird die *Biegelinie* in irgend einer Öffnung durch die darin befindlichen *P* und die beiden Stützenmomente erzeugt, wobei *die über jeder der Stützen an die Biegelinie gelegte Berührungsgerade sowohl links als rechts von der Stütze den gleichen Winkel mit der Trägerlinie bilden*

---

[1] Anwendungen der graphischen Statik. 3. Teil. S. 104—119.

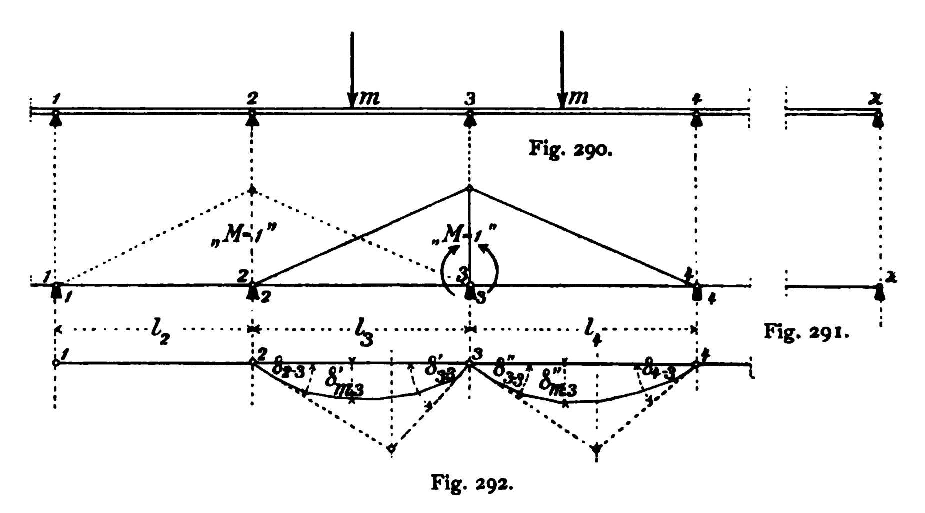
[2] Transactions of the Inst. of Civil. Ing. Band 74. Oktober 1883.

[3] Graphische Behandlung der kontinuierlichen Träger mit festen, elastisch senkbaren oder drehbaren und elastisch senk- und drehbaren Stützen. Zeitschr. für Architektur u. Ingenieurwesen. 1905. Heft 1.

muß (vgl. Fig. 270 und 271). Aus dieser Bedingung fließen bei z Stützen $(z-2)$ Grundgleichungen, aus welchen die $(z-2)$ überzähligen Größen M ausgeschieden werden können. Um dies allgemein analytisch auszudrücken, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$0, 1, 2, 3, \ldots r, \ldots z$: Stützpunkte,
$l_1, l_2, l_3, \ldots l_r, \ldots l_z$: Stützweiten,
$M_1, M_2, M_3, \ldots M_r, \ldots$: Stützenmomente.

Wir betrachten dann *zwei Nachbaröffnungen* (l_3, l_4) des Hauptsystemes (Fig. 290—292) mit den überzähligen Größen $-M_2$, $-M_3$, $-M_4$,



bezeichnen die Winkel, die von der Berührungsgeraden an die Biegelinie über den Stützpunkten mit der Trägerlinie gebildet werden, kurzweg als *Tangentenwinkel.* Es sei

δ_{2-3}: Tangentenwinkel in 2 der Öffnung 2—3,
δ'_{3-3}: - - 3 - - 2—3.

Ebenso soll für die Biegelinie der anstoßenden Öffnung 3—4 gelten

δ_{4-3}: Tangentenwinkel in 4 der Öffnung 3—4,
δ''_{3-3}: - - 3 - - 3—4.

Die erste Ziffer des dem δ angehängten Zeigers bezeichnet danach den *Ort* und die zweite Ziffer die *Richtung* des zugehörigen Tangentenwinkels. Diese Winkel sollen in der Richtung $-M$ *positiv* gerechnet werden. *Die Grundgleichung zur Berechnung eines unbekannten Stützenmomentes* M_3 bildet dann die Bedingung

$$\delta'_3 = -\delta''_3,$$

weil (wie gesagt) die Tangente an die Biegelinie im Stützpunkte 3 zu beiden Seiten einen gleich großen Winkel mit der Trägerlinie bildet. Für irgend einen Stützpunkt z. B. r lautet die vorige Gleichung

$$\delta'_r = -\delta''_r. \qquad (301)$$

Die unter der Belastung jeder Öffnung des Hauptsystems durch $P = 1$ und die überzähligen Größen entstehenden Tangentenwinkel sind für die Nachbaröffnungen wie folgt anzuschreiben

$$\begin{aligned} \delta'_r &= P \cdot \delta'_{mr} + M_{r-1} \cdot \delta_{(r-1)r} + M_r \cdot \delta'_{rr}, \\ \delta''_r &= P \cdot \delta''_{mr} + M_r \cdot \delta''_{rr} + M_{r+1} \cdot \delta_{(r+1)r}, \end{aligned} \qquad (302)$$

wenn *Temperatureinflüsse vorläufig vernachlässigt werden und alle Stützpunkte unverschieblich* sind.

In den Gl. (302) bedeuten

δ'_{mr} und δ''_{mr}: die Senkung des Punktes m des einfachen Trägers (in der Richtung von P), links und rechts vom Stützpunkte r, verursacht durch das Stützenmoment »$M_r = 1$«, oder was (nach Maxwell) dasselbe ist: die Winkeldrehung an der Stütze r im Sinne des Momentes »$M_r = 1$, verursacht von einer Lasteinheit in m;

$\delta_{(r-1)r}$ und δ'_{rr}: die Winkeldrehung des einfachen Trägers $(r-1)-r$ an den Stützen $(r-1)$ und r, verursacht durch »$M_r = 1$«;

δ''_{rr} und $\delta_{(r+1)r}$: desgl. des einfachen Trägers $r-(r+1)$ an den Stützen r und $r+1$ aus der nämlichen Ursache.

Die Senkungen δ'_{mr} und δ''_{mr} sind in bekannter Weise mit Hilfe der elastischen Kräfte w der zugehörigen Trägeröffnungen darzustellen (vgl. unter d). Bezeichnet man *die von den w-Kräften erzeugten Stützenkräfte*, je nachdem sie von der Öffnung links oder rechts vom Stützpunkte r erzeugt werden, mit

$$V' \text{ und } V'',$$

so ist (nach **18**, c) anzuschreiben

$$\begin{aligned} \delta_{(r-1)r} &= V'_{(r-1)r}; & \delta_{(r+1)r} &= V''_{(r+1)r}; \\ \delta'_{rr} &= V'_{rr}; & \delta''_{rr} &= V''_{rr}. \end{aligned} \qquad (303)$$

2. Wir betrachten jetzt wieder irgend zwei Nachbaröffnungen des Hauptsystems, z. B. die Öffnungen l_5 und l_6 mit den Stützen 4, 5, 6. $4'-5'-6'$ sei der zugehörige Schlußlinienzug. Jede der beiden Öffnungen trage in einem Punkte m eine Einzellast »$P = 1$«. Dann lauten hierfür die Gl. (302)

$$\begin{aligned} \delta'_5 &= P \cdot \delta'_{m5} + M_4 \cdot \delta''_{4-5} + M_5 \cdot \delta'_{5-5}, \\ \delta''_5 &= P \cdot \delta''_{m5} + M_5 \cdot \delta''_{5-5} + M_6 \cdot \delta_{6-5}. \end{aligned} \qquad (304)$$

Ferner erhält man nach Gl. (301)

$$\delta'_5 + \delta''_5 = 0 . \tag{305}$$

In den Gl. (304) sind alle δ bekannt und mit Hilfe der elastischen Kräfte w aus Biegelinien zu berechnen, unter der zulässigen Voraussetzung, daß man wegen der Kleinheit der Formänderungen ihre trigonometrische Tangente mit den Tangentenwinkeln δ selbst vertauschen kann. Es ist danach

$$\begin{aligned} \delta_{4-5} &= V'_{4-5}; \quad \delta_{6-5} = V''_{6-5}; \\ \delta'_{5-5} &= V'_{5-5}; \quad \delta''_{5-5} = V''_{5-5}. \end{aligned} \tag{306}$$

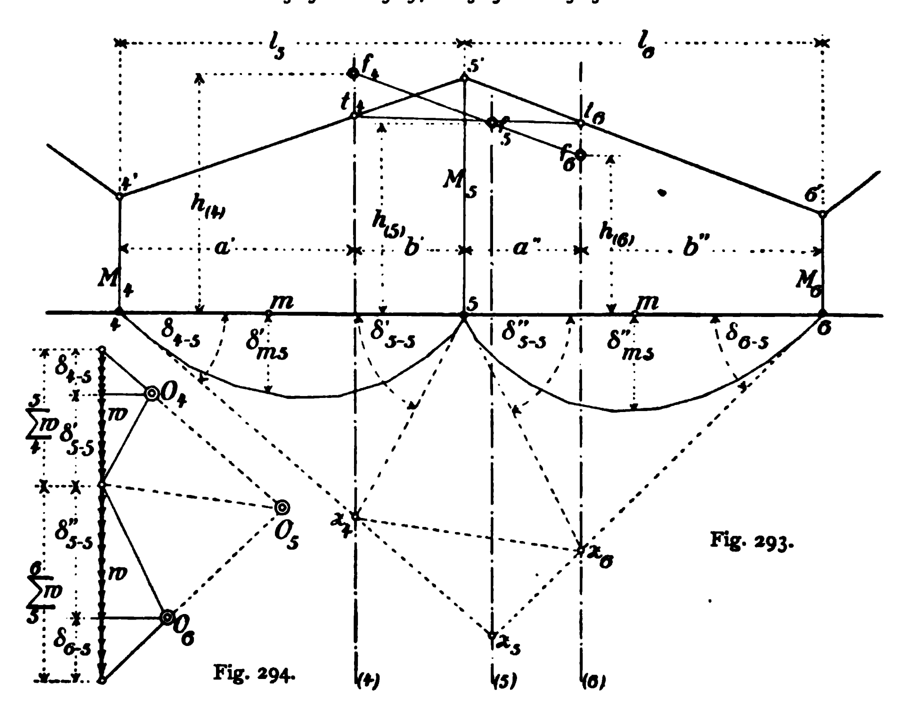


Fig. 293.

Fig. 294.

Sämtliche V der Gl. (306) sind (nach **18**, c) als Stützenkräfte des mit den w belasteten einfachen Trägers (l_5 und l_6) zu berechnen oder graphisch darzustellen. Die graphische Darstellung vgl. man in den Fig. 293—294. Danach ist

$$\begin{aligned} (\delta_{4-5}) + (\delta'_{5-5}) &= \sum_4^5 w, \\ (\delta''_{5-5}) + (\delta_{6-5}) &= \sum_5^6 w. \end{aligned} \tag{307}$$

Darin sind die elastischen Kräfte für »$M_5 = 1$« zu berechnen.

b. Die genauen Festlinien und ihre Festpunkte.

1. Es soll jetzt gezeigt werden, wie man graphisch drei Festlinien und darin je einen Festpunkt findet, mit deren Hilfe für jede beliebige Belastung der Schlußlinienzug der Momentenfläche gezeichnet werden kann.

Die drei Festlinien fallen zusammen mit den Richtungen der drei Mittelkräfte

$$\sum_4^5 w; \quad \sum_5^6 w; \quad \sum_4^6 w. \tag{308}$$

Ihre Lage ist also unabhängig von der Belastungsart, sie kann deshalb aus den gegebenen Biegelinien des Hauptsystems ermittelt werden.

In den Fig. 293 und 294 ist die graphische Ermittelung dieser drei Festlinien veranschaulicht. Dabei genügt es, allein die *Tangentenwinkel* aufzutragen. Die Festlinien verlaufen durch die Punkte z_4, z_5, z_6. Das sind Schnittpunkte der äußern Seiten der zugehörigen Seilecke der Biegelinien.

Nach erfolgter Darstellung der zu den betrachteten beiden Nachbaröffnungen gehörigen drei genauen Festlinien, die von jetzt ab kurzweg mit (4), (5), (6) bezeichnet werden, bestimme man von der Trägerlinie ab gerechnet, wenn in beiden Öffnungen je eine Einzellast liegt,

$$\begin{aligned}
&\text{auf (4) eine Strecke } h_{(4)} = \frac{P_4 \delta'_{m5}}{\sum_4^5 w}, \\
&\text{- (6) - - } h_{(6)} = \frac{P_5 \delta''_{m5}}{\sum_5^6 w}, \\
&\text{- (5) - - } h_{(5)} = \frac{P_4 (\delta'_{m5}) + (P_5 \delta''_{m5})}{\sum_4^6 w}.
\end{aligned} \tag{309}$$

Die Endpunkte der Strecken sollen von jetzt ab die *Biegeflächenfestpunkte* genannt werden. Sie sind in der Fig. 293 mit f_4, f_5, f_6 bezeichnet.

Die Festlinien (4) und (6) mögen den Schlußlinienzug in den Punkten t_4 und t_6 schneiden. Dann treffen sich *die Geraden* t_4—t_6 *und* f_4—f_6 *im Punkte* f_5. *Diese Eigenschaft der Festpunkte* f_4 bis f_6 ermöglicht die Darstellung des gesamten Schlußlinienzuges für beliebige Belastungen. Zuerst ist aber der Beweis zu liefern, daß die Geraden t_4—t_6 und f_4—f_6 durch f_5 verlaufen.

2. Die in den Festlinien (4) und (6) abzugreifenden Momentenstrecken seien $M_{(4)}$ und $M_{(6)}$. Dann ist mit Bezug auf die Fig. 293

$$M_{(4)} = M_4\left(\frac{b'}{l_5}\right) + M_5\left(\frac{a'}{l_5}\right),$$

$$M_{(6)} = M_5\left(\frac{b''}{l_6}\right) + M_6\left(\frac{a''}{l_6}\right).$$

Durch den Vergleich der Fig. 293 mit dem Krafteck der w in Fig. 294 findet man daraus

$$\left.\begin{aligned} M_{(4)} &= \left(\frac{\delta_{4-5}}{\sum\limits_4^5 w}\right)M_4 + \left(\frac{\delta'_{5-5}}{\sum\limits_4^5 w}\right)M_5 = \frac{(\delta_{4-5})M_4 + (\delta'_{5-5})M_5}{\sum\limits_4^5 w}, \\ M_{(6)} &= \left(\frac{\delta_{5-5}}{\sum\limits_5^6 w}\right)M_5 + \left(\frac{\delta_{6-5}}{\sum\limits_5^6 w}\right)M_6 = \frac{(\delta''_{5-5})M_5 + (\delta_{6-5})M_6}{\sum\limits_5^6 w}. \end{aligned}\right\} \quad (310)$$

Die auf der Festlinie (5) von der t_4—t_6 abgeschnittene Strecke $h_{(5)}$ ist danach anzuschreiben mit

$$h_{(5)} = M_{(4)} \frac{\sum\limits_4^5 w}{\sum\limits_4^6 w} + M_{(6)} \frac{\sum\limits_5^6 w}{\sum\limits_4^6 w}.$$

Das ist

$$h_{(5)} = \frac{M_{(4)}\sum\limits_4^5 w + M_{(6)}\sum\limits_5^6 w}{\sum\limits_4^6 w} = \frac{(\delta_{4-5})M_4 + (\delta'_{5-5})M_5 + (\delta''_{5-5})M_5 + (\delta_{6-5})M_6}{\sum\limits_4^6 w}. \quad (311)$$

Das gibt aber in Verbindung mit den Grundgleichungen (304)

$$h_{(5)} = \frac{\delta'_{m5} + \delta''_{m5}}{\sum\limits_4^6 w}.$$

Ebenso schneidet die Gerade f_4—f_6 auf der Festlinie eine Strecke $h_{(5)}$ ab, die anzuschreiben ist mit

$$h_{(5)} = \frac{h_{(4)} \cdot \sum\limits_4^5 w + h_{(6)}\sum\limits_5^6 w}{\sum\limits_4^6 w}.$$

Setzt man hierin die beiden ersten der Gl. (309) ein, so erhält man

$$h_{(5)} = \frac{\delta'_{m5} + \delta''_{m5}}{\sum\limits_4^6 w}.$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Die auf den Festlinien (4), (5), (6) *nach der Gl.* (309) *abgetragenen Strecken* $h_{(4)}$, $h_{(5)}$, $h_{(6)}$ *endigen in den Biegeflächenfestpunkten* f_4, f_5 *und* f_6 *und die Gerade* f_4—f_6 *verläuft durch* f_5. *Ebenso führt die Gerade* t_4—t_6, *die zwischen den Schnittpunkten der Festlinien* (4) *und* (6) *mit der gesuchten Momentenlinie liegt, durch den Festpunkt* f_5.

Wir unterscheiden bei den drei Festpunkten von jetzt ab die beiden *äußern* und den *mittleren.* Jene kommen nur in Anwendung, wenn *elastische Stützpunktverschiebungen* zu berücksichtigen sind (**59**). Im vorliegenden Falle wird deshalb nur der mittlere Festpunkt f_5 gebraucht.

c. Darstellung des Schlußlinienzuges der Momentenfläche.

1. Wie im vorigen bewiesen wurde, verläuft die Gerade t_4—t_6 (Fig. 295) durch den Biegelinienfestpunkt f_5, während die Geraden $4'$—t_4 und $6'$—t_6 im festen Punkte $5'$ zusammentreffen. Man lege nun ein dem Dreieck

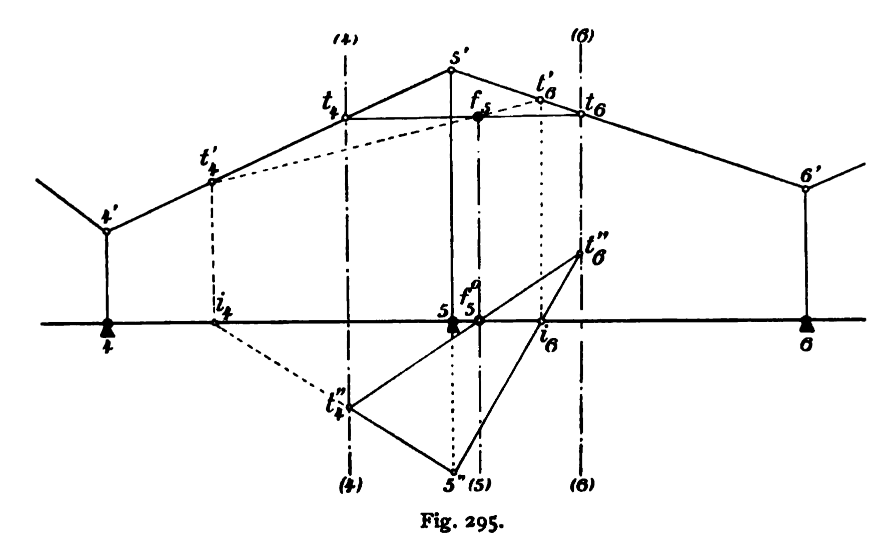


Fig. 295.

$t_4 t_6 5'$ entsprechendes Dreieck mit seinen Ecken derart in die beiden Festlinien (4), (6) und die Stützenlotrechte 5, daß z. B. eine seiner Seiten (t''_4—$5''$) durch einen gegebenen Punkt i_4 der Trägerlinie und eine zweite ($t''_4 f^\circ_5$) durch den Fußpunkt f°_5 der Festlinie (5) verläuft. Dann muß

(aus bekannten geometrischen Gründen) auch die dritte Dreiecksseite t_6''—$5''$ durch einen festen Punkt i_6 verlaufen, der in der Verbindungslinie der Punkte i_4 und f_5^0, also in der Trägerlinie, liegt. Ferner müssen die durch i_4 und i_6 geführten Lotrechten je einen Punkt t_4' und t_6' treffen, deren Verbindungsgerade durch den Biegelinienfestpunkt f_5 führt. Umgekehrt: *Kennt man irgend einen Punkt t_4' der Schlußlinie $4'$—$5'$, so findet man einen Punkt t_6' der folgenden Schlußlinie $5'$—$6'$ im Schnitte der Lotrechten i_6—t_6' und der verlängerten Geraden t_4'—f_5.*

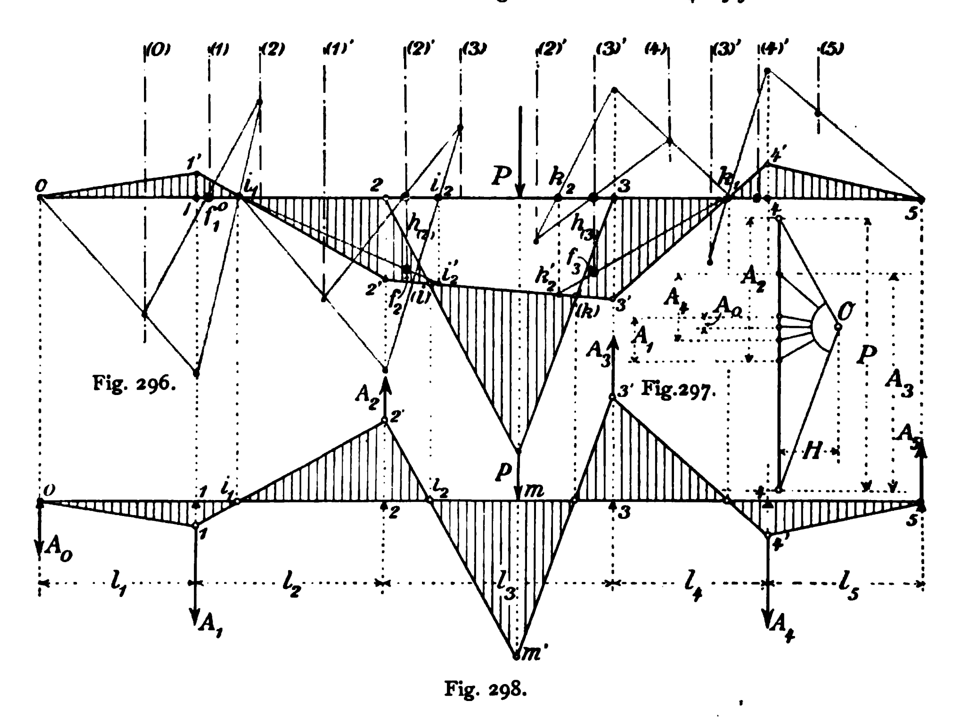


Fig. 298.

2. Danach kann man, z. B. vom linken Endstützpunkt anfangend, (Fig. 296) in der zweiten Öffnung den Festpunkt i_1 finden, und von diesem weitergehend alle folgenden i-Punkte festlegen, in ähnlicher Weise, wie es früher (Fig. 273) mit Hilfe der Drittelslinien geschehen ist. Ebenso kann man von der rechten Endstütze aus alle k-Punkte ermitteln. Weil nun die Lotrechte jeder der beiden Endstützen eine Lage hat, die *unabhängig von der Art der Belastung* ist, so sind auch die mit ihrer und der unabhängigen genauen Festlinien Hilfe gewonnenen Festpunkte i und k von der Belastungsart des Trägers unabhängig. *Alle Punkte i und k, sowie auch der mittlere Biegelinienfestpunkt f_5 sind deshalb in*

jedem Falle von vornherein gegeben. Außerdem kann von jeder der Endstützen her in der belasteten Öffnung je ein Punkt ihrer Schlußlinie festgestellt werden. Damit ist dann der gesamte Schlußlinienzug gegeben, weil in den an die belastete Öffnung stoßenden Trägerfeldern die Momentenlinie je durch einen der Punkte i oder k verlaufen muß, wie nachzuweisen bleibt.

In der Fig. 296 ist z. B. der Schlußlinienzug für einen Träger auf sechs Stützen dargestellt, dessen dritte Öffnung im beliebigen Punkte m die Einzellast $P = 1$ trägt. Wie weiterhin noch näher erläutert wird, sind zuerst, für je zwei Nachbaröffnungen die drei genauen Festlinien mit Hilfe der Biegelinien für δ'_{mr} und δ''_{mr} aufgetragen worden. Dann wurden von dem festen Stützpunkte o ausgehend, die Punkte i_1 der zweiten und i_2 der Lastöffnung (nach dem durch Fig. 295 erläuterten Verfahren) eingezeichnet. Ebenso wurden vom Stützpunkte 5 aus die Punkte k_1 und k_2 ermittelt. Das ist in roten Linien dargestellt. Nun ist wohl zu beachten, daß *in den Grundgleichungen* (302) *für alle unbelasteten Öffnungen das erste mit P behaftete Glied verschwinden muß, weil dort $P = 0$ wird.* Deshalb wird auch die Strecke (h_1) der zweiten Öffnung *gleich Null*, denn allgemein ist (nach Gl. 309)

$$h_{(1)} = \frac{P_1 \cdot \delta'_{m1} + P_2 \cdot \delta''_{m2}}{\sum\limits_0^2 w}.$$

Weil aber der Zähler dieser Gleichung (wegen $P = 0$) auch verschwindet, so fällt der *Biegelinienfestpunkt f_1^0 in die Trägerlinie. Weiter folgt daraus, daß die Schlußlinie der zweiten Öffnung durch den Punkt i_1 verlaufen muß, weil die verlängerte Verbindungsgerade 0—f_1^0 die Lotrechte durch i_1 im Punkte i_1 selbst trifft.*

Für die Strecke $h_{(2)}$ erhält man (aus der Betrachtung der Nachbaröffnungen 1—2 und 2—3) allgemein den Ausdruck

$$h_{(2)} = \frac{P_2 \cdot \delta'_{m2} + P_3 \cdot \delta''_{m2}}{\sum\limits_1^3 w}.$$

Darin ist das Glied mit δ'_{m2} gleich Null, weil die zweite Öffnung *unbelastet* ist. In gleicher Weise ist, von der Stütze 5 ausgehend, die Strecke $h_{(3)}$ festgelegt. Damit waren in der dritten Öffnung die Biegelinienfestpunkte f_2 und f_3 ermittelt. Es brauchten also nur noch die zwei, durch je einen dieser Festpunkte verlaufenden Geraden — $i_1 f_2$ und $k_1 f_3$ — gezeichnet und bis zum Schnitte mit den zugehörigen durch i_2 und k_2 gehenden Lotrechten verlängert zu werden.

Die Schnittpunkte i_2' und k_2' legen in der Lastöffnung die gesuchte Schlußlinie fest. Diese schneidet auf den Stützenlotrechten die Strecken 2—2' und 3—3' der Stützenmomente ab, die nach dem Maßstabe des einfachen Momentendreiecks 2—m'—3 zu bewerten sind. Damit ist (wie bekannt) der gesamte Schlußlinienzug 0—1'—2'—3'—4'—5 gegeben. Wie mit dessen Hilfe die Einflußlinien für Momente, Querkräfte u. dgl. gefunden wurden, ist in den Fig. 278—287 (unter **54**) ausführlich erläutert worden. Danach ist in den Fig. 297—298 die Momentenfläche auf einen *geraden* Schlußlinienzug übertragen und das zugehörige Krafteck mit dem Pole H gezeichnet worden. Die dadurch gegebenen Stützenkräfte wurden in der Fig. 298 dargestellt.

d. Schlußbemerkungen über die Biegelinien und Temperatureinflüsse.

1. Die in den Grundgleichungen (302) vorhandenen Formänderungsgrößen

$$\delta'_{mr}, \quad \delta_{(r-1)r}, \quad \delta'_{rr}$$
$$\delta''_{mr}, \quad \delta''_{rr}, \quad \delta_{(r+1)r}$$

werden alle durch die überzählige Größe »$M_r = 1$« verursacht. *Sie sind also unabhängig von der gegebenen Belastung*, und allein abhängig von den gegebenen Grundmaßen und Querschnitten des Trägers. Handelt es sich demnach nur um die Ermittelung der drei genauen Festlinien von zwei Nachbaröffnungen $(r-1)-r$ und $r-(r+1)$ des Hauptsystemes, so ist dabei allein das die Formänderungen verursachende *Moment* maßgebend. Wie man nun auch die beiden betrachteten Öffnungen belastet denkt, immer wird für den Gleichgewichtszustand jeder der Öffnungen *die Momentenfläche ein Dreieck* bilden, dessen Höhe über der Stütze gleich der »*Momenteinheit*« ist, während sie über den Stützen $(r-1)$ und $(r+1)$ zu Null wird (Fig. 290).

Danach sind für jeden Querschnitt der Vollwandträger, oder für jeden zugeordneten Momentenpunkt eines Fachwerkstabes der Nachbaröffnungen die elastischen w-Kräfte zu berechnen. Es ist allgemein (nach § 2 und § 4)

$$\text{für Vollwand: } w = \frac{M}{EJ},$$
$$\text{- Fachwerk: } w = \frac{\Delta s}{r} = \frac{Mk}{r^2}.$$

Daraus sind alle Formänderungsgrößen, in derem Zeiger nur r, $r-1$ und $r+1$ vorkommen, zu berechnen.

Die Biegelinien für δ'_{mr} und δ''_{mr} (links und rechts von der Stütze r) brauchen nur für die belastete Öffnung gezeichnet zu werden. In den übrigen Öffnungen dienen sie zum auftragen der drei Festlinien $(r-1)$, (r) und $(r+1)$. *Diese fallen aber mit den Richtungen der drei Mittelkräfte*

$$\sum_{r-1}^{r} w\,; \quad \sum_{r}^{r+1} w\,; \quad \sum_{r-1}^{r+1} w$$

zusammen, sind somit mit Hilfe des Kraft- und Seilecks der gegebenen elastischen Kräfte w für je zwei Nachbaröffnungen in bekannter Weise zu finden. Will man schließlich die Glieder der Gl. (302)

$$P \cdot \delta'_{mr} \quad \text{und} \quad P \cdot \delta''_{mr}$$

berechnen, so dient dazu am besten die Arbeitsgleichung MOHRS (**10**, b).

2. Wenn *Temperatureinflüsse* im besonderen berücksichtigt werden sollen (**33**), so gehen die Grundgleichungen (302) über in

$$\left.\begin{aligned} \delta'_r &= M_{(r-1)t} \cdot \delta_{(r-1)r} + M_{rt} \cdot \delta'_{rr} + \delta'_{rt}, \\ \delta''_r &= M_{rt} \cdot \delta''_{rr} + M_{(r+1)t} \cdot \delta_{(r+1)} + \delta''_{rt}. \end{aligned}\right\} \qquad (312)$$

Darin bedeuten

$M_{(r-1)t}$ bis $M_{(r+1)t}$: die betreffenden *allein* von Temperaturänderungen erzeugten Stützenmomente;

δ'_{rt}, δ''_{rt}: die durch die Temperaturänderungen verursachten Drehungen der Tangente an die Biegelinie im Stützpunkte r, links oder rechts davon.

Will man den Gesamteinfluß der Belastung und der Temperatur ausdrücken, so hat man jeder der Grundgleichungen (302) auf der rechten Seite nur das zugehörige Glied δ'_{rt} oder δ''_{rt} anzuhängen. Ebenso erhält in diesem Falle der Zähler der Gl. (309) für die Festlinienstrecken h noch die betreffenden Summanden δ'_{rt} oder δ''_{rt} oder $(\delta'_{rt} + \delta''_{rt})$. Im übrigen ändert sich an dem Verfahren der Darstellung der Festlinien, Festpunkte und des Schlußlinienzuges nichts.

Schlufsabschnitt.

Verschiedenes.

§ 10. Die Nebenspannungen der Fachwerke.

Es gibt im Bauwesen einige schwierige theoretische Aufgaben, deren vollkommen zufriedenstellende Lösung zum Teil noch nicht gelungen ist. Dazu gehören die *Berechnung der Nebenspannungen* (I. **16**, c) einschließlich der *dynamischen Einflüsse bewegter Lasten* in Vollwandträgern und Fachwerken, sowie auch die *Darstellung der Momente durchgehender Träger auf verschiebbaren Stützen*, u. a. m. Die vorhandenen Lösungen dieser Aufgaben erscheinen bis jetzt in einer für den den Praktiker zu wenig verlockenden Hülle, als daß dieser geneigt wäre, sich darin bis auf den Kern durchzubeißen. Sie sollen deshalb in dem vorliegenden, praktischen Zwecken gewidmeten Buche auch nur kurz und von allgemeinen Gesichtspunkten aus gegeben werden, mehr als Vorbereitung für ein tieferes Studium, nicht aber als erschöpfende Wiedergabe aller darüber veröffentlichten besondern Abhandlungen. Eine ausführlichere Behandlung behält sich Verfasser für seine demnächst erscheinenden »*Vorlesungen über Eisenbrückenbau*« vor.

56. Ihre Ursachen.

a. Die Ursachen im allgemeinen.

1. Im ersten Bande (**16**, b) wurden *Grund*spannungen und *Neben*spannungen unterschieden. Jene sind die aus den Stabkräften (Achsenkräften) unter der Annahme des starren Gleichgewichtes, und unter Vernachlässigung der elastischen Formänderungen des Systems berechneten Stabspannungen. Die Voraussetzungen, von denen man bei solcher Berechnung ausgeht — das sind namentlich *reibungslose* Knotenverbindungen und *gerade bleibende* Stäbe — werden in Wirklichkeit garnicht oder nur angenähert erfüllt. Somit enthalten die Rechnungen verschiedene Fehlerquellen, aus denen die sog. *Neben*spannungen oder *Zusatz*spannungen entspringen.

Verfasser macht zwischen *Neben-* und *Zusatz*spannungen noch einen Unterschied. Er bezeichnet nämlich mit Zusatzspannungen nur solche, die *nicht* aus unvollkommener Erfüllung obiger Voraussetzungen entstehen, sondern von jenen *zufälligen* Ursachen in der Werkstatt oder auf der Baustelle herrühren, auf die (unter **34**) bereits hingewiesen worden ist und die hauptsächlich bei der Berechnung statisch unbestimmter Systeme von Bedeutung werden können. *Zusatzspannungen entziehen sich daher der Berechnung. Sie können nur von Fall zu Fall geschätzt werden. Als Nebenspannungen gelten danach diejenigen, deren statische Berechnung möglich ist.* Hauptursachen der Nebenspannungen sind:

1) Das Vernachlässigen des Eigengewichteinflusses insofern, als das Gesamtgewicht des Fachwerkes in entsprechenden Mittelkräften in der Regel *nur als in den Knoten angreifend* angenommen wird, während doch auch jeder Stab selbst sein Gewicht zu tragen hat, wodurch sich seine Achse *krümmt;*

2) das Fehlen *reibungsloser Knotengelenke.* Entweder sind die Stäbe mit ihrem Knoten unter Verwendung entsprechender Anschlußglieder durch *Vernietung* verbunden, oder sie greifen je mit einem sogenannten *Auge* über einen *Knotenbolzen* (I. **14**). Genietete Knoten sind wie *Einspannungen* zu betrachten, d. h. *die vor der Belastung gebildeten Winkel der Stabdreiecke ändern sich im Knoten selbst während der Belastung nicht.* Aber auch bei Bolzenknoten, wie sie die amerikanischen Fachwerkträger in der Regel aufweisen, tritt während der Belastung ein reibungsloses Drehen der Stäbe um ihr Bolzenmittel niemals ein. Denn jeder Bolzen wird beim Aufstellen des Trägers, unter Anwendung schwerer Schläge, gewaltsam in die Augen eingetrieben, wodurch Reibungswiderstände erzeugt werden, die erfahrungsgemäß (selbst bei stoßartiger Wirkung der Belastung) eine Drehung der Stäbe um ihren Bolzen in der Regel verhindern. Bolzenknoten (pin-connected work) haben demnach gegenüber den durchweg vernieteten Knoten (riveted work) europäischer Fachwerke nur *einen* Vorteil: sie gewähren jedem Stabe einen vollkommenen Knotenanschluß insofern, als die Stabachse immer sehr genau durch das Bolzenmittel geführt werden kann, so wie es bei der Berechnung der Grundspannungen vorausgesetzt wird. Viel schwieriger dagegen ist ein solch vollkommener Anschluß im Knotenmittel des Systems (I. **16**) bei genieteten Knoten zu bewerkstelligen.

2. Die genannten Hauptursachen der Nebenspannungen erzeugen *Momente, die in der Trägerebene wirken.* Die Berechnungen der Einflüsse von Querkonstruktionen (I. **9** und **10**); senkrecht oder schräg

gegen die Trägerebene gerichtet (I. 11), bleiben hier außer Betracht, obwohl sie häufig die vornehmste Quelle von Nebenspannungen der Träger bilden. Namentlich kommen in Betracht: Einspannungen von Querträgern der Fahrbahn und von solchen Queranschlüssen (Querverbänden), denen die Aufgabe zufällt, alle quer zur Trägerebene gerichteten äußern Kräfte (Wind, Seitenstöße, Fliehkraft und dgl.) aufzunehmen und über die Knoten der Hauptträger in die Stützen zu führen, *ohne dadurch mehr als nötig Nebenspannungen an die Träger abzugeben.* Um solche von den Querkonstruktionen in die Trägerebene übergeleitete Nebenspannungen auf ein Mindestmaß zurückzuführen, hat man in neuerer Zeit im Eisenbrückenbau mit Erfolg versucht, zwischen den beiden *Hauptträgern* der Brücke und den Queranschlüssen keine starren Einspannungen mehr einzulegen, sondern dort eine gewisse *Beweglichkeit* zu schaffen. Dadurch will man die Hauptträgerebene von den Wirkungen großer Biegungsmomente möglichst befreien, wie sie besonders durch die elastischen Formänderungen der Fahrbahnteile entstehen. Selbstverständlich müssen derartige bewegliche Anschlüsse so beschaffen sein, daß dabei die lotrechte Stellung der Hauptträger nicht gefährdet wird. Denn sonst würden die Träger keine *ebenen* mehr bleiben und aus diesem Grunde Biegungen quer zu ihrer Ebene erfahren. Die Beschreibung der erwähnten beweglichen Anschlüsse muß den »*Vorlesungen über Eisenbrückenbau*« vorbehalten bleiben.

b. Die Winkeländerungen der Stabdreiecke als Hauptursache.

1. *Vernietete Knoten* oder *Bolzenknoten* bilden nach vorigem die Hauptursache der von den Stabkräften in der Trägerebene herbeigeführten Nebenspannungen, denn sie verhindern ein Drehen der Stäbe um ihren Knoten. Weil nun in jedem Stabdreieck eines belasteten Fachwerks (unter der Voraussetzung reibungsloser Knotengelenke) Winkeländerungen eintreten, so müssen bei starren Stabanschlüssen Momente im Knoten auftreten, die Stabverbiegungen zur Folge haben. Die Belastung eines Stabdreiecks derart, daß darin *keine* Winkeländerungen entstehen, ist ausgeschlossen. Denn dann müßte das Dreieck nach erfolgter Formänderung seiner ursprünglichen Gestalt *ähnlich* geblieben sein. Das könnte aber nur geschehen sein, wenn zwischen den drei Stabkräften S und den vergrößerten oder verkleinerten Stablängen $(s \pm \Delta s)$[1] immer Proportionalität bestände, d. h. wenn immer

$$\frac{s_1 + \Delta s_1}{s_1} = \frac{s_2 + \Delta s_2}{s_2} = \frac{s_3 + \Delta s_3}{s_3}$$

bliebe oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\varDelta s_1}{s_1} = \frac{\varDelta s_2}{s_2} = \frac{\varDelta s_3}{s_3}.$$

Es müßte daher in jedem Querschnitte der drei Stäbe einerlei *Dehnung* oder *Spannung* herrschen. Das ist im Fachwerk unmöglich. *Also ändern sich bei reibungslosen Knoten die Winkel des Stabdreiecks in jedem Belastungsfalle. Weil aber die Einspannung der Stabenden im Knoten eine Winkeländerung unmöglich macht, so entstehen dort Einspannungsmomente, deren Größe für die verursachten Nebenspannungen bestimmend sind.*

Im belasteten Fachwerke sind danach alle Stäbe mehr oder weniger gebogen, weil in ihnen nicht mehr eine Achsenkraft tätig ist, sondern eine Stabkraft, deren Richtung im allgemeinen die Stabachse schneidet. So bilden die Stabkraftrichtungen ein Netz, das sich mit dem bei der Berechnung zugrunde gelegten Stabsystem (I. **16**) nicht mehr deckt. Unter allen in einem Knoten zusammentreffenden Stabkräften herrscht zwar nach wie vor Gleichgewicht, aber die Stabkraftrichtungen schneiden sich nicht mehr im mathematischen Knotenpunkte des Systems.

2. Wir nehmen an, die *Grundspannung* σ eines Stabes, sowie auch die Stablängenänderungen $\varDelta s$ seien berechnet. Dann sind (nach **18**, b) auch die *Winkeländerungen* eines Stabdreieckes (unter der Voraussetzung reibungsloser Drehung und Geradebleiben der Stäbe) gegeben. Die wichtigsten der dazu verwendbaren Gleichungen werden hier wiederholt. Es sind

$$\varDelta \alpha = \frac{\varDelta s_a}{r_a} - \frac{\varDelta s_b}{s_b} \operatorname{cotg} \gamma - \frac{\varDelta s_c}{s_c} \operatorname{cotg} \beta \tag{313}$$

oder

$$E \cdot \varDelta \alpha = (\sigma_a - \sigma_c) \operatorname{cotg} \beta - (\sigma_a - \sigma_b) \operatorname{cotg} \gamma. \tag{314}$$

Für $\varDelta \beta$ und $\varDelta \gamma$ gelten gleiche Ausdrücke.

Darin bedeuten:

α, β, γ: die Dreieckswinkel der *Ecken* a, b, c;

s_a, s_b, s_c: die den betreffenden Winkeln *gegenüber* liegenden Seiten;

$\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$: die zugehörigen Stabspannungen.

Wird die erste Gl. (313) in die Form

$$\varDelta \alpha = \frac{\varDelta s_a}{r_a} - \frac{\varDelta s_b}{r_b} - \frac{\varDelta s_c}{r_c}$$

gebracht, so kann sie (nach LAND) zu einer *sehr einfachen empfehlenswerten graphischen Ermittelung* von $\varDelta \alpha$ dienen, wie sie in der Fig. 299

erläutert wird. Darin sind r_a, r_b, r_c durch die Ecke a verlaufende Hilfsgeraden die der Reihe nach auf s_a, s_b, s_c senkrecht stehen und deren Länge durch die s_a mit ihren Verlängerungen begrenzt wird (S. 126).

Nach erfolgter Berechnung oder Darstellung aller Winkeländerungen bilden diese die Grundlage zur Ermittelung der in jedem Knoten des belasteten Fachwerks hervorgerufenen *Einspannungsmomente. Es ist nämlich die Winkeländerung zwischen zwei Knotenstäben gleich derjenigen, welche das zugehörige Moment hervorbringen muß, um die Einspannung wieder zu beseitigen, d. h. um den betrachteten geänderten Winkel wieder auf seine ursprüngliche Größe zurückzuführen.*

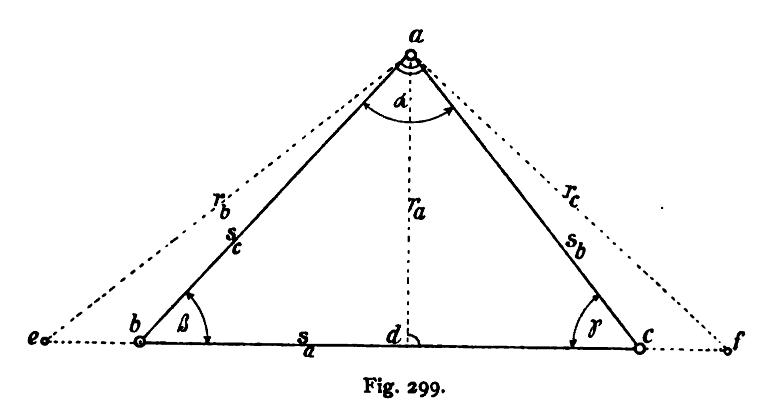


Fig. 299.

Treffen in einem Knoten n Stäbe zusammen, so gibt es dort $n - 1$ Winkeländerungen. Diese müssen von n Momenten beseitigt gedacht werden. Außerdem muß aber die algebraische Summe aller n Momente im Knoten, um dort das Gleichgewicht zu erhalten gleich Null sein. Das gibt zusammen $n - 1 + 1 = n$ Bedingungen, aus welchen die n Unbekannten der Momente zu entnehmen sein werden. Prof. H. MANDERLA in München war der Erste, der gestützt auf den erläuterten Grundgedanken, die Berechnung von Nebenspannungen zeigte[1]. Verfasser, der oben schon die graphische Ermittelung der Winkeländerungen empfohlen hat, bevorzugt auch im folgenden die graphische Behandlung der vorliegenden Aufgabe.

[1] Vgl. MANDERLAS Lösung der Preisaufgabe: »Welche Spannungen entstehen in den Stäben eines Fachwerkträgers dadurch, daß die Winkel der Fachwerkdreiecke durch die Belastung eine Änderung erleiden?« Jahresbericht der Münchener Techn. Hochschule. 1878—79. S. 18. — MANDERLA. Die Berechnung der Sekundärspannungen im einfachen Fachwerk infolge von starren Knotenverbindungen. Allg. Bauz. 1880.

57. Berechnung der Nebenspannungen der Fachwerke.

a. Die elastische Linie des an seinen Enden eingespannten Stabes.

1. Es wird jetzt darauf ankommen, die verbogene Gestalt jedes Stabes darzustellen. Dazu braucht man aber, wie weiterhin näher begründet wird, nicht die ganze elastische Linie (§ 2), sondern nur die sog. *Tangentenwinkel der Einspannung*, d. h. die Winkel τ und τ', die

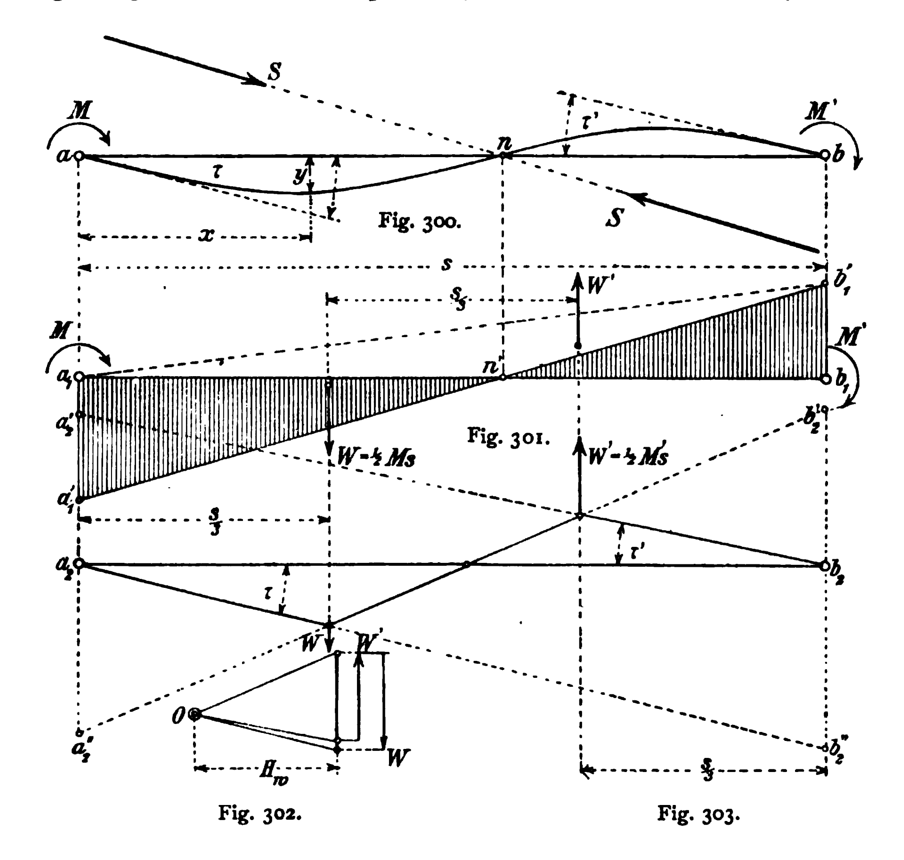


Fig. 300.

Fig. 301.

Fig. 302.

Fig. 303.

von der ursprünglichen geraden Stabachse mit der Berührungsgeraden an die elastische Linie in der Einspannung beider Enden gebildet werden (Fig. 300). Man kann deshalb die für die Darstellung nötige *Momentenfläche* (Fig. 301) als den Unterschied zweier Dreiecke auffassen, ähnlich wie es (unter **52**) für die Biegelinien von durchgehenden Trägern geschehen ist. Danach ist anzuschreiben

$$\text{Fl. } a_1 b_1 b'_1 a'_1 = \text{Fl. } \triangle a_1 a'_1 b'_1 - \text{Fl. } \triangle b_1 b'_1 a_1 ,$$

M und M' seien die Einspannungsmomente in den Stabenden a und b. Ferner sei

$$\overline{a_1 a_1'} = M,$$
$$\overline{b_1 b_1'} = M'.$$

Der Stabquerschnitt F darf auf der Stablänge s überall gleich groß angenommen werden. Deshalb ist eine elastische Kraft

$$W = \frac{M}{EJ}$$

dem Momente proportional. Die beiden zur Darstellung des Seilecks der elastischen Linie zu benutzenden Kräfte W und W' (Fig. 302—303) greifen danach in den Drittelspunkten der Stablänge an und ihre Größe bestimmt sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} W &= \pm \tfrac{1}{2} M s, \\ W' &= \mp \tfrac{1}{2} M' s. \end{aligned} \tag{315}$$

Daraus findet man das Seileck der elastischen Linie und die gesuchten Tangentenwinkel τ und τ'.

Um eine Beziehung zwischen den M und den τ zu finden, betrachten wir die von den Seileckseiten $\overline{a_2 c_2}$ und $\overline{c_2 d_2}$ auf der durch b_2 verlaufenden Lotrechten abgeschnittenen Strecken als proportional den zugehörigen Momenten der elastischen Kräfte W und W', und erhalten

$$\overline{b_2' b_2''} = \frac{\tfrac{1}{2} M \cdot s \cdot \tfrac{2}{3} s}{EJ}; \qquad \overline{b_2 b_2'} = \frac{\tfrac{1}{2} M' \cdot s \cdot \tfrac{1}{3} s}{EJ}. \tag{316}$$

Vertauscht man, wie hier wegen der Kleinheit der Winkel zulässig ist, die Tangentenwinkel mit ihrer trigonometrischen Tangente, so ist in Verbindung mit Gl. (316) anzuschreiben

$$\tau = \frac{\overline{b_2 b_2''}}{s} = \frac{(2M - M')s}{6EJ}$$

und

$$\tau' = \frac{\overline{a_2 a_2'}}{s} = \frac{(2M' - M)s}{6EJ}. \tag{317}$$

Die Momente sollen *positiv* genannt werden, wenn sie das zugehörige Stabende im Sinne des Uhrzeigers nach rechts drehen. Sind beide Momente gleichen Vorzeichens, wie in Fig. 301, so nimmt die elastische Linie die doppeltgekrümmte Gestalt eines **S** an. Schneidet aber die Stabkraft S die Stabachse außerhalb des Stabes, so erleidet dieser nur eine einfache Krümmung. Das geschieht, wenn beide Momente in verschiedenem Sinne drehen.

3. W. RITTER[1] macht darauf aufmerksam, wie *genau genommen* die Tangentenwinkel τ und τ' nicht ohne Berücksichtigung der *Hebelarme* der Stabkraft S berechnet werden sollten, weil diese sich während der Biegung des Stabes verändern und selbst so kleine Größen sind, daß *ihre Änderungen* nicht vernachlässigt werden dürfen. Genauer würde man deshalb wie folgt rechnen müssen.

Mit Bezug auf die Fig. 300 lautet die Gleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EJ},$$

worin

$$M_x = Sy + M\frac{(s-x)}{s} - M'\frac{x}{s}$$

anzuschreiben ist, wenn S eine Druckstabkraft in der Achse des gebogenen Stabes bedeutet und M, M' die Einspannungsmomente in a und b vorstellen. Dann ist M_x aus der Momentenfläche der Fig. 301 unmittelbar zu entnehmen. Nach erfolgter Integration und Bestimmung der Unveränderlichen aus $x = 0$, $x = s$ und $y = 0$ erhält man daraus

$$y = \frac{M}{S}\cos\left(\frac{Nx}{s}\right) - \left(\frac{M\cos N + M'}{S\sin N}\right)\sin\left(\frac{Nx}{s}\right) + \frac{(M+M')x - Ms}{S\cdot s}, \quad (318)$$

wenn zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{Ss^2}{EJ}} = N \quad (319)$$

gesetzt wird. Bildet man danach die erste Abgeleitete und setzt darin $x = 0$, so gibt das

$$\frac{dy}{dx} = \tau = \frac{N(M\cos N + M')}{S\cdot s\cdot \sin N} + \frac{M+M'}{S\cdot s} \quad (320)$$

und bei Benutzung der Reihen für $\cos N$ und $\sin N$

$$\tau = \frac{s(2R\cdot M + R'M')}{6EJ}, \quad (321)$$

worin

$$R = 1 + \frac{N^2}{15} + \frac{2N^4}{315} + \frac{N^6}{1575} + \cdots$$

und

$$R' = 1 + \frac{7N^2}{60} + \frac{31N^4}{2520} + \frac{127N^6}{100800} + \cdots \quad (322)$$

bedeuten. Um τ' zu finden braucht man (nach Gl. 317) nur M und M' zu vertauschen.

---

[1] Anwendungen der graphischen Statik. II. Das Fachwerk. S. 181.

Ist die Stabkräft S kein Druck, sondern ein Zug, so ändert sich ihr Vorzeichen, oder (was nach Gl. (319) dasselbe ist) das Vorzeichen von N^2. *Die Gl.* (322) *gelten also auch für Zugstäbe, wenn man darin das zweite Glied negativ rechnet.*

Für $N = 0$, d. h. für $J = \infty$, geht die Gl. (321) in die frühere Gl. (317) für τ über. Diese gibt deshalb um so ungenauere Werte für τ, je kleiner J gegenüber der Stablänge s ist, oder je schlanker die Stäbe sind. Für den gelegentlichen Gebrauch beim Vergleiche der aus den Gl. (321 und 322) erhaltenen τ-Werte dient die (von Ritter gegebene) Tabelle 46.

Tabelle 46. Zur Berechnung der Tangentenwinkel τ und τ'.

$N^2 = \frac{Ss^2}{EJ}$	Zugstäbe				Druckstäbe			
	R		R'		R		R'	
0,0	1,000		1,000		1,000		1,000	
		7		12		7		12
0,1	0,993		0,988		1,007		1,012	
		6		11		6		11
0,2	0,987		0,977		1,013		1,023	
		6		11		8		13
0,3	0,981		0,966		1,021		1,036	
		7		11		7		13
0,4	0,974		0,955		1,028		1,049	
		5		10		7		12
0,5	0,969		0,945		1,035		1,061	
		7		11		7		13
0,6	0,962		0,934		1,042		1,074	
		6		10		8		14
0,7	0,956		0,924		1,050		1,088	
		5		10		7		14
0,8	0,951		0,914		1,057		1,102	
		6		9		9		13
0,9	0,945		0,905		1,066		1,115	
		6		10		8		15
1,0	0,939		0,895		1,074		1,130	
		27		46		43		78
1,5	0,912		0,849		1,117		1,208	
		24		42		48		87
2,0	0,888		0,807		1,165		1,295	
		23		38		54		100
2,5	0,865		0,769		1,219		1,395	
		21		34		63		115
3,0	0,844		0,735		1,282		1,510	

b. Darstellung der Einspannungsmomente[1].

1. In der Fig. 304 ist ein beliebig belasteter Fachwerksknoten dargestellt, in welchem vier Stäbe in Einspannungen endigen, wodurch jeder Stab **S**-förmig verbogen worden ist. Der Knoten trägt die Nummer 5 und die Knoten der unmittelbar daran stoßenden Dreiecke seiner Stäbe sind mit 3, 4, 6, 7 numeriert. Deshalb werden die in Frage kommenden vier *Tangentenwinkel* mit τ_3, τ_4, τ_6, τ_7 bezeichnet. Die im betrachteten Knoten 5 anstoßenden *Dreieckswinkel* sollen α heißen, aber

[1] Nach W. Ritter a. a. O.

jeder dieser drei Winkel erhält als Zeiger die Knotennummern der ihm gegenüberliegenden Seite. Die *Winkeländerungen* $\varDelta\alpha$ sind darnach mit

$$\varDelta\alpha_{3-4}, \quad \varDelta\alpha_{4-6}, \quad \varDelta\alpha_{6-5}$$

anzuschreiben.

Die Änderung des Winkels α_{3-4} ist nun offenbar gleich dem Unterschiede der zugehörigen Tangentenwinkel. Es ist also

$$\varDelta\alpha_{3-4} = \tau_3 - \tau_4 . \tag{323}$$

In Verbindung mit der Gl. (317) gibt das

$$E \cdot \varDelta\alpha_{3-4} = \frac{s_3(2M_3 - M_3')}{6J_3} - \frac{s_4(2M_4 - M_4')}{6J_4}, \tag{324}$$

worin die zu τ_3 und τ_4 gehörigen Stäbe und Momente die gleichen Zeiger 3 und 4 erhalten haben.

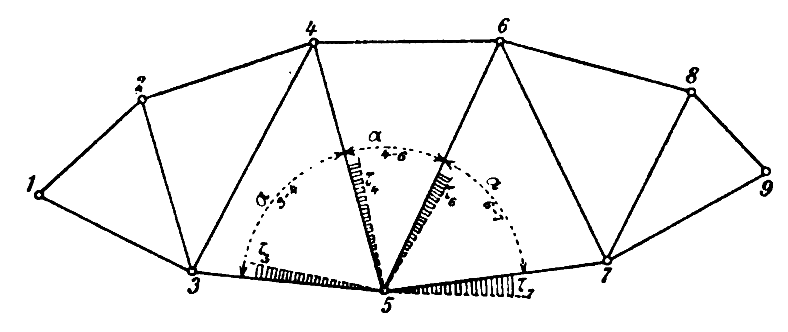


Fig. 304.

Gleichartige Beziehungen sind für die Winkeländerungen $\varDelta\alpha_{4-6}$, $\varDelta\alpha_{6-5}$ anzuschreiben. Dazu erhält man aus dem Gleichgewichte zwischen den Einspannungsmomenten im Knoten 5 noch die Bedingung

$$M_3 + M_4 + M_6 + M_7 = 0 . \tag{325}$$

Setzt man zur Abkürzung den Ausdruck

$$\frac{sM}{6J} = K, \tag{326}$$

wobei K eine *Kraft für die Flächeneinheit* darstellt, die also nach gleichen Einheiten wie σ und $E \cdot \varDelta\alpha$ gemessen wird, so erhält man für den Knoten 5 die folgenden vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} E \cdot \varDelta\alpha_{3-4} &= (2K_3 - K_3') - (2K_4 - K_4'), \\ E \cdot \varDelta\alpha_{4-6} &= (2K_4 - K_4') - (2K_6 - K_6'), \\ E \cdot \varDelta\alpha_{6-7} &= (2K_6 - K_6') - (2K_7 - K_7'), \\ \frac{J_3K_3}{s_3} + \frac{J_4K_4}{s_4} &+ \frac{J_6K_6}{s_6} + \frac{J_7K_7}{s_7} = 0 . \end{aligned} \tag{327}$$

Für jeden Knoten, in welchem k Stäbe angreifen, sind k solcher Gleichungen anzuschreiben. Für das gesamte belastete Fachwerk mit n Stäben erhält man danach $2n$ Bedingungsgleichungen. Daraus lassen sich die $2n$ Unbekannten der Momente M ausscheiden.

Zu beachten bleibt, daß in den genannten $2n$ Gleichungen jede K-Größe zweimal vorkommt. Z. B. bedeutet K_4 für den Knoten 5 ebensoviel wie K_5' für den Knoten 4, weil in der Abkürzung der Gl. (324) das M stets für das Stabende im betrachteten Knoten, das M' für das Ende des *nicht* betrachteten Knotens gilt.

2. Unter der Voraussetzung, daß für den betrachteten Knoten 5 sowohl die Größen $E \cdot \Delta\alpha$ als auch die K' bekannt seien, soll jetzt die *graphische Ermittelung der K-Werte* gezeigt werden.

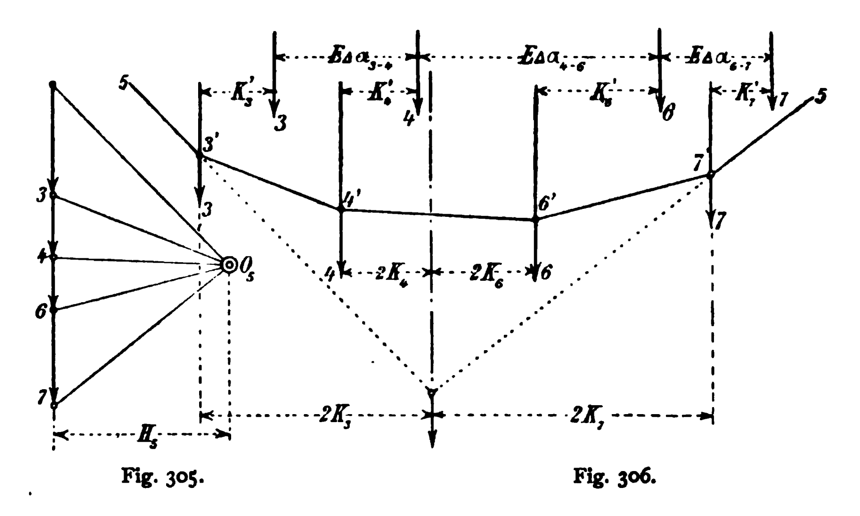


Fig. 305. Fig. 306.

Man bilde aus den gegebenen Größen $J:s$ im beliebigen Maßstabe eine lotrechte Kraftlinie und ein Krafteck mit beliebigem Pole H_5 (Fig. 305). Die Kräfte sind (wie die τ) mit 3, 4, 6, 7 numeriert und sodann (behufs Darstellung des Seilecks) in Abständen aufgetragen worden, die gleich den zugehörigen Werten $E \cdot \Delta\alpha$ gemacht sind (Fig. 305—306). Man verschiebe darauf jede der vier Kräfte um die zugehörige Kraftstrecke K' nach links und zeichne mit Hilfe des Kraftecks zwischen den letzterhaltenen Kraftrichtungen das Seileck 5—3'—4'—6'—7'—5. Dann ist folgender Satz auszusprechen:

Wenn man die gegebenen Größen $J:s$ der Reihe nach in Abständen von $E \cdot \Delta\alpha$ als parallele Kräfte aufträgt und darauf jede Kraft um den Abstand K' nach links verschiebt, so läßt sich zwischen den so erhaltenen

Kraftrichtungen mit Hilfe eines Kraftecks ein Seileck zeichnen, worin die Abstände der Kräfte von ihrer Mittelkraft gleich den doppelten Werten von K sind.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus den Gl. (327). Denn wenn eine um K' verschobene Kraft um $2K$ von der Mittelkraft absteht, so ist der nämliche Abstand in ihrer unverschobenen Lage gleich $2K - K'$. Weil aber in dieser Lage jede Kraft von der nächsten um $E \cdot \Delta\alpha$ absteht, so hat. man z. B. den Abstand

$$E \cdot \Delta\alpha_{3-4} = (2K_3 - K_3') - (2K_4 - K_4')$$

anzuschreiben. Das bedeutet die Erfüllung der ersten drei der Gl. (327). Die vierte Gleichung ist ebenfalls erfüllt. Denn im Seileck der Fig. 306 ist, auf die Mittelkraftrichtung bezogen, die Summe der statischen Momente $\frac{J \cdot K}{s}$ gleich Null.

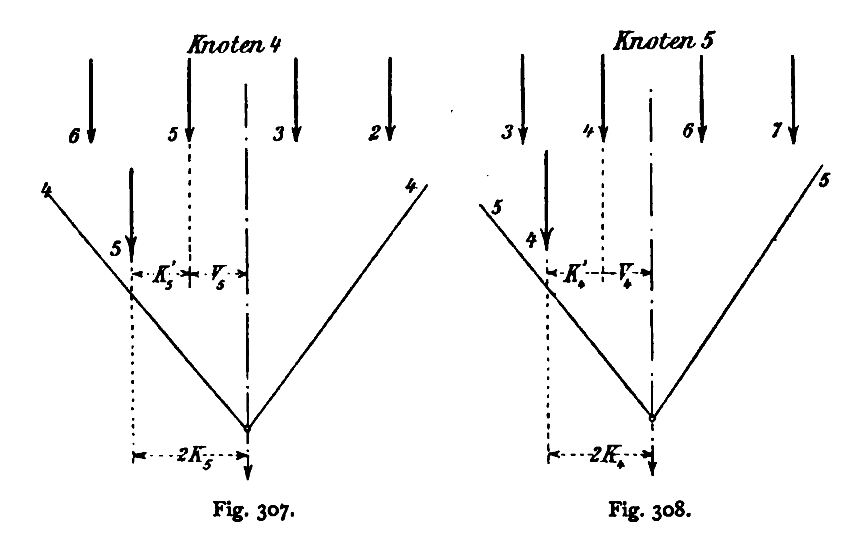


Fig. 307. Fig. 308.

3. Die Anwendung der erläuterten graphischen Darstellung zur Bestimmung der Momente M für jeden Knoten bereitet aber in jedem Falle insofern noch Schwierigkeiten, als von vornherein weder die K noch die K' bekannt sind. Diese Schwierigkeiten kann man dadurch überwinden, daß man zuerst für jeden Knoten ein Seileck für die *unverschobenen* Kräfte $J : s$ zeichnet und darin die Mittelkraftrichtung festlegt. Das mögen für Knoten 4 und 5 die beiden in den Fig. 307—308 nur durch ihre äußersten Seiten dargestellten Seilecke sein. Man erwäge jetzt, wie die Mittelkräfte in jedem Seileck sich bei der *Verschiebung*

der Einzelkräfte nicht sehr viel mitverschieben, weil die Einzelverschiebungen K' im allgemeinen verschiedene Größe haben. Deshalb kann man für die *erstmalige* Bestimmung der Verschiebungen K' die Mittelkraftrichtung als unveränderlich ansehen. Dann erhält man dafür in jedem Seileck eine einfache Beziehung: Bezeichnet man nämlich die Abstände der unverschobenen Kräfte von ihrer Mittelkraft mit V, so erhält man bei jeder Verschiebung K' (Fig. 307—308)

$$2K = K' + V.$$

Das gibt für die Seilecke 4 und 5

$$\begin{aligned} 2K_4 &= K_4' + V_4, \\ 2K_5 &= K_5' + V_5. \end{aligned} \tag{328}$$

Nun ist aber (nach vorigem)

$$\begin{aligned} K_5' &= K_4, \\ K_4' &= K_5. \end{aligned}$$

Das gibt

$$\begin{aligned} K_4' &= \frac{V_4 + 2V_5}{3}, \\ K_5' &= \frac{V_5 + 2V_4}{3}. \end{aligned} \tag{329}$$

Wäre also die Mittelkraftrichtung bekannt, so erhielte man in den Gl. (329) ein Hilfsmittel zur unmittelbaren Berechnung der K' und infolgedessen auch der K. Für eine erstmalige Annäherung darf man aber die Größen K' aus der *unverschobenen* Mittelkraftrichtung berechnen. Das ist in den Fig. 307—308 geschehen. Dadurch bestimmten sich erstmalig die Werte K_4 und K_5. Es ist nun (Fig. 304)

für Knoten 5:

$K_3 = K_5'$ für Knoten 3,
$K_4 = K_5'$ - - 4,
$K_6 = K_5'$ - - 6,
usw.

Ebenso ist *für Knoten* 4:

$K_2 = K_4'$ für Knoten 2,
$K_3 = K_4'$ - - 3,
$K_5 = K_4'$ - - 4,
usw.

Man kann daher ein erstmalig gewonnenes K eines Knotens als K' in das Seileck eines betreffenden andern Knotens übertragen. Alle

Seilecke müssen aber wiederholt gezeichnet werden und zwar solange, bis bei der Übertragung der K-Werte von einem Seileck in ein anderes, merkliche Abänderungen der gewonnenen Werte nicht mehr vorkommen.

4. Sobald alle Größen K und K' ermittelt worden sind, folgen für irgend einen Stab aus

$$K = \left(\frac{s}{6J}\right) M,$$

$$K' = \left(\frac{s}{6J}\right) M'$$

die unbekannten *Einspannungsmomente*. Damit ist (nach Fig. 301—303) auch das Moment M_x irgend eines Stabquerschnittes gegeben, woraus, nach bekannten Sätzen der Festigkeitslehre (I. 4. Abschnitt), auch die zugehörigen *Nebenspannungen* zu berechnen sind.

c. Zusätze.

1. Die Abweichung der Stabkraftrichtung von der ursprünglichen geraden Systemachse ist in den Stabenden (im Systemknotenpunkt) gleich Moment dividiert durch Stabkraft. Bezeichnet man die Hebelsarme mit c und c', so erhält man

$$c = \frac{M}{S} = \frac{6J \cdot K}{s \cdot S} \tag{330}$$

und

$$c' = \frac{M'}{S} = \frac{6J \cdot K'}{s \cdot S}.$$

2. Die *Vorzeichen* der Größen $E \cdot \Delta\alpha$ und K' (in den Darstellungen der Fig. 306) sind wohl zu beachten. Man rechne die Reihenfolge der Stäbe in jedem Knoten im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers, nehme positive $\Delta\alpha$ nach rechts, negative nach links hin weisend. Links von der Mittelkraft der $\frac{J}{s}$ liegende K sind als K' auch nach links, rechts davon liegende nach rechts aufzutragen, wobei links liegende K als positiv, rechts liegende als negativ anzusehen sind.

Hat man die *Winkelwerte der τ* mit Hilfe der Gl. (321) *genau* berechnet, so muß man die Größen R und R' der Gl. (322) einführen und deshalb in den Fig. 307—308 die parallelen Kräfte anstatt mit $\frac{J}{s}$ mit $\frac{J}{Rs}$ bewerten, und als deren Verschiebungen dann nicht K und K', sondern RK und $R'K$ auftragen.

3. In guten Konstruktionen wird man allen Stäben *Querschnitte* zu geben suchen, die zur lotrechten Y- und wagerechten X-Achse symmetrisch sind. Ihre *Nebenspannungen* σ_n folgen dann (nach I. **104**, a) aus der Gleichung

$$\sigma_n = \frac{My}{J} = \left(\frac{6y}{s}\right) K, \tag{331}$$

worin y den Abstand einer Querschnittsfaser von der X-Achse bedeutet. *Die Nebenspannungen sind danach in erster Linie von der Höhe oder Breite* $2y$ *der Stäbe abhängig.* Man wird deshalb versuchen müssen, diese in die Trägerebene fallenden Abmessungen möglichst zu beschränken, namentlich in der Wand. Denn dort sind so wie so eher *Verschiebungen der Achsenkräfte* außerhalb der Knotenmittel zu erwarten als in den Gurten, weil zur Stabachse symmetrische Nietanschlüsse zwischen Wandstäben und Gurten im allgemeinen schwieriger anzuordnen sind, als bei der Vernietung der Gurtstäbe unter sich.

d. Besondere Einflüsse.

1. *Wenn ein Stab außer dem Knotenmittel angreift*, so wird dadurch nicht allein eine besondere Nebenspannung erzeugt, sondern es ändern sich infolgedessen auch die im vorigen bereits berechneten Nebenspannungen. Bezeichnet c und c' den ursprünglich vorhandenen Hebelarm einer Stabkraft S in bezug auf das Mittel seiner Endknoten, so findet man den durch die Momente

$$M = S \cdot c,$$
$$M' = S \cdot c'$$

verursachten Ablenkungswinkel τ_c der Stabachse (nach Gl. 317) mit

$$\tau_c = \frac{s(2M - M')}{6EJ} = \frac{sS(2c - c')}{6EJ}. \tag{332}$$

Infolge der Außermittelbefestigung des Stabes ändern sich auch die Winkel α der betreffenden Stabdreiecke und zwar wird dadurch in der Fig. 306 eine Änderung der Werte $E \cdot \varDelta\alpha$ derart herbeigeführt, daß darin eine Verschiebung der betreffenden Kraft $\frac{J}{s}$ (vgl. c, 2) stattfindet.

Unter Berücksichtigung von Außermittelbefestigungen hat man danach wie folgt zu verfahren: Wie früher trägt man die Kräfte $\frac{J}{s}$ in Abständen $E \cdot \varDelta a$ auf. Dann verschiebt man alle Kräfte, die den außer Mittel befestigten Stäben angehören, um die zugehörigen Werte $E \cdot \tau_c$ nach rechts, bei negativem τ_c nach links.

Schließlich hat man die aus *dem unmittelbaren Einflusse der Momente* $S \cdot c$ *und* $S \cdot c'$ *entstehenden Stabspannungen* σ_c *den Nebenspannungen* σ_n *hinzuzufügen.* Dabei werden die beiden zusammen zu zählenden Spannungsgrößen meistens *verschiedene Vorzeichen* haben, so daß die durch die Außermittelbefestigung verursachte Spannung infolge des Einflusses der starren Knotenverbindung teilweise wieder aufgehoben wird.

2. Will man den Einfluß berechnen, den eine *gebogene Gestalt* eines Stabes ausübt, so braucht man nur die Winkel τ_c und τ_c' zu berechnen, um welche die Stabenden durch die in der Stabsehne wirkende Stabkraft S verdreht werden. Die Werte $E \cdot \tau_c$ und $E \cdot \tau_c'$ führt man dann in gleicher Weise (wie eben erläutert) in die Darstellung der Fig. 306 ein. Schließlich ist wieder die von der gebogenen Stabgestalt unmittelbar verursachte Spannung σ_c zu der berechneten Nebenspannung σ_n zu addieren.

Auch den *Einfluß des Eigengewichtes* kann man auf solche Weise berechnen: Man bestimme (für jeden Stab besonders) diejenige Spannung σ_e, welche das gleichmäßig verteilte eigene Gewicht g erzeugt und die dadurch verursachten Drehungswinkel τ_e und τ_e' der Stabenden. Die Größen $E \cdot \tau_e$ und $E \cdot \tau_e'$ führt man dann (in der Art wie bei der Außermittelbefestigung gezeigt) in die Darstellungen ein und sucht dazu die Größen K. Damit erhält man auch die Nebenspannungen σ_{ne} und kann sie zu den σ_e addieren.

3. Der *Einfluß unrichtiger Stabablängung* oder der Temperatur auf die Grundspannungen der statisch unbestimmten Systeme wurde bereits (unter **33—34**) besprochen. Die aus den gleichen Einflüssen bei Fachwerken mit starren Knoten entstehenden *Nebenspannungen* sind wie folgt zu ermitteln: Man nimmt (wie bei den unbestimmten Systemen) an, die durch unrichtiges Ablängen oder durch die Temperatur bewirkte Längenänderung Δs sei durch eine gleichwertige Spannung σ hervorgerufen worden. Dann wäre

$$\sigma = \frac{\Delta s}{s} E$$

oder

$$\sigma = E \cdot \alpha_t t$$

zu setzen. Hieraus berechnen sich die $E \cdot \Delta \alpha$ und die K, wie bekannt.

4. *Einflüsse von Bolzengelenken*, die *nicht reibungslos* arbeiten, berechnen sich leichter, als diejenigen der starren Knoten. Die Stabkraft S verschiebt sich in diesem Falle um eine solche Strecke c außer dem Bolzenmittel, daß das Moment $S \cdot c$ der am Bolzenumfange auftretenden Reibungsmomente das Gleichgewicht halten kann (Fig. 309).

Ist die Reibung gleich Null, so ist auch c gleich Null, d. h. die Stabkraft bleibt Achsenkraft. Findet bei *einer Drehung* des Stabes um den Bolzen Reibung statt, und ist R der am Bolzenumfange wirkende Reibungswiderstand, so ist

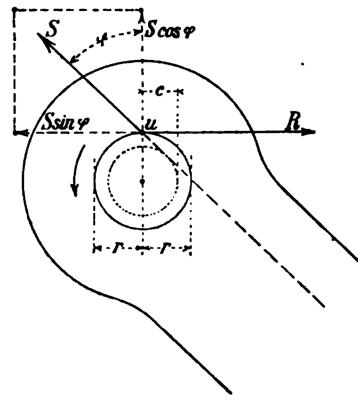


Fig. 309.

$$R \cdot r = S \cdot c,$$

wenn $2r$ der Bolzendurchmesser ist. Kennt man den Reibungswinkel φ, so folgt weiter

$$S \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot r = S \cdot c.$$

Das gibt

$$c = r \cdot \sin\varphi. \qquad (333)$$

c ist demnach unabhängig von der Größe der Stabkraft. Ist der Hebelarm von S kleiner als c, so kann keine Drehung des Bolzens eintreten. Für die Berechnung der Nebenspannungen wird anfangs der *Grenzwert* von c einzusetzen sein. Man erhält (nach Gl. 330)

$$c = \frac{6J \cdot K}{s \cdot S} \qquad (334)$$

und für den *Grenzwert* von K

$$K = \frac{S \cdot s \cdot r \sin\varphi}{6J}. \qquad (335)$$

Jetzt trage man (nach den Fig. 305—306) alle K-Strecken über dem betreffenden mit den Kräften $J:s$ gezeichneten Seilecke auf, zeichne diese wie früher, sorge aber dafür, daß sich die einzelnen Kräfte $\frac{J}{s}$ von ihrer Mittelkraft um nicht mehr als um ihre, nach der Gl. (335) zu berechnenden Grenzwerte entfernen. D. h. man versetze alle genannten Kräfte, die in größerem Abstande von der Mittelkraft zu liegen kommen, auf den betreffenden Grenzwert zurück. Im übrigen bleibt das Verfahren zur Berechnung der Nebenspannungen das gleiche.

Die *Grenzwerte der Nebenspannungen*, über welche diese nicht wachsen können, weil sonst *Drehung* des betreffenden Stabes um seinen Bolzen eintritt, berechnen sich aus

$$\sigma_n = \frac{M}{W} = \frac{S \cdot r \sin\varphi}{W}, \qquad (336)$$

wenn W das Widerstandsmoment des Stabquerschnittes ist.

Über die Größe des Reibungswinkels φ sind sichere Werte zur Zeit noch nicht anzugeben. Man wird gut tun, nicht zu kleine Werte anzunehmen, etwa $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$.

58. Näherungsverfahren zur Berechnung von Nebenspannungen[1]. Wie aus den vorstehenden Darlegungen (**57**) hervorgeht, ist die Aufstellung der grundlegenden Gleichungen zur Berechnung der Nebenspannungen eine ziemlich einfache und durchsichtige. Deren Auflösung ist aber, namentlich bei großer Knotenzahl, eine recht umständliche. Das ist der Grund, warum die meisten Konstrukteure, wenn sie sich nicht mit einer reinen Abschätzung der Spannungen begnügen, ein Näherungsverfahren anwenden. Schon der berühmte Konstrukteur SCHWEDLER (I. **44**) besaß ein eigenes sehr einfaches Verfahren dieser Art, das er leider niemals veröffentlicht hat. Danach berechnete er im Jahre 1887 (innerhalb 6 Wochen) die Nebenspannungen der Hauptträger der neuen Weichselbrücke bei Dirschau und übergab dem Verfasser die Ergebnisse zur Benutzung für den Entwurf der Brücke. Ein einfaches, recht übersichtliches und für praktische Aufgaben ausreichend genaues Verfahren ist auch dasjenige von LANDSBERG (1885). Es beruht auf der Annahme, daß die Trägheitsmomente der Wandglieder gegenüber denjenigen der Gurte als verschwindend klein vernachlässigt werden können und wird nachfolgend in seinen Grundzügen wiedergegeben.

a. Die Biegeflächen des Gurtstabzuges.

1. Wenn die Formänderungen der Wand vernachlässigt werden, so müssen offenbar die Einspannungsmomente für je zwei in einem Knoten zusammenstoßenden Gurtstäbe *gleich groß, aber entgegengesetzten Sinnes* sein. Es kommt nun darauf an, alle diese Momente M mit Hilfe der gegebenen Größen J, s und $\Delta\alpha$ darzustellen. $\Delta\alpha$ ist (wie unter **57**) diejenige Änderung des von je zwei Gurtstäben eingeschlossenen Winkels α, welche im belasteten Fachwerke bei reibungslosem Zusammenstoße der Gurtstabenden entstehen würde. Wie früher (unter **18**, b) bezeichnen wir die α als *Randwinkel*. Die Änderung eines Randwinkels kann mit Hilfe der Gl. (101) nach Fig. 89 aus den Grundspannungen und Dreieckswinkeln des Fachwerksystems berechnet werden und *dabei* sind die Wandstäbe mit zu berücksichtigen. Es wird danach im wesentlichen darauf ankommen, für eine Reihe von zusammenhängenden Stäben die Momente M derart zu bestimmen, *daß deren aus den einfachen Momentenflächen der Stabstrecken abgeleitete Biegelinien unter gegebenen Winkeln $\Delta\alpha$ zusammenstoßen.*

[1] LANDSBERG, Beitrag zur Theorie des Fachwerkes. Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. in Hannover. 1885 und 1886. — RITTER, Anwendungen der graphischen Statik. Zürich 1890. II. S. 195—202.

Fig. 310 stellt eine Reihe von Gurtstäben dar, die in den Knoten 0, 1, 2, 3, ... zusammenstoßen und dort die erwähnten Momente M_0, M_1, M_2, M_3, ... erfahren, weil in Wirklichkeit die bezeichneten Winkeländerungen $\Delta\alpha_0$, $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$, ... sich nicht vollziehen können. Die einfachen Momentenflächen dieser Gurtstäbe bilden Trapeze,

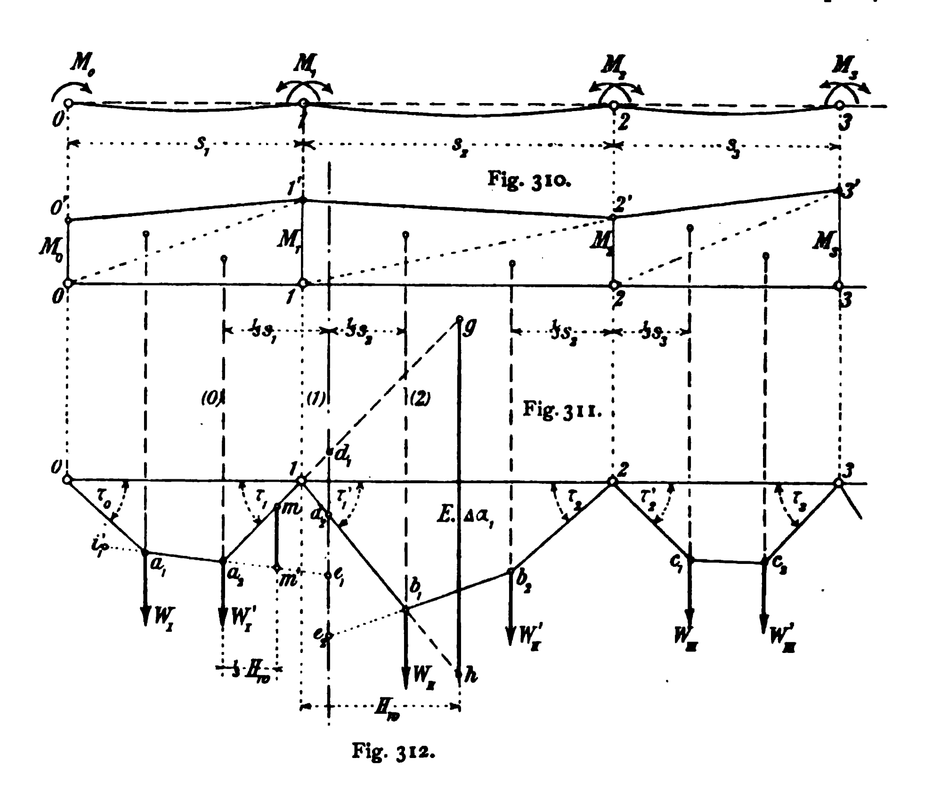


Fig. 312.

die wir, um die Biegelinien zu zeichnen, in Dreiecke zerlegt denken (vgl. Fig. 271—274 unter **52**). Jede elastische w-Kraft ist aus

$$w = \frac{M}{EJ}$$

zu berechnen. Wir wählen die Polweite des Kraftecks der W gleich einer beliebigen Strecke H_w. Werden dann die W-Kräfte allgemein aus

$$W = \frac{Ms}{2J}$$

berechnet, so erscheinen die Ordinaten der Biegeflächen in $E:H$-facher Vergrößerung.

Wenn man, wie zulässig ist, die geometrische Tangente mit dem Tangentenwinkel selbst vertauscht, so ist (mit Bezug auf die Fig. 312)

$$\Delta \alpha_1 = \tau_1 + \tau_1'; \quad \Delta \alpha_2 = \tau_2 + \tau_2'; \quad \Delta \alpha_3 = \tau_3 + \tau_3' \quad \text{usw.}$$

Man ziehe nun im Abstande H_w von 1 eine Lotrechte, die von den beiden im Knoten 1 zusammentreffenden Seileckseiten in den Punkten g und h geschnitten wird, dann ist die Strecke

$$\overline{gh} = H_w(\tau_1 + \tau_1') = H\Delta \alpha_1 .$$

Wären aber die Winkel τ in *natürlicher Größe* dargestellt worden, so würde man

$$\overline{gh} = H_w \cdot \Delta \alpha_1 \cdot \frac{E}{H_w} = E \cdot \Delta \alpha_1$$

erhalten. Damit ist der *wirkliche* Wert $E \cdot \Delta \alpha_1$ gefunden. Umgekehrt: Ist er von vornherein gegeben, so kann man ihn benutzen, um auch die M zu bestimmen.

2. Man geht jetzt auf die bekannte Theorie der durchgehenden Träger mit unverschiebbaren Stützen und unveränderlichem Trägheitsmomente der einzelnen Öffnungen zurück (§ 9). Die Stablängen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ bedeuten hier die Stützweiten. An Stelle der Stützen treten die Knoten. Man kann dann (wie früher unter **52**, a) die beiden *Drittelslinien* zeichnen und zwischen ihnen noch eine *mittlere Festlinie* auftragen, wenn man die Entfernung zwischen den erstgenannten Festlinien *im Verhältnisse* $\frac{J_1}{s_1} : \frac{J_2}{s_2}$ teilt. Die beiden Drittelslinien und die auf solche Weise erhaltenen mittlern Festlinien der ersten beiden Nachbaröffnungen sind mit (0), (1) und (2) bezeichnet.

Wenn man nun in den beiden ersten Öffnungen einerseits die an W_I' und anderseits die an W_{II} stoßenden Seileckseiten der Biegeflächen bis zur mittleren Festlinie (1) verlängert, so werden dadurch auf dieser zwei *gleich lange Strecken* $\overline{d_1 e_1}$ und $\overline{d_2 e_2}$ abgeschnitten (Fig. 312). Denn jede der Strecken entspricht dem Momente der zugehörigen W-Kraft, bezogen auf die mittlere Festlinie (1). Es ist also

$$\begin{aligned} \overline{d_1 e_1} &= W_I' \cdot \frac{J_1}{s_1} = \frac{M_1 s_1}{2 J_1} \cdot \frac{J_1}{s_1} = \frac{M_1}{2}, \\ \overline{d_2 e_2} &= W_{II} \cdot \frac{J_2}{s_2} = \frac{M_1 s_2}{2 J_2} \cdot \frac{J_2}{s_2} = \frac{M_1}{2}. \end{aligned} \tag{337}$$

Es soll jetzt zuerst das Folgende bewiesen werden:

Wenn ein Punkt i_1' in der Richtung der zweiten Seileckseite der ersten Öffnung bekannt wäre, so läßt sich mit Hilfe der durch die Gl. (337)

ausgedrückten Bedingung auch ein Punkt i_2' *ermitteln, der in der Richtung der zweiten Seileckseite der zweiten Öffnung liegt.*

Es lassen sich (wie unter **55**, c) Dreiecke zeichnen, deren Ecken in den drei Festlinien (0), (1) und (2) liegen und in welchen immer zwei Seiten durch je einen Festpunkt verlaufen. Ein solches Dreieck ist in der Fig. 313 dargestellt. Seine Ecken a_2, e_1 und b' liegen in den Festlinien, seine Seite $a_2 e_1$ verläuft durch einen *vorläufig angenommenen*

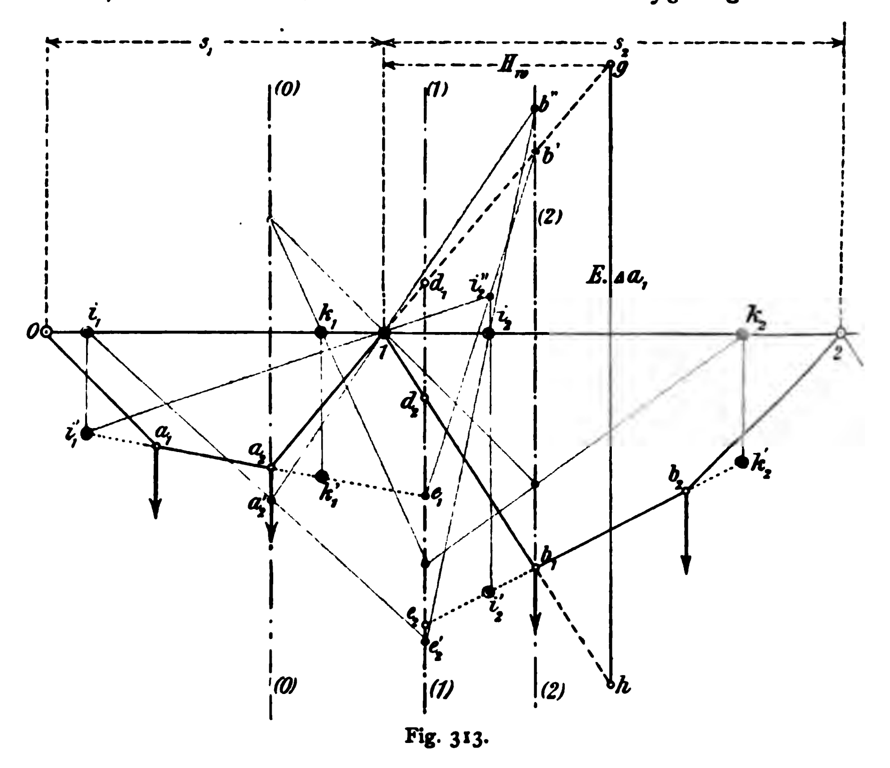


Fig. 313.

Punkt i_1' und die Seite $a_2 b'$ durch den Knotenpunkt 1. Deshalb muß die dritte Seite $b' e_1$ einen Festpunkt i_2'' enthalten, der in die Richtung der Geraden i_1'—1 fällt. Die gleichen Dienste, wie die Festpunkte i_1' und i_2'' leisten die durch diese geführten Lotrechten. Wenn man also an Stelle von i_1' den in der Lotrechten liegenden Achsenpunkt i_1 wählt, so braucht man, um einen Festpunkt i_2 der zweiten Öffnung zu erhalten, durch i_1 nur eine beliebige Gerade zu legen. Diese schneide die Festlinien (0) und (1) in den Punkten a_2' und e_2' und die Gerade a_2'—1 schneide die (2) im Punkte b''. Dann trifft die Gerade $b'' e_2'$ die Achse 1—2 im Festpunkte i_2. Außerdem müssen i_2 und i_2'' in eine Lotrechte fallen.

3. Man denke sich jetzt den von den beiden Gurtungen samt den Endständern (wenn solche vorhanden sind) gebildeten geschlossenen Ring in einem beliebigen Knoten durchgeschnitten und zu einem einzigen, langen Stabe ausgestreckt, wobei man in dem Knoten reibungslose Drehung voraussetzt. Dann kann man in der im vorigen und durch die Fig. 312—313 erläuterten Weise zuerst für jede Stablänge s die *Größen* $E \cdot \Delta\alpha$ (nach den Gl. 314) berechnen. Sodann sind die *Drittelslinien* und *die mittleren Festlinien* ((1), (2), (3) usw.) aufzutragen, sowie die davon allein abhängigen Lotrechten der Festpunkte i, vorausgesetzt, daß die Lage des Punktes i_1 der ersten Öffnung *vorläufig* angenommen worden ist. Sobald dies alles geschehen ist, ist der gesamte Zug der Seilecke der Biegeflächen gegeben und daraus findet man schließlich die noch fehlenden K-Größen der Gl. (327).

Mit Hilfe der drei Festlinien und des angenommenen Punktes i_1' der ersten Öffnung ist der Seilzug aller Öffnungen bestimmt: denn sobald die i_2-Lotrechte eingezeichnet und auf einer im Abstande H_w aufgetragenen Lotrechten die bekannte Strecke (Fig. 313)

$$\overline{gh} = E \cdot \Delta\alpha_1$$

abgemessen worden ist, liegt die erste Seite $1—b_1$ des Seilecks der zweiten Öffnung fest. Trägt man dann auf der Festlinie (1) noch die Momentenstrecke

$$\overline{d_2 e_2} = \overline{d_1 e_1}$$

ab, so ist dadurch auch die zweite Seileckseite $\overline{b_1 b_2}$ der zweiten Öffnung gegeben und in dieser und der i_2-Lotrechten liegt der Festpunkt i_2', der (genau so wie i_1' und i_1) benutzt werden kann, um den Seilzug der folgenden dritten Öffnung aufzuzeichnen. Wie man sieht, kann so nach und nach der gesamte Seileckzug dargestellt werden.

Ist dies geschehen und wird der letzte Knoten mit n bezeichnet, so haben sich die Fehler, die bei der vorläufigen Annahme des ersten Punktes i_1' gemacht worden sind, bis zur Festlegung des Punktes i_n' der n^{ten} Öffnung, von Öffnung zu Öffnung vermindert. Man fängt deshalb das gleiche Verfahren noch einmal *von vorne an*, *indem man mit Hilfe des Punktes* i_n' *der* n^{ten} *Öffnung die Lage des Punktes* i_1' *der* (*im Ringe*) *daran stoßenden ersten Öffnung richtig stellt.* So wird man es bald erreichen, daß alle Punkte i des Ringes ihre Lage nicht mehr ändern.

Die ganze Arbeit wird schließlich *noch einmal* durchgeführt, indem man (vom Knoten n rückwärts gehend) lauter k-Lotrechte aufzeichnet und diese ebenso, wie vorher die i-Lotrechten, in ihrer Lage ausreichend verbessert. So erhält man für die mittlere Seileckseite aller Öffnungen zwei Punkte i und k, und dadurch ist der gesamte Seilzug festgelegt.

b. Einspannungsmomente und Nebenspannungen.

1. Nach erfolgter Darstellung des Seilzuges findet man die gesuchten Momente wie folgt: Man ziehe z. B. in der ersten Öffnung im Abstande $\frac{1}{3}H_w$ von der Drittelslinie eine Lotrechte, durch welche zwischen der dritten und der Richtung der zweiten Seileckseite eine Strecke $\overline{mm'}$ (Fig. 312) abgeschnitten wird. Dann ist

$$H_w \cdot \overline{mm'} = W_1' \cdot \frac{H_w}{3} = \frac{M_1 s_1}{2 J_1} \frac{H_w}{3}$$

oder

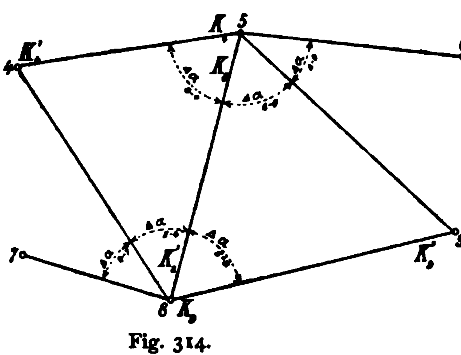
$$M_1 = \frac{6 J_1}{s_1} \cdot \overline{mm'}.$$

Die Strecken mm' sind danach in jeder Öffnung gleich den Größen K (**57**, b). Sämtliche *Momente* und die zugehörigen *Nebenspannungen* sind daher mit ihrer Hilfe zu finden. Sind sämtliche Stäbe gleich lang, so macht man am besten

$$H_w = s$$

und hat die K-Größen dann auf den Knotenlotrechten abzugreifen.

2. Die Nebenspannungen der Fachwerke sind jetzt durch die Größen K und die *Winkeländerungen* $\varDelta\alpha$ zwischen Gurten und Wandstäben gegeben. Es seien z. B. 4, 5, 6 und 7, 8, 9 Knoten von Ober- und Untergurtstäben (Fig. 314) und 5—8 der zu betrachtende Wandstab. Dieser schließe mit den Gurtstäben 4—5 und 8—9 die Winkel α_{8-4} und α_{5-9} ein. Hat man dann die zugehörigen Winkeländerungen berechnet (nach **57**, b), so sind (unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise) nach Maßgabe der Gl. (327) die beiden Bedingungen


Fig. 314.

$$E\varDelta\alpha_{8-4} = (2K_8 - K_8') - (2K_4 - K_4'),$$
$$E\varDelta\alpha_{5-9} = (2K_5 - K_5') - (2K_9 - K_9') \qquad (338)$$

anzuschreiben. Darin ist aber (**57**, b. 1)

für Knoten 5: $K_8 = K_5'$ für Knoten 8,
- - 8: $K_5 = K_8'$ - - 5.

Die Größen K_4, K_4', sowie K_9, K_9' sind nach vorigem bekannt, ebenso die Winkeländerungen $\varDelta\alpha_{8-4}$ und $\varDelta\alpha_{5-9}$. Daraus folgen die K_8 und K_8' sowie (nach Gl. 326) die zugehörigen Momente M_8, M_8' mit den Nebenspannungen des Wandstabes.

§ 11. Besondere Aufgaben.

59. Durchgehende Träger auf verschiebbaren Stützen.

a. Elastisch senkbare Stützpunkte[1].

1. Ein Nachgeben der Stützpunkte bewirkt *eine Verschiebung der Biegeflächenfestpunkte* (55, b) *in den unveränderlichen Festlinien* (Schwerlinien). Ist Δr die Senkung eines Stützpunktes r (*positiv* nach unten), so ist für zwei Nachbaröffnungen anzuschreiben

$$\begin{aligned} \delta'_{rs} &= \frac{\Delta_{r-1} - \Delta_r}{l_r}, \\ \delta''_{rs} &= \frac{\Delta_{r+1} - \Delta_r}{l_{r+1}}. \end{aligned} \tag{339}$$

Darin bedeutet (nach vorigem)

δ'_{rs}: die von einer Senkung der Stützpunkte verursachte Drehung der Tangente in r *links* von diesem Stützpunkte;

δ''_{rs}: desgl. *rechts* von r.

Aus den Gl. (339) erkennt man, wie die Biegeflächenfestpunkte sich abwärts oder aufwärts bewegen müssen, je nachdem die r^{te} Stütze unter oder über der Verbindungsgeraden zwischen ihren Nachbarstützen zu liegen kommt. Denn sobald elastisch senkbare Stützen zu berücksichtigen sind, müssen die Grundgleichungen (302) noch durch die Glieder δ'_{rs} und δ''_{rs} vervollständigt werden. Sie lauten dann

$$\begin{aligned} \delta'_r &= P \cdot \delta'_{mr} + M_{r-1} \cdot \delta_{(r-1)r} + M_r \cdot \delta'_{rr} + \delta'_{rs}, \\ \delta''_r &= P \cdot \delta''_{mr} + M_r \cdot \delta''_{rr} + M_{r+1} \cdot \delta_{(r+1)r} + \delta''_{rs}. \end{aligned} \tag{340}$$

Die δ_{rs} sind hier *keine gegebenen Größen*, sie sind von den Stützenkräften A abhängig, also auch von den dadurch bedingten Stützenmomenten M. Um diese Abhängigkeit analytisch ausdrücken zu können, möge bezeichnen:

k_{r-1}, k_r, k_{r+1}: die von der »*Einheit*« einer Stützenkraft A_{r-1}, A_r, A_{r+1} verursachte *elastische* Senkung der betreffenden Stütze. Etwaige *unelastische* durch besondere Ursachen (Nachgeben von Pfeilern und Gründungen oder dgl.) herbeigeführte Senkungen bleiben vorläufig außer Betracht.

Dann ist für die betrachteten beiden Nachbaröffnungen anzuschreiben

$$\begin{aligned} \Delta_{r-1} &= k_{r-1} \cdot A_{r-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_{r+1} &= k_{r+1} \cdot A_{r+1}. \end{aligned} \tag{341}$$

[1] Ostenfeld. Graphische Behandlung der kontinuierlichen Träger mit festen, elastisch senkbaren oder drehbaren und elastisch senk- und drehbaren Stützen. Zeitschr. für Arch. u. Ingenieurwesen. 1905. Heft 1.

Bezeichnet ferner $A_{0(r-1)}$ usw. die Stützenkraft *im Stützpunkte* $(r - 1)$ usw. des Hauptsystems, so gilt die Gleichung

$$A_r = A_{0r} + \frac{1}{l_r} M_{r-1} + \left(\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}}\right) M_r + \frac{1}{l_{r+1}} (M_{r+1}). \quad (342)$$

Daraus findet man in Verbindung mit den Gl. (339—341)

$$\delta'_{rs} = \frac{1}{l_r} [k_{r-1} \cdot A_{(r-1)} - k_r A_r]$$

und in weiterer Verbindung mit Gl. (342)

$$\delta'_{rs} = \frac{1}{l_r} \Big[k_{r-1} \cdot A_{0(r-1)} - k_r \cdot A_{0r} + \frac{k_{r-1}}{l_{r-1}} (M_{r-2} + M_{r-1}) + \frac{k_{r-1} + k_r}{l_r} (M_{r-1} - M_r) + \frac{k_r}{l_{r+1}} (M_r - M_{r+1})\Big].$$

Für δ''_{rs} erhält man einen ähnlichen Ausdruck. Zur Abkürzung setzen wir jetzt

$$\left(\frac{M_{r-1} - M_r}{l_r}\right) = \operatorname{tg} \varphi_r; \quad \left(\frac{M_r - M_{r+1}}{l_{r+1}}\right) = \operatorname{tg} \varphi_{r+1} \text{ usw.}$$

Darin bedeuten φ_r, φ_{r+1} usw. die von den Schlußlinienstrecken mit der Wagerechten eingeschlossenen Winkel (Fig. 315). Werden die Ausdrücke für die δ_{rs} in die beiden Grundgleichungen (340) eingeführt, so erhält man diese zunächst in der Gestalt

$$\delta'_r = 1 \cdot \delta'_{mr} + \left[\frac{1}{l_r}\{k_{r-1} \cdot A_{0(r-1)} - k_r \cdot A_{0r}\}\right] - \left[\frac{k_{r-1}}{l_r}\{\operatorname{tg}\varphi_{r-1} - \operatorname{tg}\varphi_r\} + \frac{k_r}{l_r}\{\operatorname{tg}\varphi_r - \operatorname{tg}\varphi_{r+1}\}\right] + [M_{r-1} \cdot \delta_{(r-1)r} + M_r \delta'_{rr}],$$

$$\delta''_r = 1 \cdot \delta''_{mr} + \left[\frac{1}{l_{r+1}}\{k_r \cdot A_{0r} - k_{r+1} \cdot A_{0(r+1)}\}\right] - \left[\frac{k_r}{l_{r+1}}\{\operatorname{tg}\varphi_r - \operatorname{tg}\varphi_{r+1}\} + \frac{k_{r+1}}{l_{r+1}}\{\operatorname{tg}\varphi_{r+1} - \operatorname{tg}\varphi_{r+2}\}\right] + [M_r \cdot \delta''_{rr} + M_{r+1} \cdot \delta_{(r+1)r}].$$

Setzt man schließlich in die vorstehenden Ausdrücke für die beiden mittleren Klammerwerte, in welchen die Stützenmomente M nicht *unmittelbar* erscheinen, der Reihe nach die Buchstaben K'_r, L'_r und K''_r, L''_r, so erhält man

$$\begin{aligned} \delta'_r &= 1 \cdot \delta'_{mr} + K'_r + L'_r + M_{r-1} \cdot \delta_{(r-1)r} + M_r \cdot \delta'_{rr}, \\ \delta''_r &= 1 \cdot \delta''_{mr} + K''_r + L''_r + M_r \cdot \delta''_{rr} + M_{r+1} \cdot \delta_{(r+1)r}. \end{aligned} \quad (343)$$

Dazu kommt die Grundgleichung (305 unter **55**, a. 3) mit

$$\delta'_r + \delta''_r = 0. \quad (344)$$

Die letzten drei Gleichungen lassen sich, ähnlich wie bei unverschiebbaren Stützpunkten bereits erläutert (**55**), geometrisch deuten wie nachfolgend für besondere Fälle ausgeführt wird.

2. *Die drei Festlinien* fallen hier (genau so wie bei unverschiebbaren Stützen) mit den Richtungen der drei Mittelkräfte

$$\sum_{r-1}^{r} w; \quad \sum_{r}^{r+1} w; \quad \sum_{r-1}^{r+1} w$$

zusammen. Denn ihre Lage ist von der Belastungsart, den Stützweiten und Stützensenkungen unabhängig. Wäre das zweite Glied der Gl. (343) nun nicht abhängig von den Größen M, wie es in der Tat ist, so könnten auch die zur Bestimmung der drei Festpunkte $f_{(r-1)}$, $f_{(r)}$ und $f_{(r+1)}$ erforderlichen Strecken h von vornherein, in gleicher Weise wie früher, aus Gl. (309), gefunden werden. Man brauchte nur

$$h_{(r-1)} = \frac{P\cdot\delta'_{mr} + K'_r + L'_r}{\sum\limits_{r-1}^{r} w}; \quad h_{(r+1)} = \frac{P\cdot\delta''_{mr} + K''_r + L''_r}{\sum\limits_{r}^{r+1} w};$$

$$h_{(r)} = \frac{P\cdot\delta'_{mr} + (K'_r + L'_r) + (K''_r + L''_r) + P\cdot\delta''_{mr}}{\sum\limits_{r-1}^{r+1} w} \tag{345}$$

zu machen. Weil aber die Größen L'_r und L''_r mittelbar von den M abhängig sind, so empfiehlt es sich, jede der Strecken h aus den Gl. (345) in zwei Teilen zu bestimmen, von denen der eine h' für L'_r und L''_r gleich Null, der andere h'' für K'_r und K''_r gleich Null zu ermitteln ist. Man erhält dann

$$h'_{(r-1)} = \frac{P\cdot\delta'_{mr} + K'_r}{\sum\limits_{r-1}^{r} w}; \qquad h''_{(r-1)} = \frac{L'_r}{\sum\limits_{r-1}^{r} w};$$

$$h'_{(r+1)} = \frac{P\cdot\delta''_{mr} + K''_r}{\sum\limits_{r}^{r+1} w}; \qquad h_{(r+1)} = \frac{L''_r}{\sum\limits_{r}^{r+1} w}; \tag{346}$$

$$h'_{(r)} = \frac{P\cdot\delta'_{mr} + K'_r + K''_r + P\cdot\delta''_{mr}}{\sum\limits_{r-1}^{r+1} w}; \qquad h''_{(r)} = \frac{L'_r + L''_r}{\sum\limits_{r-1}^{r+1} w}.$$

Die Endpunkte der Strecken h' seien f' und die Endpunkte der Strecken $(h' \pm h'')$ seien f (Fig. 315). Dann besitzen, wie leicht zu sehen, die Festpunkte f alle Eigenschaften der frühern Festpunkte f.

Das heißt, die Gerade $f_{(r-1)}-f_{(r+1)}$ verläuft durch $f_{(r)}$. **Ebenso führt die Gerade $t_{(r-1)}-t_{(r+1)}$, die zwischen den Schnittpunkten der Festlinien (f_{r-1}) und (f_{r+1}) mit den gesuchten Schlußlinien liegt, durch den Festpunkt $f_{(r)}$.**

3. Nach obigem wird es hier darauf ankommen, mit Hilfe der betreffenden beiden *äußern* Strecken h' und h'' die drei Festpunkte $f_{(r-1)}$, $f_{(r)}$ und $f_{(r+1)}$ zu ermitteln. Wie das geschieht ist jetzt darzulegen.

Wir nehmen einmal an, der gesuchte gebrochene Schlußlinienzug sei bekannt, z. B. gleich $0-\cdots(r-1')-(r')-(r+1')-\cdots$ (Fig. 315). Nach früherem ist dann anzuschreiben

$$\left.\begin{aligned} L'_r &= \frac{k_{r-1}}{l_r}\{\operatorname{tg}\varphi_{r-1}-\operatorname{tg}\varphi_r\}+\frac{k_r}{l_r}\{\operatorname{tg}\varphi_r-\operatorname{tg}\varphi_{r+1}\},\\ L''_r &= \frac{k_r}{l_{r+1}}\{\operatorname{tg}\varphi_r-\operatorname{tg}\varphi_{r+1}\}+\frac{k_{r+1}}{l_{r+1}}\{\operatorname{tg}\varphi_{r+1}-\operatorname{tg}\varphi_{r+2}\},\end{aligned}\right\} \tag{347}$$

$$h''_{(r-1)}=\frac{L'_r}{\sum\limits_{r-1}^{r} w};\quad h''_{(r+1)}=\frac{L''_r}{\sum\limits_{r}^{r+1} w}. \tag{348}$$

Zieht man nun der Reihe nach in den Abständen

$$\left.\begin{aligned} m'_r &= \frac{k_{r-1}}{l_r\sum\limits_{r-1}^{r} w};\quad & n'_r &= \frac{k_r}{l_r\sum\limits_{r-1}^{r} w};\\ m''_r &= \frac{k_r}{l_{r+1}\sum\limits_{r}^{r+1} w};\quad & n''_r &= \frac{k_{r+1}}{l_{r+1}\sum\limits_{r}^{r+1} w}\end{aligned}\right\} \tag{349}$$

fünf Lotrechte (Fig. 316) und legt zwischen diese folgende *Parallelen* zu den Geraden des Schlußlinienzuges:

$a'b'$ ‖	zur Geraden		$(r-2)'-(r-1)'$
$a'dc''$ ‖	-	-	$(r-1)'-r'$
$c'da''$ ‖	-	-	$r'-(r+1)'$
$a''b''$ ‖	-	-	$(r+1)'-(r+2)'$,

dann erhält man für die mit *starken Strichen* ausgezeichneten Strecken

$$\overline{b'c'}=m'_r\{\operatorname{tg}\varphi_{r-1}-\operatorname{tg}\varphi_r\}+n'_r\{\operatorname{tg}\varphi_r-\operatorname{tg}\varphi_{r+1}\},$$
$$\overline{b''c''}=m''_r\{\operatorname{tg}\varphi_r-\operatorname{tg}\varphi_{r+1}\}+n'_r\{\operatorname{tg}\varphi_{r+1}-\operatorname{tg}\varphi_{r+2}\},$$

oder mit Bezug auf die Gl. (346)

$$\left.\begin{aligned}\overline{b'c'} &= \frac{L'_r}{\sum\limits_{r-1}^{r} w} = h''_{(r-1)}\,,\\ \overline{b''c''} &= \frac{L''_r}{\sum\limits_{r}^{r+1} w} = h''_{(r+1)}\,,\end{aligned}\right\} \qquad (350)$$

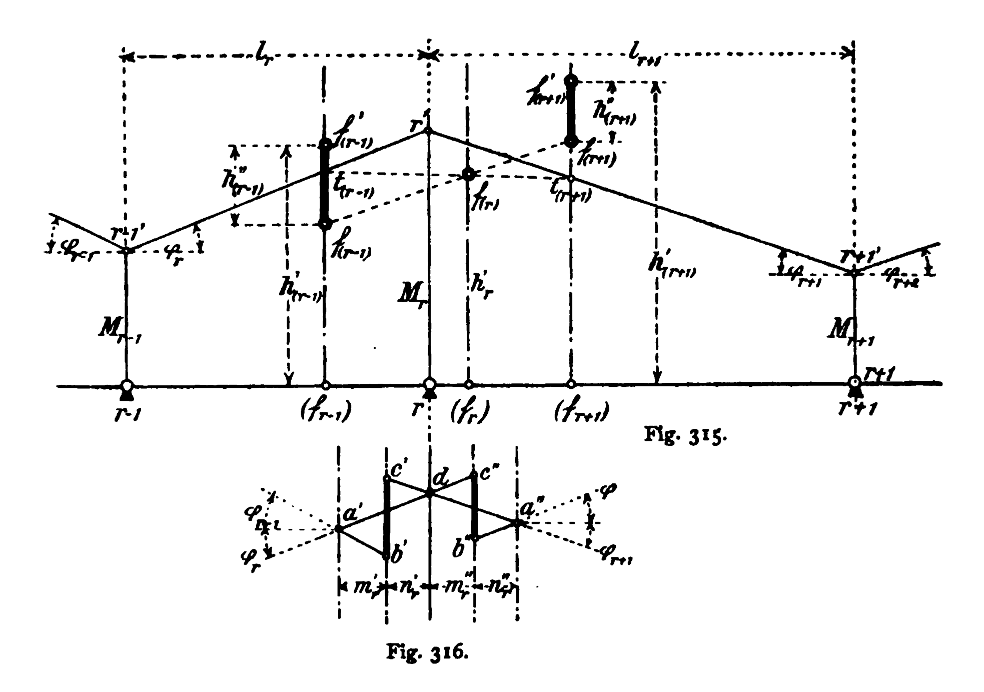


Fig. 315.

Fig. 316.

womit die gesuchten Strecken h'' gefunden sind. Daraus ergeben sich die Festpunkte $f_{(r-1)}$ und $f_{(r+1)}$. Ostenfeld nennt die Fig. 316 die *Richtungsfigur.* Aus ihr erkennt man, unter gleichzeitiger Beachtung der Vorzeichen in den Gl. (347) für tg φ, L'_r und L''_r, *wie die Festpunkte der äußern Festlinien über oder unter den Punkten f' liegen müssen, je nachdem die Punkte b über oder unter die Punkte c fallen. Danach kann man die Strecken bc aus der Richtungsfigur unmittelbar in ihrer Lage von den Punkten f der* Fig. 315 *übertragen.* Damit erhält man die gesuchten Festpunkte, mit deren Hilfe, wie weiter zu beschreiben sein wird, der Schlußlinienzug aufzuzeichnen ist.

4. Wir hatten den Schlußlinienzug als gegeben betrachtet und danach die Lage der drei Festpunkte bestimmt. Jetzt handelt es sich um die Lösung der umgekehrten Aufgabe, dabei setzen wir, wie früher, voraus, daß die Momente über den Endstützen gleich Null sind. Ist für diesen Fall der Schlußlinienzug festgelegt, so lassen sich, wie bekannt, auch alle Einflußflächen darstellen (nach **54**).

Der gesuchte Schlußlinienzug kann für sich als ein Seileck aufgefaßt werden, das mit beliebig großer Polweite H des Kraftecks zu zeichnen ist (Fig. 299—301 unter **55**, c). Deshalb kann man im vorliegenden Falle, von der ersten oder letzten Stütze anfangend, z. B. als *erste Schlußlinienseite* 0—1′ *beliebig legen*. Obwohl nun die weitere Führung des Schlußlinienzuges eindeutig bestimmt ist, so ist *dessen graphische Darstellnng doch nur durch Probieren zu ermöglichen*, in ähnlicher Weise, wie es (unter **57**—**58**) auch bei der Darstellung der Einspannungsmomente der starren Fachwerksknoten geschehen mußte. Man verfährt dabei wohl am einfachsten derart, *daß man die Lage des Festpunktes* i_1 *der zweiten Öffnung vorläufig annimmt* (Fig. 317). Hätte man zufällig diese Lage gleich zum ersten Male richtig getroffen, so wären damit (nach vorigem) auch alle Festpunkte der übrigen Öffnungen gegeben und der danach von 0 aus aufgetragene Schlußlinienzug müßte in der letzten Öffnung durch die Endstütze verlaufen. Das wird allerdings nach dem erstmaligen Eintragen des Linienzuges wohl nicht der Fall sein. So bleibt kein anderer Weg, als durch mehrfache Wiederholung des bekannten Verfahrens dahin zu gelangen, daß bei der Arbeit von links nach rechts, mit Hilfe der Festpunkte i, sowohl als auch bei der Wiederholung von rechts nach links, unter Benutzung der Festpunkte k, schließlich der gefundene Schlußlinienzug in unveränderter Lage verbleibt.

Wie man den ersten Festpunkt i_1 in der zweiten Öffnung vorweg *analytisch* bestimmen kann zeigt Ostenfeld in der S. 403 angegebenen Quelle. Zu den Fig. 317—318 ist noch das Folgende zu bemerken:

Die Art der Belastung ist ohne Einfluß auf die Lage der erwähnten Festpunkte. Deshalb verschwinden die zu ihrer Ermittelung notwendigen Strecken h' der äußeren Festlinien. Denn für den unbelasteten Zustand ist das erste Glied der Gl. (340) gleich Null, also allgemein auch in den Gl. (346)

$$h' = \frac{K'_r}{\sum' w} = 0$$

zu setzen, weil mit P die Stützenkräfte A_0, also auch die K' verschwinden.

Nachdem alle Festlinien und mittleren Festpunkte aufgetragen worden sind, folgt, bei angenommener Lage der ersten beiden Seiten

o—1′ und 1′—2′ der Fig. 317, die Lage der *dritten* Schlußlinienseite 2′—3′ mit Hilfe der Richtungsfigur (Fig. 318). Der mittlere Festpunkt f_1 liegt im Schnitte der t_0—t_2 und der mittleren Festlinie. In der Richtungsfigur wird jetzt $\overline{a'b'}$ wagerecht gemacht, $\overline{a'c''}$ parallel zur o—1′; c'—d—a'' parallel zur 1′—2′. Die Strecke $\overline{c'b'}$ der Richtungsfigur ist somit gleich $h''_{(0)}$. Wird $h''_{(0)}$ in die Fig. 317 übertragen, so erhält man dadurch den Festpunkt f_0. Legt man jetzt durch f_0 eine Gerade, die

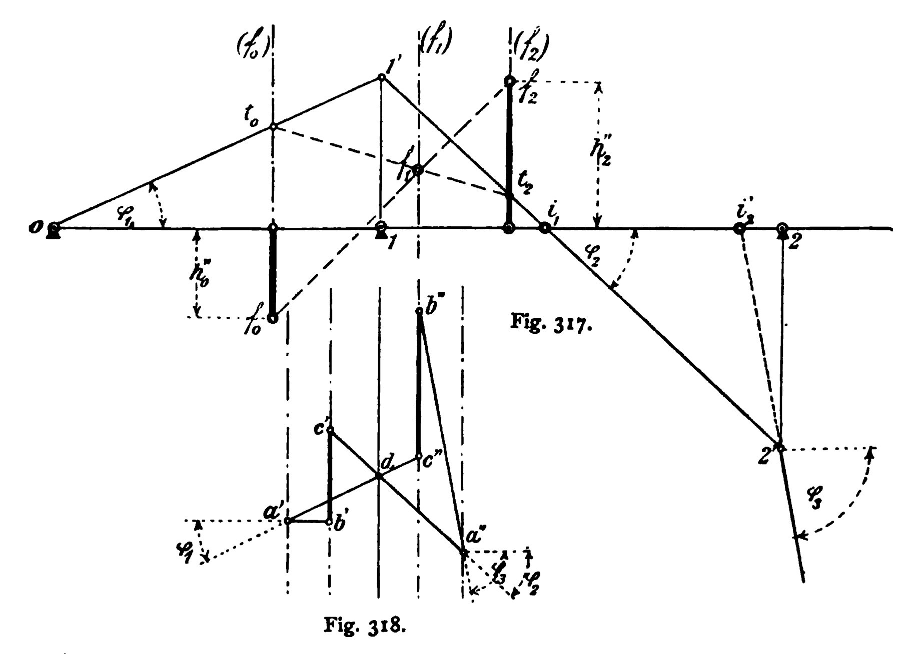


Fig. 317.

Fig. 318.

den mittleren Festpunkt $f_{(1)}$ trifft und verlängert sie bis zum Punkte f_2 der Festlinie $f_{(2)}$, so hat man damit $h''_{(2)}$ gefunden. Macht man endlich in der Richtungsfigur

$$\overline{c''b''} = h''_{(2)},$$

so muß die dritte Schlußlinienseite 2′—3′ *parallel zur* $a''b''$ laufen. Das gleiche Verfahren wiederholt sich beim ermitteln je eines Festpunktes i der folgenden Seiten (Fig. 318).

Wenn außer den rein elastischen Senkungen auch noch *bestimmt zu schätzende unelastische Senkungen* (sowie auch *Temperatureinflüsse*) in der Rechnung berücksichtigt werden sollen, so braucht man nur das erste Glied der Gl. (343) für δ'_r und δ''_r um die auf die Stütze r entfallende Senkung dieser Art (und um δ'_{rt}, δ''_{rt}) zu vergrößern. Im übrigen ändert sich an dem beschriebenen Verfahren nichts.

b. Wenig nachgibige elastisch senkbare Stützen.

1. Wenn nur solche Senkungen zu berücksichtigen sind, so empfiehlt es sich, das obige Verfahren etwas abzuändern, weil sonst die Abstände m und n der Richtungsfigur (Fig. 316) zu klein werden könnten, um danach einen ausreichend zuverlässigen Schlußlinienzug zu erhalten. Man verfährt deshalb wie folgt.

Man setzt

$$M_{r-1} = M^{\circ}_{r-1} + Z_{r-1},$$
$$M_r = M^{\circ}_r + Z_r,$$

und bestimmt die Werte M°_{r-1} und M°_r so, als ob in den Gl. (343) für δ'_r und δ''_r die Glieder K'_r und L'_r *gleich Null wären.* Geschieht dies, so haben die genannten Werte die gleiche Größe, *als ob die Stützen unverschiebbar wären.* Zur Bestimmung der Z-Werte erhält man damit die Grundgleichung

$$\delta'_r + \delta''_r = 0,$$

wobei jetzt anzuschreiben ist

$$\left.\begin{aligned} \delta'_r &= [K'_r + L^{\circ'}_r + L'_r] + [Z_{r-1} \cdot \delta_{(r-1)r} + Z_r \cdot \delta'_{rr}], \\ \delta''_r &= [K''_r + L^{\circ''}_r + L''_r] + [Z_r \cdot \delta''_{rr} + Z_{r+1} \cdot \delta_{(r+1)r}]. \end{aligned}\right\} \quad (351)$$

Darin haben K'_r, K''_r die frühere Bedeutung. $L^{\circ'}_r$ und $L^{\circ''}_r$ sind bekannt, sobald der Schlußlinienzug für die M°_r-Werte festgelegt worden ist. Dann ist

$$L^{\circ'}_r = \frac{k_{r-1}}{r} \{\mathrm{tg}\, \varphi^{\circ}_{r-1} - \mathrm{tg}\, \varphi^{\circ}_r\} + \frac{k_r}{l_r} \{\mathrm{tg}\, \varphi^{\circ}_r - \mathrm{tg}\, \varphi^{\circ}_{r+1}\},$$

$$L^{\circ''}_r = \frac{k_r}{l_{r+1}} \{\mathrm{tg}\, \varphi^{\circ}_r - \mathrm{tg}\, \varphi^{\circ}_{r+1}\} + \frac{k_{r+1}}{l_{r+1}} \{\mathrm{tg}\, \varphi^{\circ}_{r+1} - \mathrm{tg}\, \varphi^{\circ}_{r+2}\},$$

worin

$$\mathrm{tg}\, \varphi^{\circ}_r = \frac{M^{\circ}_{r-1} - M^{\circ}_r}{l_r} \quad (352)$$

usw. zu setzen ist.

Die Größen L'_r und L''_r haben die Bedeutung, wie in den frühern Gl. (347), jedoch ist darin für die Winkel φ zu setzen

$$\mathrm{tg}\, \varphi_r = \frac{Z_{r-1} - Z_r}{l_r}. \quad (353)$$

Wenn man die Momente M_r derart teilt, so erreicht man den Vorteil, daß man die Z_r-Werte (im Vergleich zu den M°_r-Werten) in *beliebigem Maße vergrößern* kann. Deshalb darf man auch die Abstände m und n der Richtungsfigur in gleichem Maße vergrößern. Denn alle in den beiden ersten Klammerwerten der Gleichungen für δ'_r und δ''_r enthaltenen Glieder sind den genannten Abständen einfach proportional.

Führt man zur Abkürzung noch die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} N_r' &= K_r' + L_r^{o'} + L_r', \\ N_r'' &= K_r'' + L_r^{o''} + L_r'' \end{aligned} \tag{354}$$

ein, so ist jetzt das Verfahren zur Darstellung des Schlußlinienzuges das folgende.

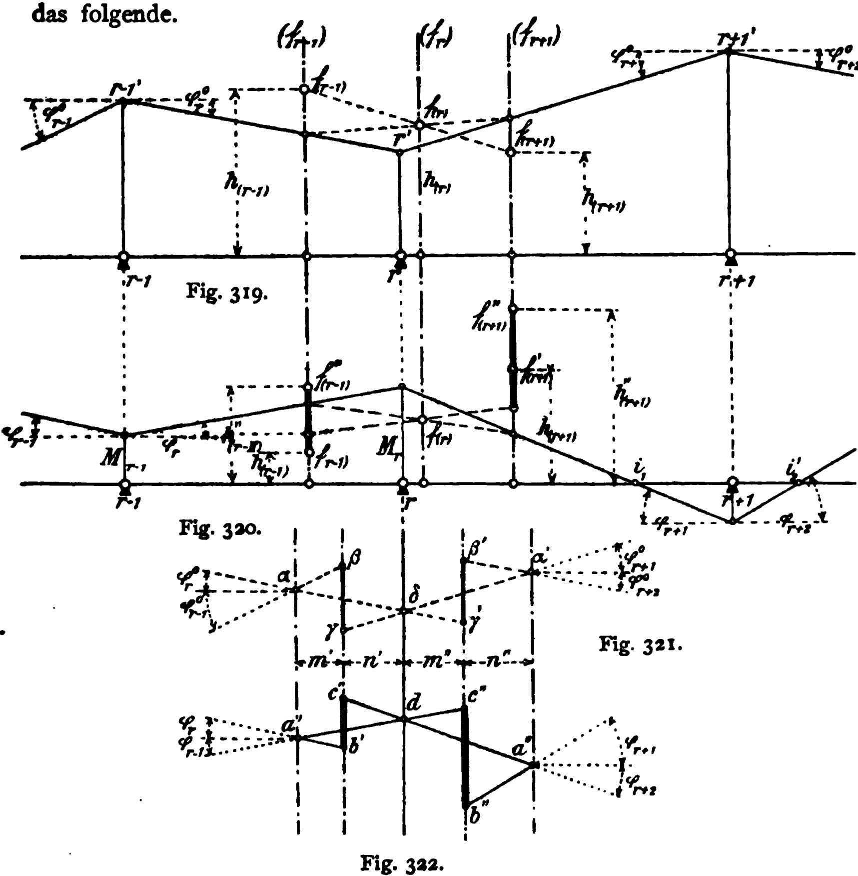


Fig. 319.

Fig. 320.

Fig. 321.

Fig. 322.

2. Die M_r^0-Momente werden (nach **55**) in bekannter Weise für unverschiebliche Stützen dargestellt (Fig. 319). Dadurch sind alle Winkel φ_r^0 gegeben. Jetzt werden die drei Festlinien zweier Nachbaröffnungen in die Fig. 320 übertragen und darauf folgt die Ermittelung der äußern Festpunkte $f''_{(r-1)}$, $f''_{(r+1)}$. Die dazu nötigen Strecken

$$h'_{(r-1)} = \frac{K_r'}{\sum\limits_{r-1}^{r} w}; \quad h'_{(r+1)} = \frac{K_r''}{\sum\limits_{r}^{r+1} w}$$

werden *in v-facher Vergrößerung* aufgetragen. Ihre obern Endpunkte sind (wie früher in der Fig. 316) mit $f'_{(r-1)}$ und $f'_{(r+1)}$ bezeichnet. Die von den L-Werten gelieferten Strecken $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$ (Gl. 347) werden in der *Richtungsfigur* (Fig. 321), in welcher die Abstände m und n um *das v-fache zu vergrößern* sind, eingezeichnet. Sie sind mit starken Strichen dargestellt, wobei die punktierten Parallelen den betreffenden Schlußlinien der Fig. 319 entsprechen. Nunmehr können die Strecken $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$ in bekannter Weise in die Fig. 320 übertragen werden. Schließlich findet man (mit Hilfe der Fig. 322) die von den Z-Werten abhängigen Strecken $f'_{(r+1)}-f''_{(r-1)}$ und $f'_{(r+1)}-f''_{(r+1)}$ und damit die gesuchten äußern Festpunkte $f''_{(r-1)}$ und $f''_{(r+1)}$. Das geschieht gerade so wie früher in Fig. 317—318. Die vorläufige Annahme eines Festpunktes i_1 und das daran sich knüpfende beschriebene Probierverfahren ist (bei der graphischen Darstellung) auch hier nicht zu vermeiden. *Die in dem Schlußlinienzuge der* Fig. 320 *gegebenen Stützenmomente werden allein von den elastischen Senkungen verursacht, während die Momente der* Fig. 319 *unverschieblichen Stützen entsprechen.*

60. Durchgehende Träger auf elastisch drehbaren Stützen.

a. Die Einspannungsmomente.

1. Bislang wurde freie Beweglichkeit der Träger über ihren Stützen vorausgesetzt, derart, daß dabei die Stützen keinen Widerstand leisten. Ein guter Konstrukteur wird es zwar vermeiden, ohne Not Biegungsmomente von den Trägern in die Stützen zu leiten, weil dadurch beide Teile Nebenspannungen erfahren. Es kommen aber doch Fälle vor, wo es für geraten gehalten wird, Träger und Stützen im Stützpunkte fest miteinander zu vernieten. Der Träger ist dann weder frei drehbar noch vollkommen eingespannt. Ein Beispiel dazu bieten die mit den Querträgern durchgehend vernieteten Längsträger einer Brücke (I. **10**).

Wenn die *Längenänderungen* in der Trägerachse vernachlässigt werden (was wir als zulässig voraussetzen), so können sich die Schnittpunkte r der lotrechten Stützenachsen mit der Trägerachse wagerecht nicht verschieben (Fig. 323—324). Unter den von lotrechten Lasten herbeigeführten Formänderungen von Stützen und Trägern bilden sich im Punkte r Tangentenwinkel: einerseits δ_r''' am obern Stützenende und anderseits die bekannten Winkel δ_r' und δ_r'' in der elastischen Linie des Trägers. *Diese drei Winkel müssen gleich groß sein: daraus erhält man ausreichende Bedingungen zur Berechnung der unbekannten Stützenmomente.*

Wir betrachten zwei Nachbaröffnungen mit den Stützpunkten $r-1$, r, $r+1$ und legen unendlich nahe jedem dieser Punkte einen lotrechten

Schnitt durch jede Trägeröffnung und einen wagerechten Schnitt durch jede Stütze (Fig. 325). Die in den Schnitten (zum Aufrechterhalten des Gleichgewichtes) anzubringenden unbekannten Momente seien

für den *Träger*, von links nach rechts: M''_{r-1}, M'_r, M''_r, M'_{r+1},
für die *Stütze* r: ΔM_r.

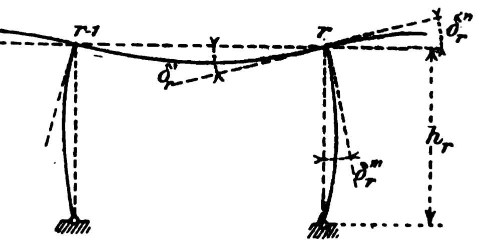


Fig. 323.

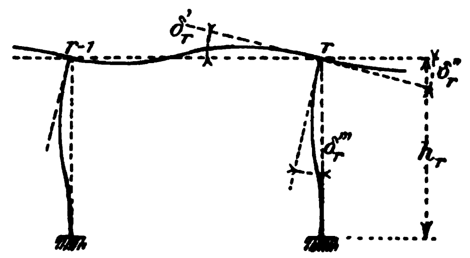


Fig. 324.

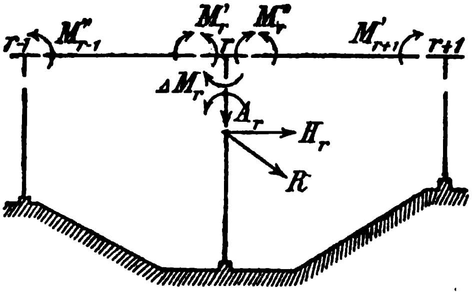


Fig. 325.

Somit haben wir ein *Hauptsystem* gebildet, das einesteils aus lauter einfachen Balkenträgern gebildet ist, die außer ihrer Belastung noch *die überzähligen Größen M* aufnehmen, andernteils aus einer Reihe von Stützen (Säulen, Pfeilern) besteht, an deren obern Ende je ein Moment M_r sowie auch in beliebiger Richtung eine Einzelkraft R angreifen (Fig. 325). R zerlegt sich in eine lotrechte Stützenkraft A und eine Bogenkraft H. Die *Zusammendrückung der Stütze* infolge der Wirkung von A wird vernachlässigt, die Stütze ist also nur elastisch drehbar, nicht senkbar.

2. Aus dem Gleichgewichte im Punkte r folgt die Bedingung

$$M'_r - M''_r - \Delta M_r = 0. \quad (355)$$

Dann soll unterschieden werden, ob der Stützen- oder Säulenfuß *frei drehbar* (Fig. 323) oder *eingespannt* ist (Fig. 324). Ist freie Drehbarkeit vorhanden, so liefert das Gleichgewicht die weitere Bedingung

$$H_r h_r - \Delta M_r = 0, \quad (356)$$

worin h_r die Stützenhöhe zwischen r und dem Gelenke am Stützenfuße vorstellt.

Der Tangentenwinkel δ_r''' berechnet sich wie für einen auf einer Länge h_r frei gestützten Balken, der an einem Ende mit ΔM_r belastet ist. *Bezeichnet man die von »$\Delta M_r = 1$« und im Sinne von ΔM_r bewirkte Drehung mit τ_r*, so erhält man

$$\delta_r''' = \Delta M_r \cdot \tau_r. \tag{357}$$

Diese Gleichung gilt auch für den *eingespannten* Stützenfuß.

τ_r ist in bekannter Weise (mit Hilfe der Arbeitsgleichung Mohrs oder graphisch durch Biegelinien usw.) zu bestimmen. Man erhält z. B.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } \textit{freie Drehbarkeit}: & \tau_r = \dfrac{h_r}{3EJ_{rs}}, \\ \text{- } \textit{Einspannung}: & \tau_r = \dfrac{h_r}{4EJ_{rs}}, \end{array}\right\} \tag{358}$$

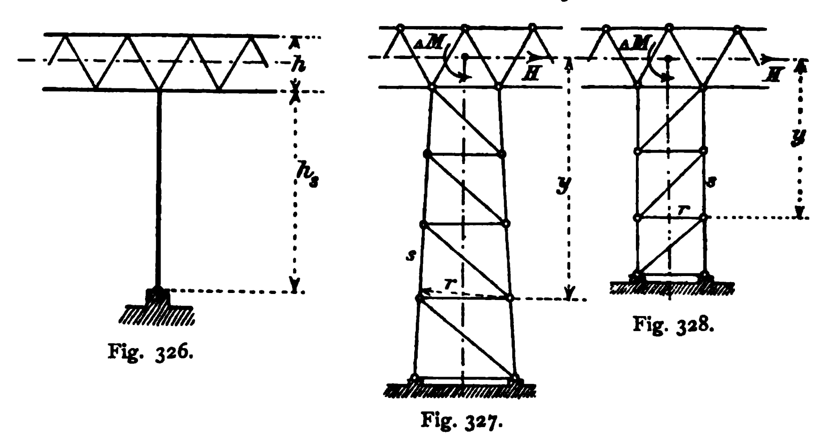


Fig. 326. Fig. 327. Fig. 328.

wenn J_{rs} das Trägheitsmoment der Stütze bezeichnet und h_r bis zum Schnittpunkte von Träger- und Stützenachse gerechnet wird. Genau genommen sollte man anstatt h_r nur die Höhe h_s bis zur Untergurtlinie des Trägers rechnen (Fig. 326) und das Trägheitsmoment unendlich groß auf der Strecke $\frac{h}{2}$ von dort bis zur Trägerachse. Dann würde man z. B. für die Einspannung erhalten

$$\tau_r = \frac{h_s^3}{(3h^2 + 6hh_s + 4h_s^2)EJ_{rs}}. \tag{359}$$

Der Tangentenwinkel τ ist auch für andere Stützen- und Trägeranordnungen leicht zu berechnen. Man erhält z. B. für den *Turmpfeiler* in Fig. 327, oder den *Gerüstpfeiler* in Fig. 328

$$\tau_r = \sum w - \frac{\left(\sum yw\right)^2}{\sum y^2 w}, \tag{360}$$

worin w eine für »$\Delta M = 1$« berechnete elastische Kraft des Pfeilerstabwerks vorstellt, die aus

$$w = \frac{\Delta s}{r} = \frac{1 \cdot s}{EFr^2}$$

zu berechnen ist.

Außer den beiden Gl. (355) und (357) hat man zur Berechnung der *drei Unbekannten* M'_r, M''_r und ΔM_r einer Stütze r noch die dritte Bedingung

$$\delta'''_r = \delta''_r = \delta'_r, \tag{361}$$

wobei für δ'_r und δ''_r und eine Einzellast P nach Gl. (340) anzuschreiben ist

$$\begin{aligned} \delta'_r &= P\delta'_{mr} - M''_{r-1}\delta_{(r-1)r} - M'_r\delta'_{rr}, \\ \delta''_r &= P\delta''_{mr} - M''_r\delta''_{rr} - M'_{r+1}\delta_{(r+1)r}. \end{aligned} \tag{362}$$

Außer den Unbekannten M sind in den Gl. (362) alle andern Größen bekannt und genau so darzustellen, wie bei bei den Trägern auf unverschieblichen Stützpunkten (**55**). Wie früher, so gilt auch hier die Grundgleichung

$$\delta'_r + \delta''_r = 0. \tag{363}$$

Das gibt in Verbindung mit Gl. (357 und 361)

$$\delta'_r = \tau_r \cdot \Delta M_r = -\delta''_r. \tag{364}$$

Es soll nun gezeigt werden, wie man mit Hilfe der obigen Bedingungsgleichungen *den Schlußlinienzug der gesuchten Momentenfläche* darstellen kann.

b. Darstellung des Schlußlinienzuges der Momentenfläche.

1. Die Ordinaten des Schlußlinienzuges erfahren hier über jeder Stütze eine plötzliche Verkleinerung um ΔM (Fig. 329). *Die drei Festlinien* werden genau so aufgetragen, wie früher (**55**, b und **59**, a. 2). Sie fallen demnach zusammen mit den Richtungen der drei Mittelkräfte

$$\sum_{r-1}^{r} w; \quad \sum_{r}^{r+1} w; \quad \sum_{r-1}^{r+1} w. \tag{365}$$

Die zugehörigen drei Festpunkte (f_{r-1}, f_r, f_{r+1}) findet man (ebenfalls wie früher) mit Hilfe der Strecken

$$\begin{aligned} h_{(r-1)} &= \frac{P \cdot \delta'_{mr}}{\sum_{r-1}^{r} w}, \\ h_{(r+1)} &= \frac{P \cdot \delta''_{mr}}{\sum_{r}^{r+1} w}, \\ h_{(r)} &= \frac{P \cdot \delta'_{mr} + P \cdot \delta''_{mr}}{\sum_{r-1}^{r} w}. \end{aligned} \tag{366}$$

Sind $t_{(r-1)}$ und $t_{(r+1)}$ die Schnittpunkte der äußern Festlinien mit dem gesuchten Schlußlinienzuge, so ist in der nämlichen Weise, wie es unter **55**, b geschehen ist, nachzuweisen, daß die Gerade $f_{r-1}-f_{r+1}$ durch den mittleren Festpunkt f_r verläuft, ebenso wie auch die Gerade $t_{r-1}-t_{r+1}$. Diese Eigenschaft der Festpunkte ist die geometrische Folgerung aus der Gl. (366).

Die auf den Festlinien $(r-1)$ und $(r+1)$ abzugreifenden Momentenstrecken seien $M_{(r-1)}$ und $M_{(r+1)}$. Dann ist (nach dem Vorgange unter **55**, b und den dortigen Gl. (310) abzuleiten

$$M_{(r-1)} = \frac{\delta_{(r-1)r} \cdot M''_{r-1} + \delta'_{rr} \cdot M'_r}{\sum\limits_{r-1}^{r} w},$$
$$M_{(r+1)} = \frac{\delta''_{rr} \cdot M''_r + \delta_{(r+1)r} \cdot M'_{r+1}}{\sum\limits_{r}^{r+1} w}. \tag{367}$$

Aus den Gl. (366) und (367) erhält man

die Strecke: $h_{(r-1)} - M_{(r-1)} = h'_{(r-1)} = \dfrac{P \cdot \delta'_{mr} - (\delta_{(r-1)r} M''_{r-1} + \delta'_{rr} \cdot M'_r)}{\sum\limits_{r-1}^{r} w}$

- - $h_{(r+1)} - M_{(r+1)} = h'_{(r+1)} = \dfrac{P \cdot \delta''_{mr} - (\delta''_{rr} M''_r + \delta_{(r+1)r} \cdot M'_{(r+1)})}{\sum\limits_{r}^{r+1} w}$

und weiter aus der Verbindung mit den Gl. (362)

$$h'_{(r-1)} = \frac{\delta'_r}{\sum\limits_{r-1}^{r} w}; \qquad h'_{(r+1)} = \frac{\delta''_r}{\sum\limits_{r}^{r+1} w}. \tag{368}$$

Aus der Gl. (364) folgt dann

$$h'_{(r-1)} \cdot \sum_{r-1}^{r} w = \tau_r \varDelta \cdot M_r = - h'_{(r+1)} \cdot \sum_{r}^{r+1} w$$

oder

$$\frac{\varDelta M_r}{h'_{(r-1)}} = \frac{\sum\limits_{r-1}^{r}}{\tau_r} = \frac{\alpha}{\gamma},$$
$$\frac{\varDelta M_r}{-h'_{(r-1)}} = \frac{\sum\limits_{r}^{r+1}}{\tau_r} = \frac{\beta}{\gamma}. \tag{369}$$

Aus der letzten Gleichung folgt eine einfache graphische Darstellung des Momentes ΔM_r (Fig. 329).

Man zeichne links von r eine Lotrechte (z), deren wagerechten Abstände von r und der rechtsseitigen äußeren Festlinie (f_{r+1}) *sich verhalten wie* $\alpha : \gamma$; *ebenso rechts von r eine Lotrechte (y) mit den entsprechenden Abständen im Verhältnis von* $\beta : \gamma$. *Von den Schnittpunkten z' und y' dieser Lotrechten mit dem Schlußlinienzuge ziehe man nach den zugehörigen äußern Festpunkten* $f_{(r-1)}$ *und* $f_{(r+1)}$ *je eine Gerade. Deren Verlängerungen schneiden dann auf der Stützenlotrechten eine Strecke ab, die gleich dem gesuchten Momente* ΔM_r *ist.*

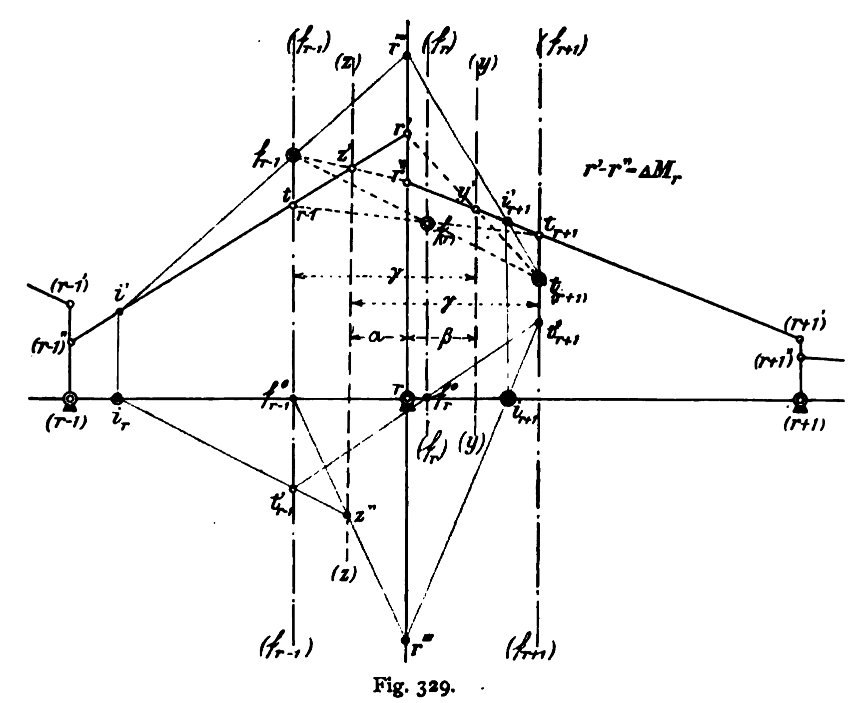


Fig. 329.

Aus den verschiedenen Vorzeichen der beiden Gl. (369) erkennt man, *wie einer der äußern Festpunkte immer über, der andere unter dem Schlußlinienzuge liegen muß, und daß dessen Spitze r' immer derjenigen Schlußlinienseite angehört, die unterhalb des zugehörigen äußern Festpunktes liegt.*

2. Nachdem für je zwei Nachbaröffnungen die drei Festlinien mit den beiden äußern Festpunkten und dazu die (y)- und (z)-Lotrechten aufgetragen worden sind, kann man von den Endstützen (wo $M = 0$

vorausgesetzt wird) ausgehend alle Festpunkte i und k festlegen, wie es (unter **55**, b) für Träger mit unverschieblichen Stützpunkten geschehen ist. Ist z. B. die Seite $(r-1)''-r'$ gegeben, so findet man den Schnittpunkt $t_{(r+1)}$ der Seite $r''-(r+1)'$ und der Festlinie (f_{r+1}) durch den Strahl $t_{(r-1)}-f_{(r)}-t_{(r+1)}$. Ferner leitet man aus dem Schnittpunkte der Seite $(r-1)''-r'$ mit der (z)-Lotrechten den Punkt r'' ab, indem man eine Gerade vom Festpunkte $f_{(r-1)}$ durch z' führt (Fig. 329).

Weiter findet man alle Festpunkte i und k aus folgender Überlegung: Das Viereck $t_{(r-1)}-z'-r''-t_{(r+1)}$ liegt mit seinen Ecken auf je einer der gegebenen Lotrechten (f_{r-1}), (z), (r) und (f_{r+1}). Seine Seite $z'-t_{(r-1)}$ möge durch den festen Punkt i' verlaufen (Fig. 329). Seite $z'-r''$ geht durch den Festpunkt $f_{(r-1)}$ und Seite $t_{(r-1)}-t_{(r+1)}$ trifft den mittleren Festpunkt $f_{(r)}$. Also muß auch die vierte Seite durch einen Festpunkt verlaufen. Dasselbe gilt für das Viereck $t'_{r-1}-z''-r'''-t'_{(r+1)}$, dessen Ecken in die nämlichen eben genannten Lotrechten fallen, wobei die entsprechenden drei Seiten durch die festen Fußpunkte dieser Lotrechten verlaufen: die Seite $r'''-t'_{(r+1)}$ geht demnach durch den Festpunkt $i_{(r+1)}$, der in der Richtung der übrigen drei Festpunkte liegt. Die Darstellung eines Festpunktes $i_{(r+1)}$ mit Hilfe des gegebenen Festpunktes der i_r der vorigen Öffnung findet man danach wie folgt (rote Linien der Fig. 329).

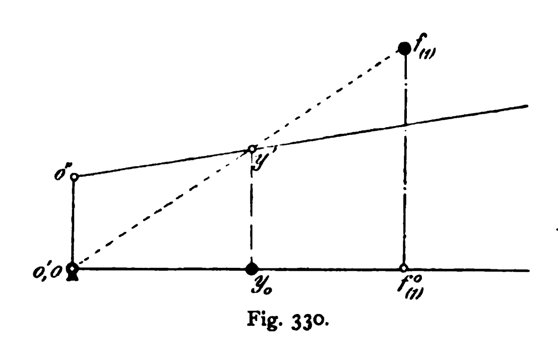


Fig. 330.

Ziehe durch den gegebenen Punkt i_r eine beliebige Gerade, von welcher die Lotrechten (f_{r-1}) und (z) in den Punkten $t'_{(r-1)}$ und z'' geschnitten werden. Durch $t'_{(r-1)}$ und $f^o_{(r)}$, sowie auch durch z'' und $f^o_{(r-1)}$ führe je eine Gerade. Diese schneiden in t'_{r+1} die Festlinie (f_{r+1}), in r''' die Stützenlotrechte. Dann geht die Verbindungsgerade $t'_{r+1}-r'''$ durch den gesuchten Festpunkt i_{r+1}. Zieht man jetzt noch die Gerade $i'f_{r-1}$ und verlängert sie bis zum Schnittpunkte r'''' der r-Lotrechten, so liegt der gesuchte Punkt i'_{r+1} der Schlußlinienstrecke $r''-(r+1)'$ im Durchschnitte der Geraden $r''''-f_{r+1}$ und der in i_{r+1} errichteten Lotrechten.

3. Wenn z. B. auch *die Endstütze* o *elastisch drehbar* ist, so zeichne man zuerst die äußere Festlinie (f_1) und die Lotrechte (y), suche den

Festpunkt $f_{(1)}$ und ziehe die Gerade o—$f_{(1)}$. Diese trifft die (y)-Lotrechte in einem Punkte y' der ersten Schlußlinienseite (Fig. 330). o entspricht hier dem r' in der allgemeinen Darstellung der Fig. 329. Von y_0 *als Festpunkt* ausgehend findet man dann die übrigen Festpunkte usw. M_0' ist gleich Null, daher hat man aus Gl. (355)

$$M_0'' = -\Delta M_0. \qquad (370)$$

Besteht an einer Stütze r *eine starre Einspannung*, so ist

$$\tau_r = 0$$

zu setzen. In diesem Falle decken sich nach Gl. (369) eine äußere Festlinie auf einer Seite von r mit der (z)-, auf der andern Seite mit der (y)-Lotrechten und der Schlußlinienzug verläuft deshalb durch die äußern Festpunkte.

Für $\tau_r = \infty$ hat man ungehinderte Drehbarkeit: die (z)- und (y)-Lotrechten rücken in die Stützenlotrechte und die Darstellung des Schlußlinienzuges erfolgt ganz wie bei unverschiebbaren Stützen.

61. Konstruktionen, die auf ihrer ganzen Länge elastisch unterstützt sind.

a. Allgemeines.

1. Hier handelt es sich hauptsächlich um Konstruktionen in der Gestalt des geraden Stabes, wie Eisenbahnschwellen, die in der Kiesbettung gelagert sind oder geschlossene Röhren und Kanäle, die völlig vom Erdreich umgeben sind und dabei veränderliche Lasten aufzunehmen haben. Ihre Berechnung kann genau nicht ohne Berücksichtigung der *Formänderungen der elastischen Unterlage* durchgeführt werden und dabei werden deren elastische Eigenschaften in allen Punkten der Unterstützung als völlig gleichwertig vorausgesetzt werden müssen. Bei den erwähnten Röhren und Kanälen ist es mit großen Schwierigkeiten verknüpft, die vom Erdreich auf die Konstruktion ausgeübten Drucke nach ihrer Richtung und Größe zu bestimmen. Es ist wohl nicht zweifelhaft, daß hierbei unter Umständen auch Seitendrucke in Frage kommen können. Mangels ausreichender Versuche hat man sich bisher damit begnügt, Rohr- und Kanalleitungen ohne Rücksicht auf die elastischen Eigenschaften des Untergrundes zu berechnen und dabei schätzungsweise *lotrechte* Belastungen einzuführen[1]. Bei einem derartigen Rechnungsverfahren bildet der geschlossene Ring des Bauwerks ein dreifach unbestimmtes System. In dem Stützpunkte irgend eines Ringquerschnittes

[1] Frühling, Die Entwässerung der Städte. Handb. d. Ing.-Wissenschaften. III. Teil. 4. Bd. 4. Aufl.

greift dann eine Längskraft P und eine Querkraft Q an, deren Größen mit Hilfe der drei Grundbedingungen der Gl. (247) unter **41**, b zu berechnen sind.

Viel schärfere theoretische Hilfsmittel als sie bislang im Kanalbau u. dgl. angewendet worden sind, gebraucht man bei der Berechnung des Eisenbahnoberbaues. WINKLER[1] war es, der hierbei bahnbrechend vorgegangen ist. Um seine Rechnungen zu vereinfachen, betrachtete er die unter ihrer Last bewirkte *Senkung* y einer Schwelle im Kiesbette an jeder Stelle als dem dort auftretenden Drucke proportional. Ist p die Größe des widerstehenden Druckes in der Flächeneinheit zwischen Schwelle und Kies, so setzte er danach

$$p = Cy,$$

wenn C eine *Erfahrungszahl* bedeutet, die anzeigt, wie groß der Flächendruck für die Senkung »$y = 1$« ist. Für *kleine* Formänderungen, wie sie in der Regel im Eisenbahnbetriebe vorkommen, darf WINKLERS Annahme als zulässig angesehen werden, welcher Art auch das die Beziehungen zwischen Senkung und Bettungsdruck regelnde Gesetz in Wirklichkeit sein möge. Jedoch muß in Anwendungsfällen eine *stetige* Änderung von y eine ebensolche Änderung von p entsprechen[2].

2. ZIMMERMANN[2] gibt im Eingange seiner (unten angezogenen) grundlegenden Schrift die Differentialgleichung der elastischen Linie eines elastisch unterstützten Stabes, der beliebig lang und beliebig belastet ist. Wir folgen hier seinen Darlegungen.

Zwischen dem Momente M und der Querkraft Q besteht in einem beliebigen Querschnitte (nach I. **66**, Gl. 42) die Beziehung

$$\frac{dM}{dz} = Q,$$

wenn Q die Mittelkraft aller lotrechten Kräfte vorstellt, die auf dem betrachteten Stabteile angreifen und wenn diejenige Drehrichtung von M *positiv* genommen wird, die der Wirkung einer im Sinne von $+Q$ gerichteten Kraft entspricht. Bestehen die äußeren Kräfte in der Nähe des betrachteten Querschnittes nur aus dem stetig über die Stabachse verteilten Flächendrucke p, und ist b die Breite der gedrückten Stabfläche, so ist ferner anzuschreiben

$$\frac{dQ}{dz} = bp,$$

[1] WINKLER, Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. 1867. S. 182. Vorträge über Eisenbahnbau. 1. Heft: Der Eisenbahnoberbau. 3. Aufl. 1875. S. 265—267.

[2] Dr. Ing. ZIMMERMANN, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. 1888, S. 1. In der Sitzung der K. Preuß. Akademie der Wissenschaften (vom 9. Nov. 1905) legte ZIMMERMANN eine Abhandlung vor unter dem Titel: »*Der gerade Stab mit stetiger, elastischer Stützung und beliebig gerichteten Einzellasten.*«

woraus auch

$$\frac{d^2M}{dz^2} = bp \tag{371}$$

folgt. Q und p werden dabei in gleichem Richtungssinne *positiv* gerechnet. Q und p gelten daher im Sinne des widerstehenden Bettungsdruckes, d. h. *nach oben hin* wirkend, als positiv.

Aus der allgemeinen Gleichung der elastischen Linie (III. **5**, a)

$$EJ\frac{d^2y}{dz^2} = -M$$

folgt danach für ein unveränderliches J

$$EJ\frac{d^4y}{dz^4} = -bp. \tag{372}$$

Die *Senkungen* y gelten darin als positiv, *Hebungen* negativ. Die positiven Richtungen von y und p sind daher einander entgegengesetzt. Weil in der Gl. (372) die Größen M und Q nicht erscheinen, so ist es für ihre Benutzung gleich, in welchem Sinne man diese Größen positiv rechnet.

Bei Einführung der Erfahrungszahl C, die *Bettungsziffer* genannt, erhält man aus der Gl. (372) die Differentialgleichung

$$\frac{d^4y}{dz^4} = -4K^4y, \tag{373}$$

worin zur Abkürzung

$$K = \sqrt[4]{\frac{Cb}{4EJ}} \tag{374}$$

gesetzt wird[1].

Cb und E, mithin auch K und $J^{-\frac{1}{4}}$, sind von gleicher Dimension. Danach *bedeutet K den reziproken Wert einer Länge und Kz ein Längenverhältnis.*

Die Integration der Differentialgleichung ergibt *die Gleichung der elastischen Linie* mit

$$y = U_1 \cdot e^{Kz} \cdot \cos Kz + U_2 \cdot e^{Kz} \cdot \sin Kz + U_3 \cdot e^{-Kz} \cdot \cos Kz + U_4 \cdot e^{-Kz} \cdot \sin Kz. \tag{375}$$

$e = 2{,}718\,28$ ist die Grundzahl der natürlichen Logarithmen.

Die Unveränderlichen U sind in jedem Falle mit Hilfe der gegebenen Grenzbedingungen zu ermitteln. Wie dies geschehen kann, soll an zwei Beispielen gezeigt werden.

---

[1] Die von ZIMMERMANN mit x bezeichnete Hilfsgröße wird hier, um Verwechslungen mit der Schubverteilungszahl (III. **5**, d) zu vermeiden, K genannt.

b. Berechnung von Eisenbahnschwellen[1].

1. *Eine in ihrer Mitte mit P belastete Langschwelle.* Wir nehmen an, daß 1) die Langschwelle als *unendlich* lang betrachtet werden darf, und 2) eine *Hebung* der Schiene infolge ihres ausreichenden Eigengewichtes oder entsprechend wirkender Querverbindungen nicht eintreten kann. Zählt man dann die z vom Lastpunkte ab nach rechts hin, so muß y für $z = \infty$ verschwinden. Für diesen Grenzfall verschwinden auch die beiden letzten Summanden der Gl. (375) und danach folgt (für $y = 0$)

$$U_1 = U_2 = 0. \tag{376}$$

Der Symmetrie wegen muß für $z = 0$ auch $\frac{dy}{dz}$ gleich Null werden. Es ist aber

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dz} = K[U_1(e^{Kz}\cdot\cos Kz - e^{Kz}\cdot\sin Kz) + U_2(e^{Kz}\cdot\sin Kz + e^{Kz}\cdot\cos Kz)\\ + U_3(-e^{-Kz}\cdot\cos Kz - e^{-Kz}\cdot\sin Kz)\\ - U_4(-e^{-Kz}\cdot\sin Kz + e^{-Kz}\cdot\cos Kz),\end{aligned}$$

was für $\frac{dy}{dz} = 0$ die Bedingung

$$U_3 = U_4 = U \tag{377}$$

gibt.

Somit läßt sich hier die Gleichung der elastischen Linie mit

$$y = U\cdot e^{-Kz}(\cos Kz + \sin Kz) \tag{378}$$

anschreiben, und man erhält für den *Bettungsdruck*

$$p = C\cdot U\cdot e^{-Kz}(\cos Kz + \sin Kz). \tag{379}$$

Für $z = 0$ möge $p = p_0$ werden. Dann ist

$$p_0 = C\cdot U$$

oder

$$U = \frac{p_0}{C}. \tag{380}$$

Es wird also noch darauf ankommen, p_0 zu ermitteln. Die *gesamten* Bettungsdrucke p müssen gleich P sein, d. h.

$$\int_0^\infty p\,dz = \frac{P}{2}.$$

Setzt man den Wert von p aus der Gl. (379) hier ein und integriert, so erhält man

$$\frac{P}{2} = p_0\left[-\frac{1}{K}e^{-Kz}\cdot\cos Kz\right]_0^\infty = \frac{p_0}{K}$$

oder

$$p_0 = \frac{KP}{2},$$

d. h.

$$p_0 = \frac{P}{2}\sqrt[4]{\frac{Cb}{4EJ}}. \tag{381}$$

[1] Vgl. FÖPPL, Festigkeitslehre. 3. Aufl. S. 235—244.

Damit ist der Bettungsdruck an jeder Stelle der Schiene gegeben und somit können Momente, Querkräfte und Spannungen in beliebigen Querschnitten berechnet werden. Dabei wird die *Erfahrungszahl* C $\left(\text{in } \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ für } ›y = 1 \text{ cm}‹\right)$ im Mittel[1] wie folgt einzusetzen sein:

bei Kiesbettung . . . . $C = 3$,
- Kies auf Packlage oder Felsboden $C = 8$,
- Steinschlag auf Packlage . . . $C = 15{,}4$.

Bei den Versuchen auf den Reichsbahnen in Elsaß-Lothringen, woher obige Zahlen stammen, fand man außerdem, daß innerhalb der mit dem Bettungsdruck ohnehin einzuhaltenden Grenzen die (unter a vorangestellte) Annahme WINKLERS als zutreffend gelten darf.

2. Die belastete Querschwelle. Die Schwelle hat zwei Einzellasten P aufzunehmen, die von den Raddrucken der Lokomotive herrühren. Die Lasten P liegen um die Entfernung s der Schienenmittel voneinander entfernt und sie sind unter Umständen ungleich groß. Der Abstand des Schienenmittels von jedem Schwellenende sei a. Wir rechnen die z vom einen Schwellenende ab und nehmen der Einfachheit halber beide P gleich groß an, so daß die Schwelle aus Symmetriegründen nur zur Hälfte betrachtet zu werden braucht. Auch hier gilt dann die entwickelte allgemeine Differentialgleichung. Ihre Unveränderlichen U werden für zwei verschiedene Strecken der elastischen Linie je gesondert zu berechnen sein, nämlich die Strecke von 0 bis a und von a bis zur Schwellenmitte. Das gibt demnach *acht unbekannte Größen* U, zu deren Berechnung acht Grenzbedingungen gegeben sein müssen. Soviel sind auch vorhanden, nämlich:

1) u. 2) für $z = 0$ ist $M = 0$ und $Q = 0$, oder was dasselbe ist,

$$- \quad z = 0 \quad - \frac{d^2y}{dz^2} = 0 \quad - \frac{d^3y}{dz^3} = 0.$$

3) u. 4) *Im Lastpunkte* muß in beiden Strecken gefunden werden

$$\text{für } z = a: \quad y = y_a \text{ und } \frac{dy}{dz} = \frac{dy_a}{dz}.$$

5) Weil auch M für beide Strecken gleich ist, so hat man

$$\text{für } z = a: \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d^2y_a}{dz^2}.$$

[1] Nach GOERING. Oberbau der Eisenbahnen. 1898. Sonderdruck aus dem von LUEGER herausgegebenen ›Lexikon der gesamten Technik‹, S. 16.

6) Weil die Querkraft *im Lastpunkte* plötzlich um P kleiner wird, und weil

$$Q = \frac{dM}{dz} = -EJ\frac{d^3y}{dz^3}$$

ist, so muß dort

für $z = a$: $$\left(\frac{d^3y_a}{dz^3} - \frac{d^3y'_a}{dz^3}\right) = \frac{P}{EJ}$$

werden, wenn die Senkungen der beiden im Lastpunkte zusammenstoßenden Strecken mit y_a und y'_a bezeichnet werden.

7) u. 8) In der Schwellenmitte ist

für $z = a + \frac{s}{2}$: $\frac{dy}{dz} = 0$ und, weil dort Q verschwindet,

- $z = a + \frac{s}{2}$ auch $\frac{d^3y}{dz^3} = 0$.

Wenn man also die Gleichung der elastischen Linie (Gl. 375) differentiiert und die Ausdrücke der Differentialquotienten $\frac{dy}{dz}, \frac{d^2y}{dz^2}, \frac{d^3y}{dz^3}$ bildet, so kann man der Reihe nach obige acht Grenzbedingungen darin einführen und die acht Unbekannten U aus den dadurch erhaltenen acht Bedingungsgleichungen ausscheiden. Auf die Ausführung dieser Rechnungen im einzelnen darf hier verzichtet werden, um so mehr als im vorliegenden Falle die graphische Behandlung der Aufgabe einfacher erscheint.

Wäre der Bettungsdruck p bekannt, so könnte man für den mit p und den beiden P belasteten Stab alle Momente M berechnen, (nach **5**, b) eine *Belastungsfläche* zeichnen und mit deren Hilfe in bekannter Weise die elastische Linie darstellen. Deren Ordinaten y müßten dann der Gleichung

$$y = \frac{p}{C}$$

entsprechen, wo C eine bekannte Unveränderliche ist. Weil nun die Belastungsfläche eine Funktion von p ist, so stehen ihre Ordinaten Y zu den mit ihrer Hilfe dargestellten Ordinaten y der elastischen Linie in *einem bestimmten Verhältnisse*, oder, was dasselbe ist: Bei geeigneter Wahl der Polweite des Kraftecks der elastischen Kräfte *W sind Belastungsfläche und Biegeflächen kongruente Figuren.* Danach kann man die wahre Belastungsfläche und damit die Bettungsdrucke p durch Probieren finden, indem man zuerst (im beliebigem Maßstabe) eine Belastungsfläche zeichnet, die nach Gutdünken ungefähr der gesuchten

Verteilung des Druckes p entspricht. Deren Ordinaten werden an den Schwellenenden gleich Null und unter den Lastpunkten am größten anzunehmen sein. Aus der Gestalt der dazu gezeichneten elastischen Linie erkennt man leicht, welche Änderungen die erste Belastungsfläche erfahren muß, damit sich bei der zweiten Darstellung der elastischen Linie beide Gestalten möglichst einander gleich werden. Und so fort, bis die gefundene Belastungslinie und die zugehörige elastische Linie sich genau decken. Dies Verfahren bleibt auch dann noch anwendbar, wenn das Trägheitsmoment J veränderlich ist und die Lasten P ungleich sind.

§ 12. Geschichtliche Rückblicke.

Der allgemeine Gang der Entwicklung der Theorie ist bereits in § 6 des ersten Bandes geschildert worden. Im zweiten Bande kamen dazu geschichtliche Rückblicke auf die *Gewölbetheorie* (II. **50**) und die Theorie des *Erddruckes* (II. § 9). Für den vorliegenden Band werden besonders die *Lehren von der Elastizität und Festigkeit* und die Theorie des *Fachwerks* zu betrachten sein. Dabei ist es dem Verfasser nicht darum zu tun, einen erschöpfenden Überblick der Entwicklung zu geben. Er beschränkt sich darauf, aus der großen Zahl von Forschern, Gelehrten und Fachmännern nur diejenigen besonders herauszuheben, deren theoretische Arbeiten auf den in Frage kommenden wissenschaftlichen Gebieten grundlegend gewesen sind. Die in den folgenden Darlegungen den Verfassernamen angehängten Ziffern beziehen sich auf die (unter **66** gegebene) Übersicht der geschichtlichen Literaturquellen. Auch diese macht keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

62. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit.

a. GALILEI-NAVIER.

1. Im Anfange des 17. Jahrhunderts war GALILEI[1] (1564—1642) mit Versuchen über die Festigkeit der Baustoffe beschäftigt. Er stellte dabei die erste Theorie der Biegungsfestigkeit auf, indem er einen einfachen Holzbalken betrachtete, der an einem Ende eingespannt, am andern belastet war. Aber er und seine Nachfolger (I. **40**) berücksichtigten bei ihren Untersuchungen die *Elastizität* der Baustoffe nicht. So konnte die Lehre von der Festigkeit der Baustoffe erst festeren Boden gewinnen, nachdem im Jahre 1660 der Engländer HOOKE[2] (1635—1703) durch Versuche mit stählernen Federn das sog. *Elastizitätsgesetz* (I. **4**) gefunden hatte.

Vom 17. Jahrhundert ab beginnen mit MARIOTTE[3] (1620—1684) die Bemühungen der Gelehrten, die vielen noch dunkeln Fragen der Biegungsfestigkeit zu klären, wie dies bereits geschildert worden ist (I. **41**—**42**). Die Einführung der Infinitesimalrechnung erleichterte dabei allmählich die analytischen Untersuchungen. JACOB BERNOULLI[4] (1667 bis 1748), EULER[5] (1707—1783) und LAGRANGE[6] (1736—1813) untersuchten die Gestalt der Stabachse nach erfolgter Formänderung des Stabes, die sog. *elastische Linie.* Zuerst BERNOULLI, der u. a. darlegte, wie der Krümmungshalbmesser der Biegelinie in jedem Punkte dem zugehörigen Biegungsmomente umgekehrt proportional sei. EULER vervollkommnete die Theorie BERNOULLIS und zeigte, wie die Messung der Durchbiegung eines Stabes dazu dienen könne, dessen Elastizitätseigenschaften zu ermitteln. Im besondern untersuchte EULER auch den Fall der *Knickfestigkeit* (III. § 5). Er stützt sich dabei auf den Satz von BERNOULLI, wonach

$$\frac{EJ}{\varrho} = M$$

ist und entwickelt daraus das Differential der Gleichung der elastischen Linie. Dessen Integral löste er durch Anwendung einer unendlichen Reihe. EULER behandelte als erster auch die Theorie der krummen Stäbe (**9**). Hier gibt er (§ 48) die Gleichung

$$M = EJ\left[\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right],$$

worin ϱ und ϱ_1 die Halbmesser der ursprünglichen und der späteren Krümmung bedeuten (II. **34** und **35**). LAGRANGE legte dar, wie der Stab je nach der Größe der Knickkraft *wellenförmig* ausbiegen könne (III. **24**).

2. Die erste wohlbegründete und zusammenhängende Theorie der einfachen Festigkeitsfälle (I. § 15) gab COULOMB[7] (1736—1806). Ihm folgte NAVIER[8] (1785—1836), dem besonders die weitere Ausbildung der Lehren von der Biegungsfestigkeit zu verdanken ist. Die dabei noch offenen Fragen löste er in entscheidender Weise (I. **42**). Darauf gestützt, gab er in seiner »*Baumechanik*« zum ersten Male in umfassender Weise Berechnungen von Bauwerken aller Art (Träger von Bogen- und Hängebrücken, sowie auch Säulen und Pfeiler mit außer dem Mittel angreifenden Lasten usw.). Mit Recht nennen wir deshalb NAVIER den Begründer der Statik der Baukonstruktionen.

In der Vorrede der ersten Ausgabe seines berühmten Werkes[8] (1826) weist NAVIER darauf hin, wie aus den Untersuchungen seiner

Vorgänger »bis jetzt die Mathematik mehr Nutzen gezogen, als die Architektur und das Ingenieurbauwesen«. Er sagt dann weiter: »Die meisten Konstrukteure bestimmen die Abmessungen der Teile von Bauwerken und Maschinen nach dem herrschenden Gebrauche und nach dem Muster ausgeführter Werke. Sie legen sich selten Rechenschaft ab über die auf jene Teile wirkenden Kräfte und über den Widerstand, den diese jenen entgegensetzen.«

Im letzten Abschnitte seines Buches behandelt NAVIER die Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Von eisernen Brückenträgern ist darin natürlich wenig die Rede. Nach seiner Meinung soll man in Konstruktionen grundsatzmäßig »die Hauptteile in der Richtung der Geraden legen, die sich von den Angriffspunkten der Belastungen nach den Stützpunkten ziehen lassen. Bei einer derartig angeordneten Konstruktion haben die Belastungen kein Bestreben, die einzelnen Teile um die an deren Enden angebrachten Verbindungen zu drehen«. Es ist hiernach zu verstehen, warum NAVIER wesentlich nur Sprengwerke mit oben liegender Fahrbahn behandelt. In Parallelfachwerken berechnet er nur die Gurte auf Biegung und bemerkt dazu, die Annahme, auf welcher seine Berechnung beruhe, sei nur erfüllt, »wenn die Gurtstäbe durch eine Reihe von Querstücken oder Andreaskreuzen oder durch Keile, die in Einschnitten liegen, miteinander verbunden sind. Ist aber einer der Gurtstäbe bogenförmig oder sind es beide, so genügt eine Verbindung mit einfachen Querstücken, wenn die Stäbe nur an ihren Enden so verbunden werden, daß sie nicht aufeinander gleiten können«.

Man sieht daraus, wie NAVIER *das Wesen der Standfestigkeit gegliederter Konstruktionen* noch nicht voll erkannt hat. Ebenso ging es seinen Nachfolgern bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts. Die damalige Berechnung gegliederter Träger beschränkte sich auf die Gurte; die Wandgliederung wurde nur als notwendige Zugabe wegen Verschiebungen der Gurte angesehen. Auch die bedeutenden Träger der amerikanischen Holzbrücken jener Zeit, die nachweisbar als Vorbilder der europäischen eisernen Brücken gedient haben, sind in ähnlicher Weise (ohne genauere Berechnung der Wandglieder) gebaut worden.

b. Die Elastizitätslehre seit NAVIER.

1. Auf der von NAVIER gegebenen Grundlage bauten die französischen Ingenieure POISSON (1781—1840), CAUCHY (1789—1857), DE SAINT-VENANT (1797—1886) und LAMÉ (1793—1870) die Sätze der Biegungsfestigkeit weiter aus. POISSON[9] behandelte das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer Körper, worüber er mit NAVIER in Streit geriet.[23] Er berechnete zuerst auch das Maß der Querdehnung (I. **5**).

CAUCHY[10] entwickelte 1827 zuerst die allgemeinen Eigenschaften der im Innern eines Körpers auf eine beliebige Fläche wirkenden Spannung. Dabei gibt er den Satz vom *Formänderungsellipsoid.* LAMÉ[11] bringt 1852 die Untersuchungen CAUCHYS in geometrische Form und führt das *Spannungsellipsoid* und die *Hauptspannungen* ein (I. § 17). DE SAINT-VENANT[12] gibt 1853 die Sätze von der Biegefestigkeit in der allgemeinsten Gestalt, zeigt den Einfluß der von NAVIER vernachlässigten *Schubspannungen*, sowie den Zusammenhang zwischen *Gleitung* und *Dehnung* (I. **120**). Er benutzt dabei die von POINSOT[13] (1777—1859) eingeführte *Trägheitsellipse* (I. **95**). BRESSE vervollkommnet 1854 die Theorie, indem er zum ersten Male den *Kern des Querschnittes* anwendet. Ausführlicheres enthält der von DE SAINT-VENANT[12] (1863) geschriebene »*Abriß der Geschichte der Elastizitätslehre*«.

Durch die Bestrebungen zahlreicher Fachmänner und Gelehrten[14] — wie CLEBSCH, CLAUSIUS, KIRCHHOFF, POCHHAMMER, GRASHOF, WINKLER, MOHR, ZIMMERMANN, BAUSCHINGER, TETMAJER, FÖPPL, v. BACH u. a. — ist inzwischen die Elastizitätslehre nach vielen Seiten hin erweitert und vertieft worden. Mit Erfolg hat man auch versucht, die Lehren von der Elastizität und Festigkeit mehr als vordem auf die *Ergebnisse von Versuchen* zu begründen. Auf solchem Wege sollten aber die bewährten, einfachen Grundlagen der Elastizitätslehre nicht ohne Not zugunsten von verwickelten Formeln verschoben werden. Denn *der ausführende Ingenieur wird gewisse zufällige Verschiedenheiten im Verhalten der wirklichen Baustoffe, gegenüber den der Elastizitätstheorie zugrunde liegenden isotropen (idealen) Körpern, immer nur insoweit berücksichtigen können, als er danach den Sicherheitsgrad seiner Konstruktion von Fall zu Fall abwägt* (I. **12**).

2. Die ersten Anwendungen des Satzes von der Arbeit auf Aufgaben der Elastizitätslehre verdanken wir CLAPEYRON[15] (1779—1864). Dieser benutzte dabei die von NAVIER aus dem Satze der gedachten Verschiebungen gefolgerte Bedingung für das Gleichgewicht zwischen den äußern und innern Kräften eines elastischen Körpers, indem er darin an Stelle der gedachten, die wirklichen elastischen Verschiebungen einführte. Unter der Voraussetzung eines spannungslosen Anfangszustandes (III. **34**, a) und durchweg gleicher Temperatur des Körpers, kommt CLAPEYRON zu einem Satze, den er später für seine Theorie der Federn verwendet hat. Der Satz, den wir (unter III. **3**, a) benutzt haben, lautet

$$A = \tfrac{1}{2}\sum P \cdot \delta ,$$

wenn P irgend eine äußere Kraft und δ ihren Weg bedeutet. LAMÉ[11], der die Wichtigkeit des Satzes für die Statik der Baukonstruktionen hervorhebt, nannte ihn zuerst »CLAPEYRONS *Gesetz*«.

Mit Hilfe der obigen Arbeitsgleichung CLAPEYRONS entwickelte der italienische Ingenieur CASTIGLIANO[16] (1879) den *Satz von der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit* (III. **35**) und leitete daraus *den Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit ab.* Den gleichen Satz gab (1858) bereits MENABREA[17] und ohne die Arbeiten seiner Vorgänger zu kennen, auch FRÄNKEL[18] (1882).

Über das Urheberrecht an obigen Sätzen über die Formänderungsarbeit entspann sich zwischen CASTIGLIANO (1847—1884) und MENABREA ein Meinungsstreit, der nach den, dem Verfasser von Professor GUIDI-Turin gemachten dankenswerten Angaben, von CREMONA (1830—1884) geschlichtet worden ist. In dem von CREMONA[19] dem Präsidenten der römischen Akademie der »*Luchsäugigen* (*Lincei*)« erstatteten Berichte heißt es am Schlusse wörtlich: »*Das Mitglied* CREMONA *hält den Einspruch des Herrn* CASTIGLIANO *für nicht genügend begründet: Der Satz, um den es sich handelt, ist älter als die Arbeiten der beiden Verfasser und die gegebenen Beweise erscheinen nicht ganz einwandfrei. Nach seiner Meinung fehlt daher ein Grund zum Streite und er schließt: Wenn Herrn* CASTIGLIANO *die Ehre gebührt, eine schöne Arbeit gemacht zu haben, so kann niemand Herrn* MENABREA *das Verdienst absprechen ein allgemeines Prinzip populär und dem allgemeinen Gebrauche zugänglich gemacht zu haben, einem Prinzipe, dem es sicher vorbehalten ist, immer weitere Anwendung zu finden.*«[1] Es scheint danach, als ob CREMONA den Ursprung des Satzes von der kleinsten Arbeit bis auf den zuerst von MAUPERTUIS (1698—1759) und LAGRANGE benutzten Satz »*de la moindre action*« zurückführt.

Die Ansichten über den Wert der Anwendung des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit auf Aufgaben aus dem Gebiete der Statik der Baukonstruktionen sind heute mehr als je geteilt. Mit vielen Fachgenossen vertritt Verfasser die Meinung, daß in Fällen, wo jener Satz anwendbar ist, die Benutzung der Arbeitsgleichungen MOHRS, von denen weiterhin noch die Rede sein wird, rascher und bequemer zum Ziele führt. Dabei ist das Verfahren von MOHR, weil es sich nicht auf den (nur unter gewissen Voraussetzungen gültigen) CLAPEYRONschen

[1] »Il socio CREMONA crede che il reclamo del signor CASTIGLIANO non sia abbastanza fondato: il teorema di cui si tratta è anteriore ai lavori dei due autori, e le dimostrazioni date non sembrano esenti da ogni obbiezione. E' perciò opinione sua che manchi la materia della contesa e conclude: s'ablia il sig. CASTIGLIANO l'onore di aver fatto un bel lavoro; nessuno potrà togliere al socio MENABREA il merito di aver reso popolare e di uto commune un principio generale, che è certamente riserbato a ricevere applicazioni sempre più estese.«

Satz stützt, ohne weiteres allgemein anwendbar. Wie bewiesen, ist dies der Satz von CASTIGLIANO nicht (III. **35**). MOHR[20] war der Erste, der klarstellte, wie beschränkt das Anwendungsgebiet des obigen Satzes sei, im Vergleich mit der allgemeinen Verwendbarkeit der von ihm (schon 1874) eingeführten Arbeitsgleichungen.

3. Wie der vorstehende Rückblick erkennen läßt, erfolgte die Ausbildung der reinen Elastizitätslehre hauptsächlich in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Bis dahin waren auf dem wichtigsten Konstruktionsgebiete, das die schwierigsten Rechnungen nötig machte, im *Brückenbau*, mit nur vereinzelten Ausnahmen, ausschließlich *Vollwand*träger verwendet worden. Das Wesen der gegliederten Träger wurde in dieser Zeit nicht voll erkannt und deren Berechnung konnte sachgemäß erst durchgeführt werden, nachdem zwei berühmte deutsche Ingenieure, das waren CULMANN[40] (1821—1881) und SCHWEDLER[41] (1823—1896), ihre grundlegenden Arbeiten darüber veröffentlicht hatten (1851—1863). Bis dahin berechnete man derartige geliederte Träger nur unvollkommen aus den Biegungsmomenten, unter Vernachlässigung der Wandgliederung, die man (wie oben schon bemerkt) als unerläßliche Beigabe gegen Verschiebungen der Gurte betrachtete. Damals war die Britanniabrücke in England eben eröffnet (1849) und die Vorarbeiten für den Bau der alten Dirschauer Brücke (6 Öffnungen von je 130 m Weite) waren im Gange. Die beiden genannten Theoretiker erhoben sofort Bedenken sowohl gegen die Zweckmäßigkeit hoher Blechwandträger als auch gegen *eng*maschige Gitterwände, die seit 1846 aufgekommen waren. Beide befürworteten *eine klare Gliederung* der Trägerwände, derart daß sowohl in den Gurten als auch in der Wand jede Stabkraft genau berechnet werden konnte. Das Urteil der beiden hervorragenden Männer hat wesentlich zu dem in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts erfolgten Aufschwunge in der Theorie und Praxis des Brückenbaues beigetragen. Dabei standen mehrere Jahrzehnte noch die *analytischen* Trägerberechnungen im Vordergrunde. Diese gestalteten sich aber namentlich bei den unbestimmten Systemen der durchgehenden Träger und der Bogenträger immer verwickelter, obwohl die *Einführung des Schnittverfahrens durch* A. RITTER[42] (1863) die Hilfsmittel zur Berechnung gegliederter Träger schon in außerordentlicher Weise vereinfacht hatte. Da lernte man zur rechten Zeit *einen neuen Zweig der technischen Wissenschaft kennen, die graphische Statik*, deren ausgezeichnete Hilfsmittel besonders geeignet waren, um über die schwierigsten theoretischen Aufgaben des Bauwesens in bequemer und zuverlässiger Art hinweg zu kommen. Wer, wie Verfasser, seine technischen Studien im 7. Jahrzehnt

des vorigen Jahrhunderts angefangen und beendet hat, wird sich wohl noch des großen Aufsehens erinnern, das die vom Polytechnikum Zürich ausgehenden ersten graphischen Berechnungen von Baukonstruktionen damals an andern technischen Lehranstalten erregten. Zürich, wo CULMANN, der Begründer der graphischen Statik lehrte (I. **42**—**43**) blieb lange Zeit die oberste Pflanzstätte der neuen Wissenschaft. Im 8. und 9. Jahrzehnt des vorigen Jahrhunderts übernahm darin WINKLER (1835—1888) die Führung, als dieser in Berlin Statik der Baukonstruktionen und Brückenbau lehrte. Verfasser hat es im Vorworte des I. Bandes seiner Vorlesungen offen ausgesprochen, wie er wohl nie dazu gekommen wäre, eine so umfangreiche theoretische Arbeit, wie die vorliegende, herauszugeben, wenn er nicht das Glück gehabt hätte, in jüngern Jahren (1879—1883) WINKLERS Assistent geworden zu sein. Unter WINKLERS Augen hat mancher Fachgenosse graphische Statik gelernt, der heute auf diesem Gebiete selbst als Lehrer auftreten darf. Wie aber die »graphische Statik« angefangen, gewachsen und groß geworden ist, soll jetzt näher dargelegt werden.

62. Die graphische Statik.

a. Ihre Anfänge bis auf CULMANN.

1. Die Franzosen waren von jeher ausgesprochene Analytiker. LAGRANGE[6] (1788) gab in seiner berühmten »analytischen Mechanik« nicht eine einzige Figur, weil er grundsatzmäßig bemüht war, jeden Fall mit möglichst wenigen Mitteln in Formeln darzustellen. Im Gegensatze dazu hat (etwa 100 Jahre früher) NEWTON in den »*Prinzipien*« seine Sätze mit Hilfe von Zeichnungen rein geometrisch entwickelt. POINSOT[13] (1777—1859) bevorzugte (1804) in seinen »Éléments de statique« entschieden das geometrische Verfahren. Lange standen sich so die Ansichten über die zweckmäßigste Behandlung mathematisch-statischer Aufgaben gegenüber, bis es den unausgesetzten Bemühungen französischer und deutscher Ingenieure gelang, die Wissenschaft der »graphischen Statik« anzubahnen, deren Erfolge im Bauwesen außerordentliche geworden sind.

2. Die grundlegenden geometrischen Gebilde der graphischen Statik, das *Krafteck* und *Seileck* (I. **54**—**55**), waren vor Jahrhunderten schon bekannt. STEVIN[21] (1548—1620) kannte bereits das Verfahren der Zerlegung und Zusammensetzung von Kräften, die in einem Knoten, einer sog. *Seilmaschine* angreifen. Er stellte in jedem Knoten die dort wirkenden drei Kräfte ihrer Größe nach in einem Dreiecke dar. Die Anfänge der graphischen Statik sind deshalb bis auf STEVIN zurückzuführen (I. **40**). VARIGNON[22] (1654—1722), dessen Hauptwerk »Nouvelle Mécanique« erst drei Jahre nach seinem Tode erschien, hat (ebenso

wie STEVIN) das Gleichgewicht eines Seilzuges studiert und ist dabei für parallele und nichtparallele Kräfte zu dem Satze gekommen, daß sich beliebige im Gleichgewicht befindliche Kräfte, wenn diese durch gerichtete Strecken dargestellt werden, zu einem geschlossenen Kraftecke zusammensetzen lassen. Auch hat VARIGNON schon die Lage der Mittelkraft von Kräften mit Hilfe eines Seilzuges dargestellt.[23]

Lange Zeit verfloß, ehe Krafteck und Seileck wieder hervorgeholt wurden. Soweit bekannt, geschah dies zuerst von LAMÉ und CLAPEYRON[23] (1826) bei Gelegenheit des Baues von Kuppelgewölben der St. Jakobskirche in Petersburg. Die beiden Ingenieure bezeichnen das Seileck als »*polygone funiculaire*«, das Krafteck als »*polygone secondaire*« und benutzen beide Gebilde zur Darstellung von Kettenlinien. In ihrem Berichte[1] heißt es darüber: »Ainsi des lignes sucessives, proportionelles et parallèles aux forces qui agissent sur les sommets d'un polygone funiculaire, formeront un *polygone secondaire*, fermé ou non fermé, qui jouira de cette propriété, que des lignes partant de ses extrémités et des sommets, et aboutissant en un même point ou *pôle* seront respectivement proportionelles et parallèles aux tractions eprouvées par les différens côtes du polygone funiculaire proposé. Ce théorême a lieu généralement, que la polygone funiculaire soit plan, ou qu'il soit gauche.« Am Schlusse ihres Berichtes sagen die Verfasser: »La théorie sur les polygones *secondaires* et leur pôles, nous parait jeter un nouveau jour sur la théorie des polygons funiculaires; c'est un de ces resultats simples, dont l'énoncé contient presque toute la demonstration, *et qui sont infininement plus fertiles en applications que beauconp d'autres théorêmes plus difficiles à demontrer.*«

Besondere Verdienste um die graphische Statik erwarb sich etwas später der Ingenieuroffizier PONCELET[24] (1788—1867), der 1828—1829 Vorträge an der Artillerie- und Genieschule in Metz gehalten hat. Dort benutzte er schon das Seileck für Schwerpunktsbestimmungen. Später (1835) führte er nicht allein für den Maschinenbau, sondern auch in der Theorie der Gewölbe und des Erddrucks die wichtigen Hilfsmittel von Krafteck und Seileck ein (II. **50** und **53**). BRIX[26] (1798—1870), hat PONCELETS Arbeiten benutzt, um Kettenlinien geometrisch darzustellen (1849). Ebenso hat COUSINERY[25] (1838) im »Calcul de trait« die Geometrie auf seine Standfestigkeits-Untersuchungen angewendet. Er hat aber nicht viel mehr getan, *als vorher entwickelte analytische Ausdrücke* (sozusagen) *ins Graphische übersetzt*. Den Geist jener graphischen

---

[1] Journal des Voies de Communication. Petersburg 1826. S. 35. 1827. S. 44.

Statik, wie sie CULMANN (1866) geschaffen hat (I. **42**—**44**) haben beide und auch alle übrigen Vorgänger CULMANNS noch nicht voll erfaßt. CULMANN (1821—1881) war der Erste, der die Beziehungen zwischen Krafteck und Seileck und deren fruchtbare Verwendbarkeit für die allgemeinen Aufgaben der Statik im Grunde erkannte. Ihn nennen wir daher mit Recht den *Begründer der graphischen Statik.*[27] Leider wendete CULMANN als Beweismittel hauptsächlich »*die Geometrie der Lage*« an, was in weiten technischen Kreisen keinen Anklang fand. Auch MOHR[28] wendete sich (1875) dagegen.

b. CULMANN und seine Nachfolger. Die wichtigsten Gegenstände, die hier der Reihe nach besprochen werden, sind: *Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte*, *Seilecke und deren Verwendung für Aufgaben der Statik und Festigkeitslehre*, *Kräftepläne in der Ebene und im Raume*, *Biegelinien und Einflußlinien.*

1. CULMANN ist der Urheber aller derjenigen Hauptsätze über Krafteck und Seileck und deren Verwendung für die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, die im I. Bande dieser Vorlesungen (unter **54** bis **60** und **61**, **63** bis **65**) enthalten sind. So stammen auch die dort gegebenen Begriffe des *geschlossenen* Kraft- und Seilecks, der *Mittelkraftlinie*, der *Polachse* (Polarachse) von CULMANN. Das bereits erwähnte berühmte, heute noch unentbehrliche Schnittverfahren von RITTER[42] (I. **68**) wurde von CULMANN durch die Schaffung seines *Vierecks* (I. **69**) ins Graphische übersetzt.

Über mehrere, von CULMANN abweichende Verfahren der Kräftezusammensetzung sind die Angaben von HENNEBERG[39] zu vergleichen: MOHR, LEVY und SAVIOTTI[28—30] lösten die Aufgabe, ein Seileck für eine bestimmte Kräftegruppe durch vorgeschriebene drei Punkte zu legen. Die gleiche Aufgabe wurde später noch vielfach behandelt. Tiefere Einblicke in die Beziehungen zwischen den Seilecken, die zu der nämlichen Kräftegruppe gehören, bieten besonders die Arbeiten von MAXWELL[31] und CREMONA[33] (I. **70**). Sie führten auf die sog. *reziproken Figuren* und die *Darstellung der Kräftepläne*, wenn auch der Wert dieser Figuren für die Statik der *Baukonstruktionen* von mancher Seite heute noch stark überschätzt wird.

Für Kräfte, die im nämlichen Punkte O angreifen, bezeichnete CULMANN Krafteck und Seileck als reziproke Figuren. Denn wenn man für diese ein Krafteck mit beliebigem Pole O' zeichnet und dazu zwischen die in O zusammentreffenden Kraftrichtungen ein Seileck legt, so sind Krafteck und Seileck zwei vertauschungsfähige Figuren, insofern als *jenes* als ein Seileck für Kräfte mit dem Anfangspunkte O' aufgefaßt

werden kann, für welche *dieses* das Krafteck bildet. Die von MAXWELL und CREMONA erweiterte Theorie der reziproken Figuren führte zum Verfahren der Darstellung von *Kräfteplänen* statisch bestimmter Stabwerke, wie sie im I. Bande für die Ebene und den Raum gezeichnet worden sind.

Die von CULMANN gegebenen Lösungen für die Aufgaben der *Schwerpunkts*bestimmung, der Ermittelung von *statischen Momenten*, *Flächenmomenten*, Biegungsmomenten belasteter Träger usw. (I. **63** und § 14) sind vielfach verbessert und erweitert worden, besonders durch MOHR, NEHLS u. a. (I. **96**). Die von POINSOT[13] eingeführte *Trägheitsellipse* ist von CULMANN vielseitig verwendet und später mit großem Erfolge von MOHR[34] durch den *Trägheitskreis* ersetzt worden. Dadurch sind die Ermittelungen der *Trägheitsmomente*, des *Zentrifugalmomentes*, sowie die Darstellungen von *Hauptachsen*, *zugeordneten Achsen* und die damit in Verbindung stehende Darstellung des *Kerns* und der *Spannungsverteilung* in einem Stabquerschnitte ungemein vereinfacht und übersichtlich gemacht worden, wie dies aus den ausführlichen Darlegungen darüber (unter I. § 14) zu entnehmen ist.

2. *Kräfte im Raume*, die in verschiedenen Punkten angreifen, setzt CULMANN in der ersten Auflage seines Werkes zunächst in bekannter Weise dadurch zusammen, daß er alle Kräfte parallel zu ihrer Richtung nach einem Schnittpunkte O dreier Projektionsebenen verschiebt und deren Mittelkraft in einem räumlichen Kraftecke findet. Dann vereinigt er die (von POINSOT[13] eingeführten) Kräftepaare mit Hilfe ihrer Achsen (I. **47**). BAUSCHINGER[35] (1834—1893) zeichnet drei Kraft- und Seilecke für drei Projektionen. ZUCHETTI (1877) führt die Kräftegruppe auf zwei windschiefe Kräfte zurück (I. **50**, b), von denen eine in einer vorgeschriebenen Geraden liegt[39]. MOHR[28] gibt eine einfache graphische Darstellung von *Zentralachse* und *Hauptkräftepaar*, wobei er den Satz verwendet, daß die Projektion einer räumlichen Gleichgewichtsgruppe wieder eine solche liefert. Andere hierher gehörende Lösungen vgl. bei HENNEBERG[39].

c. MAXWELL, MENABREA-CASTIGLIANO und MOHR.

1. CLERK MAXWELL (1830—1879), Professor der Experimentalphysik an der Universität Cambridge, hochberühmt durch seine Theorien der Wärme, der Elektrizität, des Magnetismus usw., hat auch der technischen Wissenschaft einige wenige, aber bedeutsame theoretische Arbeiten gewidmet. Sie behandeln die reziproken Figuren, einfache Kräftepläne und das Gleichgewicht und die Starrheit der Stabwerke. Darin ist auch der sog. MAXWELLsche Satz, oder *der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen* enthalten. Fassung und Beweis dieses Satzes durch

MAXWELL selbst ist (unter III. **13**. a) gegeben und dabei dargelegt worden, wie es MAXWELL besonders nur darum zu tun gewesen ist, die Berechnung von *Verschiebungen der Stabwerksknoten* zu erleichtern. Er stellte dabei auch die Elastizitätsgleichungen für statisch unbestimmte Stabwerke auf, aber nur, um auch dafür seinen Satz zu beweisen. Wenn jetzt behauptet wird, die Verfahren von MAXWELL, MENABREA-CASTIGLIANO und MOHR seien gleichwertig und leisten das Gleiche, so ist das ohne Zweifel eine irrige Ansicht. Denn zwei Fragen, die für die Berechnung statisch unbestimmter Bauwerke von großer Wichtigkeit sind: über die Einwirkungen der Temperatur und der Stützenlage, lassen sich nur durch das Verfahren von MOHR, d. h. durch Anwendung des Satzes der gedachten Verschiebungen beantworten. Die Bemühungen MÜLLER-*Breslaus*[1], um die Verfahren von MAXWELL und CASTIGLIANO für die genannten Zwecke *zu ergänzen*, laufen auf nichts anderes hinaus, als auf eine Anwendung des Verfahren MOHRS, und der Versuch, diese Tatsache zu verschleiern, kann als gelungen nicht bezeichnet werden[2]. Somit sei hier festgestellt, daß die in der angegebenen Quelle (S. 336) ausgesprochene Behauptung MÜLLER-*Breslaus*: »Neben den MAXWELLschen Sätzen bilden die Sätze von CASTIGLIANO die Grundpfeiler der gegenwärtigen Theorie der statisch unbestimmten Konstruktionen« unwahr ist. Die Behauptung ist nach vorigem um so widersinniger, als in dem mitgeteilten entscheidenden Urteile der römischen Akademie der »*Luchsäugigen*« wörtlich gesagt worden ist: »*Der Satz, um den es sich handelt, ist älter als die Arbeiten von Menabrea und Castigliano und die gegebenen Beweise erscheinen nicht ganz einwandfrei.*« MÜLLER-*Breslau* sollte bedenken, daß auch an ihn künftig der Maßstab angelegt werden könnte, mit welchem er nach obigem die Bedeutung von MOHRS grundlegenden Arbeiten gemessen hat!

Man beachte hierzu auch MOHRS Beitrag zur Theorie des Fachwerks im Zivilingenieur (1885). Darin werden die Arbeiten von CLAPEYRON, MAXWELL und CASTIGLIANO kurz besprochen. Sodann wird nachdrücklich darauf hingewiesen, wie der Satz der gedachten Verschiebungen nicht nur geeignet sei, die Formänderungen der Fachwerke und die Stabkräfte der statisch unbestimmten Fachwerke zu bestimmen, sondern wie er außerdem *alle* Fragen beantwortet, die bei der Berechnung der bestimmten und unbestimmten Fachwerke vorkommen können[3].

---

[1] In »Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. 3. Aufl. 1904.

[2] Vgl. auch unter **35**, S. 236.

[3] Vgl. die unter **66**, Nr. 60 aufgeführte Schrift, S. 431—434.

Wer sich von der Bedeutung der Arbeiten MOHRS auf den Gesamtgebieten der Mechanik, Festigkeitslehre und Statik der Baukonstruktionen überzeugen will, dem sei *die neueste Schrift* des Meisters[60] empfohlen, worin er das Wichtigste, das er in seiner Tätigkeit als Ingenieur und Hochschullehrer veröffentlichte, unter dem Titel »*Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik*« übersichtlich zusammengefaßt hat. MOHRS grundlegende Arbeiten über die *Theorie der Fachwerke* und der *statisch unbestimmten Systeme* werden unter der folgenden Nummer besprochen. Hier kommen nur seine *Darstellung der elastischen Linie* und sein Anteil an der *Einführung der Einflußlinien* in Betracht.

2. CULMANN erklärte in der ersten Auflage seines Werkes die graphische Darstellung der elastischen Linie als undurchführbar, worüber das Nähere (unter III. 5, b) zu vergleichen ist. Zwei Jahre später brachte MOHR[36] in überraschend einfacher Weise die Lösung der Aufgabe: Er verwendete dabei nur die Eigenschaften von Kraft- und Seileck, folgte also damit dem Meister CULMANN auf dessen ureigenes Gebiet. Wenn MOHR der technischen Welt weiter nichts geschenkt hätte als seine Darstellung der elastischen Linie, so würde er in der Geschichte der technischen Wissenschaften unvergessen bleiben. Aber Schlag auf Schlag folgten neue ideenreiche Veröffentlichungen MOHRS.

In der nämlichen Mitteilung des Jahres 1868, die im Eingange die erwähnte Lösung zur Darstellung der elastischen Linie enthält, hat MOHR[36], um die Momente von durchgehenden Trägern darzustellen, auch bereits *Einflußlinien* gezeichnet. Er bezeichnet diese Linien nicht mit ihrem heutigen Namen. Denn erst WEYRAUCH[68] hat ihnen (1873) den Namen »*Influenzlinien*« beigelegt. MOHR hat aber den Nutzen dieser wichtigen Linien für die Auffindung *der gefährlichsten Laststellungen* und der *Grenzwerte* äußerer und innerer Kräfte damals schon erkannt. Das soll hier an der Hand der von ihm gegebenen Mitteilungen nachgewiesen werden. Nachdem MOHR zuerst die Stützenmomente eines durchgehenden Trägers für gegebene ruhende Lasten graphisch dargestellt hat, sagt er (S. 36) wörtlich: »Die gelöste Aufgabe kommt verhältnismäßig selten vor, denn in der Regel ist nicht nur *ein bestimmter Belastungsfall*, sondern es sind *alle möglichen Belastungsfälle* zu berücksichtigen.« Darauf gibt er (S. 42) unter der Überschrift »*Graphische Bestimmung der Biegungsmomente und Querkräfte, die von einer konzentrierten Einzellast erzeugt werden*« die Anleitung zur Darstellung von Linien, die wir heute *Einflußlinien* nennen. Er sagt: »Es ist von Interesse zu untersuchen, durch welche Lagen der Belastung in jedem beliebigen Punkte des Trägers jene Maxima erzeugt

werden. Alle hierauf bezüglichen Fragen lassen sich beantworten, wenn man imstande ist, die Biegungsmomente und Querkräfte graphisch darzustellen, die hervorgerufen werden, *wenn nur ein beliebiger Punkt des im übrigen unbelasteten Trägers belastet ist; denn aus Einzellasten läßt sich jede andere Belastung zusammensetzen.«* Darauf zeigt Mohr im einzelnen, wie man für irgend einen Schnitt einer Trägeröffnung eine Linie zeichnet, mit deren Hilfe die Größe des Momentes oder der Querkraft im Schnitte für einen beliebigen Lastenzug berechnet werden kann. Mit andern Worten *er zeichnet Einflußlinien*, wie das heute bei der Berechnung von durchgehenden Trägern auch noch geschieht (vgl. unter III. **54** und die Fig. 280—288).

Damit dürfte nachgewiesen sein, daß Mohr es war, der als Erster die Einflußlinien angewendet hat. Fast gleichzeitig mit Mohr hat Winkler[37] solche benutzt. Das war zur Zeit als Winkler seine bahnbrechenden Untersuchungen über Bogenträger (1868) anstellte. Er nannte die Einflußlinien damals »*Spannungskurven*«. Wenn also Henneberg[39] angibt, Weyrauch habe die Einflußlinien (1873) eingeführt, so ist das nicht richtig. Richtig ist nur, daß Weyrauch[68] sie zuerst »*Influenslinien*« genannt. Fränkel[38] schrieb (1876) die erste zusammenfassende Arbeit über Einflußlinien. Mohr[43] hat später als Erster auch die Einflußlinie einer Verschiebung und einer überzähligen Größe gegeben (III. **14**).

Erst in der 4. Aufl. seiner »Graphische Statik der Baukonstruktionen«, nennt Müller-*Breslau* als denjenigen, der zuerst Einflußlinien benutzt hat, Winkler. Mohr wird von ihm dabei nicht erwähnt. Aber auch von Winkler, dessen Nachfolger im Hochschulamte Müller-*Breslau* geworden ist, sagt dieser: »*Die allgemeine Bedeutung dieses Verfahrens hatte Winkler aber damals noch nicht erkannt, was daraus hervorgeht, daß er in der ersten Auflage seiner »Theorie der Brücken« die statisch bestimmten Träger ohne Einflußlinien behandelte.*« Jedenfalls eine merkwürdige, ziemlich aus der Luft gegriffene Behauptung! Hatte denn sonst jemand zu jener Zeit (1873) schon Einflußlinien derart verwendet? Müller-*Breslau* selbst hat doch (wie er sagt) erst seit 1875 Einflußlinien gegeben. Um also falschen Anschauungen über Winklers Meinung von der Bedeutung der von ihm und Mohr eingeführten Einflußlinien zu begegnen, möge hier festgestellt werden, daß Winkler in seinen Berliner Vorlesungen, die Verfasser 1879—1880 selbst hörte, es öfter ausdrücklich betont hat, *wie die Einflußlinien, neben Krafteck und Seileck die wichtigsten Hilfsmittel der graphischen Statik seien.* Wenn Winkler seine Studien über Einflußlinien erst später herausgab, so

hat er dafür sicher berechtigte Gründe gehabt. Weitere Veröffentlichungen über diesen Gegenstand wurden ihm verwehrt, denn schon 1888, nach längerer Krankheit, setzte der Tod seinem Leben ein Ziel[1].

64. Die Theorie des Fachwerkes.

a. Statisch bestimmte Systeme.

1. *Begriff der Starrheit* (Steifigkeit, statische Bestimmtheit). In der berühmten Statik von Möbius[2] (1790—1868) findet man (1837) die ersten Untersuchungen über Beweglichkeit von Körpergebilden, wobei gezeigt wird, wie für gewisse Stablängen eine *unendlich kleine Beweglichkeit* (I. **34**) entstehen kann. Maxwell[31] sagt; »*A stiff frame is one, in which the distance between any two points cannot be altered without altering the length of one or more of the connecting lines of the frame. — A frame of k points in a plane requires in general $2k-3$ connecting lines to render it stiff.*« Maxwells Schriften wurden, wie schon erwähnt, erst später in Deutschland bekannt. So darf man sagen, daß es Mohr war, der sich dort zuerst mit der Frage der Starrheit der Fachwerke beschäftigte. Mohr[43] bestimmte (1874) zuerst die Anzahl der *notwendigen* Stäbe (I. § 5) und sagt: »*Ein einfaches ebenes Fachwerk* (*d. h. ein solches mit $2k-3$ Stäben*) *ist steif, wenn die Längen sämtlicher Stäbe voneinander unabhängig sind.*« Er machte als Erster auch auf den *Ausnahmefall* der unendlich kleinen Beweglichkeit aufmerksam und bezeichnet ihn als einen solchen, bei welchem die eine Stablänge als Funktion der übrigen betrachtet, ein Maximum oder Minimum ist. Auch bemerkt Mohr zuerst, daß die Stabkräfte im Ausnahmefalle im allgemeinen unendlich groß werden. Daß der Ausnahmefall eintritt, wenn die Eliminationsdeterminante einer Gleichung, aus welcher die Stabkraft zu berechnen ist, *gleich Null* wird, hat zuerst Föppl[56] nachgewiesen (1880). Die Bezeichnung »*Grundeck*« (I. **30**) rührt von Lang[54] her. Für die graphische Untersuchung des Ausnahmefalles verwendet (1887) Müller-

---

[1] In der 4. Aufl. seiner »Statik« behauptet Herr Müller-*Breslau* (S. 576), ich hätte im 2. Bande meiner Vorlesungen sein Verfahren zur Darstellung der Einflußlinien statisch bestimmter Träger ohne Angabe der Quelle benutzt. Darauf erwidere ich, daß ich die von ihm (unter **11** seines Literaturverzeichnisses) angegebene Quelle bei Abfassung des 2. Bandes meiner Vorlesungen überhaupt noch nicht gekannt habe. Meine Kenntnisse über Einflußlinien verdanke ich nicht ihm, sondern Winkler. Was aber »*die kinematischen Beiträge*« und »*noch manches andere*«, das ich von Herrn Müller-*Breslau* übernommen haben soll, anlangt, so erwarte ich darüber von ihm nähere Angaben.

Dresden, im Oktober 1905. Der Verfasser.

[2] Band 2, Kap. 4. Vgl. darüber auch in der unter **66**, Nr. 60 aufgeführte Schrift Mohrs, S. 37.

Breslau[53] ein einfaches Verfahren (I. **80**) unter Benutzung des Satzes der gedachten Verschiebungen und der (vor ihm bereits angewendeten) sog. *senkrechten Geschwindigkeiten*. Ausführlicheres über mehr mathematische Auslegungen des Begriffs der »*Starrheit*«, die für die Statik der *Baukonstruktionen* wenig Bedeutung haben, vgl. HENNEBERG[39].

2. *Stabkraftbestimmurg*. Das älteste Verfahren ist das allbekannte von RITTER[43] (I. **68**). Es ist ebenso wie das CULMANN-Verfahren (mit Hilfe des Kraftvierecks) hauptsächlich nur für *Dreieckfachwerke* (I. **26**) anwendbar. Beide Verfahren gelten aber sowohl für die Ebene als auch für den Raum (I. **72**).

Die Darstellung von *Kraftplänen*, die als reziproke Figuren gegenüber den zugehörigen Fachwerksbildern erscheinen, sind wohl — unabhängig von MAXWELL und CREMONA — zuerst von den englischen Ingenieuren TAYLOR, JENKIN und BOW angefertigt worden[32].

SAVIOTTI[30] gibt verschiedene Verfahren an. Besonders bekannt ist dasjenige darunter geworden, das sich auf folgenden bekannten Satz stützt: »*Wenn bei der Gestaltänderung eines n-Eckes, dessen Seiten alle eine und dieselbe Gerade in festen Punkten treffen, während n — 1 Eckpunkte Gerade beschreiben, so schreitet auch der* n^{te} *Eckpunkt in einer Geraden fort*« (I. **82**, b). Bei diesem Verfahren nimmt man zuerst eine Stabkraft beliebig groß an und findet dann durch zweimaliges Probieren den richtigen Kräfteplan.

Die Grundidee des sog. *Verfahren der Stabvertauschung* (Ersatzstabverfahren) rührt von HENNEBERG[49] her (1886). Deshalb ist es (unter I. **74**) das HENNEBERG-Verfahren genannt worden. FÖPPL hat es ebenso genannt und beharrt auch in der 2. Auflage seiner »Graphischen Statik« dabei, wenn er (S. 318) auch anerkennt, daß MÜLLER-*Breslau* sich um die Anwendung des HENNEBERG-Verfahrens verdient gemacht habe. Man vergleiche auch die Entgegnung HENNEBERGS auf die Urheberschaftsansprüche MÜLLER-*Breslaus*[1].

Die Grundidee der *Stabkraftbestimmung unter Anwendung des Satzes der gedachten Verschiebungen*, also des sog. *kinematischen* Verfahrens, hat zuerst MOHR[43] gegeben (1874) und später (1903) auch für die Berechnung der Raumfachwerke verwendet. FÖPPL[56] weist (1880) ebenfalls auf diese allgemeinere Art der Stabkraftermittelung hin. Wenn

---

[1] Danach brauche ich auf die gegen mich gerichteten, anmaßenden Behauptungen des Herrn MÜLLER-*Breslau* in Sachen des HENNEBERG-Verfahrens hier nichts mehr zu erwidern.

Dresden, im Oktober 1905. Der Verfasser.

nachträglich MÜLLER-*Breslau*[1] behauptet, er sei »der Erste gewesen, der die kinematische Berechnung des Fachwerks vollständig durchgeführt« habe, so widerspricht er damit der tatsächlichen geschichtlichen Entwicklung dieses Zweiges der Theorie des Fachwerks. Dagegen erleidet es keinen Zweifel, daß MÜLLER-*Breslau* durch seine zahlreichen Anwendungen der von MOHR geschaffenen theoretischen Grundlagen wesentlich mit dazu beigetragen hat, die für den praktischen Gebrauch so ausgezeichnet einfachen Berechnungsweisen MOHRS in weiten technischen Kreisen bekannt zu machen.

3. Für die *Berechnung der Stabkräfte von Raumfachwerken* können alle vorstehend für die Ebene angegebenen Verfahren verwendet werden. Das *Momentenverfahren von* A. RITTER, das zu diesem Zwecke von LANDSBERG[58] besonders ausgebildet worden ist, das Verfahren von HENNEBERG und von CULMANN, sowie auch das Verfahren von MOHR (I, § 13) eignen sich dazu besonders gut. Die ersten und ausführlichsten Arbeiten über das Raumfachwerk brachte FÖPPL (1880), der besonders auch Raumfachwerke behandelt, die er »*Flechtwerke*« nennt. Das sind Fachwerke, deren Knoten und Stäbe sämtlich auf einem Mantel liegen, der einen Innenraum umschließt. Solche Raumfachwerke waren schon die *Kuppeln* SCHWEDLERS[2]. FÖPPL[56] gibt in seiner »graphischen Statik« auch lehrreiche eigene Berechnungen von Raumkuppeln, ebenso RITTER[55]-Zürich. Hervorzuheben bleibt noch die ausgezeichnete Schrift über Raumfachwerke von ZIMMERMANN[57] (1901), worin die *Reichstagskuppel mit ihrer neuen eigenartigen Stützung*, und auch verschiedene andere neue Fachwerke beschrieben und berechnet werden.

b. Formänderungen und statisch unbestimmte Systeme. Die wichtigsten Arbeiten auf diesem Gebiete rühren von MOHR, WINKLER und LAND (1855—1899), einem Schüler MOHRS, her.

1. *Punktverschiebungen.* MOHR[43] zeigte (1874) als Erster, wie man mit Hilfe des Satzes der gedachten Verschiebungen eine Reihe der wichtigsten Aufgaben aus dem Gebiete der Statik und Festigkeitslehre lösen könne, und zwar sowohl für bestimmte, als auch für unbestimmte Systeme. Sein bahnbrechendes Verfahren hatte in der technischen Welt bereits Eingang gefunden, als auch eine ältere Veröffentlichung MAXWELLS[31] bekannt wurde, von welcher bereits (S. 85 und 434) die Rede war, und deren wesentlicher Inhalt (unter **13**, a) gegeben worden ist. Die

---

[1] Vgl. den Meinungsstreit zwischen MÜLLER-*Breslau* und MOHR im Zentralbl. der Bauverw. 1903. S. 642.

[2] Die Konstruktion der Kuppeldächer. Zeitschr. für Bauwesen 1866. S. 7.

Arbeit von MAXWELL erscheint aber nicht geeignet, die große Überlegenheit des Verfahrens von MOHR, sowie auch dessen Urheberschaftsrechte irgendwie zu schmälern. Verfasser nennt daher die bekannte Grundgleichung der Fachwerkstheorie MOHRS

$$\sum \bar{P}\delta = \sum \bar{S} \cdot \Delta s$$

und die daraus abgeleitete Gleichung

$$\bar{1} \cdot \delta = \sum \bar{S} \cdot \Delta s',$$

mit deren Hilfe jede *aus irgend einer Ursache entstehende Punktverschiebung* zu berechnen ist, die *Arbeitsgleichungen von* MOHR (III. **10**, b). Auch hat es Verfasser sich besonders angelegen sein lassen, die große Bedeutung dieser Arbeitsgleichungen durch eine Reihe von Beispielen für bestimmte und unbestimmte Systeme zu veranschaulichen (III. **11**). Über einen Versuch von MÜLLER-*Breslau*, die Arbeitsgleichungen MOHRS zu solchen von MAXWELL umzustempeln ist (außer dem unter **63**, c bereits Gesagten) noch das Folgende hinzuzufügen.

MÜLLER-*Breslau*[1] sagt: »Die Vergleichung der von den Lasten P und den Stabkräften S geleisteten Arbeiten vollzieht MAXWELL mit Hilfe des Gesetzes

$$1) \qquad \tfrac{1}{2} P\delta = \tfrac{1}{2} S\Delta s,$$

indem er P und S als Kräfte auffaßte, die von Null aus allmählich anwachsen. *Die auf diesem Wege abgeleitete Grundgleichung*

$$2) \qquad \sum P\delta = \sum S\Delta s$$

ist übrigens von derselben allgemeinen Bedeutung, wie die unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen gefolgerte Bedingung

$$3) \qquad \sum P\delta = \sum S\Delta s.$$

Denn solange es sich nur um die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen handelt, ist die Größe der Elastizitätsziffer E und Querschnittsinhalte F der Stäbe gleichgültig und man kann daher auch mit Hilfe der aus dem CLAPEYRONschen Gesetze gefolgerten Gleichung 2) leicht auf den von MAXWELL nicht berücksichtigten Einfluß der Temperaturänderungen schließen, ebenso wie man beobachteten Stützenverschiebungen durch Anbringen von Auflagerstäben mit passend gewählten Querschnitten Rechnung tragen kann.«

---

[1] Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. 3. Aufl. 1904, S. 23.

Dagegen erwidert MOHR[1]: »*Die vorstehenden Angaben sind falsch und irreführend.* Nicht MAXWELL, sondern CLAPEYRON[15] vollzieht das, was durch die Gleichung 1) ausgedrückt wird, und deshalb trägt diese Gleichung nicht MAXWELLS, sondern CLAPEYRONS Namen. In ihr bezeichnen $\varDelta s$ und δ die von den Lasten P und den zugehörigen Stabkräften S hervorgerufenen elastischen Längenänderungen der Stäbe und die entsprechenden Verschiebungen der Knoten. Nicht MAXWELL, sondern MÜLLER-*Breslau* vollzieht den Übergang von der CLAPEYRONschen Gleichung zum Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, und zwar auf einem ebenso einfachen wie unzulässigen Wege, indem er nämlich beide Seiten jener Gleichung mit der Zahl 2 multipliziert. In der »*auf diesem Wege abgeleiteten Grundgleichung*« bezeichnen δ und $\varDelta s$ etwas ganz anderes, nämlich *willkürlich gewählte* Knotenverschiebungen und die zugehörigen Längenänderungen der Stäbe. Auch der angefügte Versuch einer Begründung, der übrigens nicht ohne weiteres verständlich ist, stammt nicht von MAXWELL her, sondern von MÜLLER-*Breslau.* Es handelt sich also hier nicht um Gedanken, die MAXWELL in Wirklichkeit gehabt und geäußert hat, sondern um Gedanken, die er nach der Meinung MÜLLER-*Breslaus* gehabt haben könnte und die aus diesem Grunde mit MAXWELLS Namen belegt werden sollen.

Derartige Bestrebungen, Ergebnisse der deutschen Wissenschaft Ausländern zuzueignen, sind in der literarischen Tätigkeit des Herrn MÜLLER-*Breslau* nicht neu. In dieser Absicht wurde bei einer früheren Gelegenheit versucht, die Sätze CASTIGLIANOS mit allerlei Zutaten auszustatten, an die CASTIGLIANO selbst nicht gedacht hatte. Mein Aufsatz »Über die Elastizität der Deformationsarbeit« im Zivilingenieur 1886, S. 395, enthält hierüber die näheren Angaben. Auch die falsche Darstellung des sog. WILLIOTschen Verfahrens gehört hierher.«

Verfasser steht in dieser Sache zu MOHR und vertraut auf das gesunde Urteil der deutschen Fachgenossenschaft, die zu entscheiden haben wird, auf welcher Seite das Recht liegt.

2. *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen.* Am Schlusse seiner erwähnten Arbeit gibt MAXWELL nur eine einzige Anwendung seines Satzes, indem er für ein Parallelfachwerk eine Verschiebung berechnet, die durch eine Einzellast verursacht wird. MOHR[43] bewies, ohne MAXWELLS Vorgehen zu kennen, (1875) den obigen Satz für den Fall lotrechter Verschiebungen und leitete daraus die »*Einflußlinie einer Verschiebung*« ab (III. **14**, a).

---

[1] S. 433 der unter **66**, Nr. 60 aufgeführten Schrift.

In der allgemeinsten Form entwickelte BETTI[31] (1872) den Satz, sowohl für Punktverschiebungen als auch für *Geradenverdrehungen* usw. MOHR[60] gibt einen eignen Beweis des Satzes von BETTI und leitet daraus u. a. den Satz von MAXWELL ab.

Ein im unbelasteten Zustande spannungsloses (bestimmtes oder unbestimmtes) Fachwerk trage die nach ihrer Größe, Lage und Richtung gegebenen Lasten P_1, P_2, P_3, ..., von welchen die Stabkräfte S_p und deren Längenänderungen $\Delta s = S_p \cdot k$ erzeugt werden. Nach erfolgter Beseitigung der Lastengruppe P wird eine beliebige andere Lastengruppe Q auf das Fachwerk gebracht und erzeuge die Stabkräfte S_q mit den Längenänderungen $\Delta s = S_q \cdot k$. Jetzt kehren wir zum ersten Belastungsfalle zurück, denken in jedem Knoten des Fachwerks aus jedem Stabe ein Stück herausgeschnitten und dann das Fachwerk durch Anbringen der Stabkräfte S_p in bekannter Weise in Gleichgewicht gesetzt. Darauf schreiben wir die Arbeitsgleichung MOHRS an für diejenigen gedachten Knotenwege, die von der Lastengruppe Q verursacht werden würden, wenn diese an Stelle der Gruppe P aufgebracht worden wäre. Das gibt die Gleichung

$$A_p = \sum S_q S_p \cdot k,$$

wenn A_p die bei solchen Verschiebungen geleistete *gedachte* Arbeitssumme bedeutet.

Ebenso kann man jetzt mit der Lastengruppe Q verfahren, indem man jeden Fachwerkknoten denjenigen Weg durchlaufen denkt, der von der Lastengruppe P verursacht werden würde. So erhält man ebenmäßig die Gleichung

$$A_q = \sum S_q S_p \cdot k,$$

woraus

$$A_p = A_q$$

folgt.[1]

Das Fachwerk trage jetzt zuerst nur *eine* Last P, darauf nur *eine* Last Q. Sind dann P und Q von gleicher Größe, nur nach Richtung und Angriffspunkt verschieden und legen die beiden Angriffspunkte die

---

[1] Nach BETTI lautet der Satz: »Se in un corpo solido elastico omogeneo, due sistemi di spostamenti fanno equilibrio a due sistemi di forze applicate alla superficie, la somma dei prodotti delle componenti delle forze del prima sistema per le componenti degli spostamenti negli stessi punti del secondo, è equale alla somma dei prodotti delle componenti delle forze del secondo sistema per le componenti degli spostamenti nei medesimi punti del primo.«

betreffenden Wege δ_p und δ_q zurück, so ist nach dem Satze von BETTI anzuschreiben

$$P\delta_q \cdot \cos(P, \delta_q) = Q \cdot \delta_q \cdot \cos(Q, \delta_q),$$

oder

$$\delta_q \cdot \cos(P, \delta_q) = \delta_p \cdot \cos(Q, \delta_q),$$

d. h. *die Projektion des Weges δ_q auf die Kraft P ist ebenso groß wie die Projektion des Weges δ_p auf die Kraft Q.*

Sind Q und P beide Last*einheiten* und heißen ihre Angriffspunkte m und n, so bedeutet der letzte Satz, wenn die δ in der Richtung der Kräfte genommen werden,

$$\delta_{nm} = \delta_{mn}.$$

In dieser einfachsten Fassung führt der Satz von MAXWELL-MOHR zu wichtigen Folgerungen bei der Berechnung der statisch unbestimmten Systeme (III. § 6). Verschiedene lehrreiche Anwendungen des Satzes von BETTI vgl. bei MOHR[1].

3. *Biegelinien* (*Biegungslinien*). Wie die elastische Linie, so wird auch die *Biegelinie* unmittelbar mit Hilfe eines aus den sog. elastischen Kräften w der *Winkeländerungen* gebildeten Kraftecks gezeichnet. Das Verfahren rührt von MOHR[43] her (1875). Wie (unter III. **15**) ausführlich dargelegt worden ist, berechnet sich jede elastische Kraft w dabei allgemein aus der Gleichung

$$w = \frac{\Delta s}{r},$$

worin Δs die Stablängenänderung ist und r den Hebelarm einer Stabkraft, bezogen auf den ihr zugeordneten Momentenpunkt, bedeutet, ganz gleich, ob es sich dabei um einen Gurtstab oder Wandstab handelt.

WINKLER[44] war es, der die elastischen Formänderungen des Fachwerks zuerst analytisch festgelegt hat (1883). Im besondern berechnete er als Erster auch die *Winkeländerungen der Stabdreiecke*, um sie für seine Untersuchungen über Nebenspannungen zu verwerten. LAND[59] gab (1889) eine einfache graphische Darstellung der Winkeländerungen (III. **18**, Fig. 86) und er war auch der Erste, der eine allgemeine, auf *kinematischem* Wege begründete Darstellung der *Biegelinien* gab. Verfasser hält das Verfahren von MOHR für einfacher und durchsichtiger, als das von LAND gegebene. Doch empfiehlt er, wenn es sich um die Darstellung der Biegelinien *elastischer Stabzüge* handelt, die Anwendung des (unter III. **18**) beschriebenen Verfahrens von LAND.

---

[1] S. 388—592 der unter **66**, Nr. 60 aufgeführten Schrift.

LAND darf als der Begründer der allgemeinen *kinematischen Theorie des Fachwerkes* angesehen werden. Wenn auch der von ihm dabei mit benutzte *Satz von der Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen* schon (1872) von BETTI ausgesprochen worden ist, so hat LAND[51] doch, ohne BETTIS Ableitung des Satzes zu kennen, in einer Reihe von Aufsätzen das ganze in Frage kommende Gebiet früher und gründlicher aufgeschlossen, als irgend ein anderer vor ihm. Schon Ende des Jahres 1882 und im Januar 1883 hat LAND in Dresden, im Beisein von FRÄNKEL und MOHR, sowie 1884 in Straßburg vor dem Architekten- und Ingenieur-Verein von Elsaß-Lothringen über seine neuen Ideen Vorträge gehalten und dabei u. a. auch die erste *allgemeine kinematische Darstellung der Einflußlinien* gegeben. Veröffentlichen konnte er die Grundlagen seines neueu Verfahrens erst im Anfange des Jahres 1887.

LAND ist auch der Urheber des Satzes:

Die Stabkraft wird dargestellt durch die Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft P in deren Richtung,

$$S = P \cdot \delta,$$

oder für »$P = 1$«

$$S = \delta.$$

Dieser Satz[1] bildet die Grundlage zur kinematischen Darstellung der Einflußlinie einer Stabkraft S und folgt unmittelbar aus dem Satze der gedachten Verschiebungen, den MOHR[43] (1874) benutzt hat, um die *kinematischen* Beziehungen zwischen der Stablängenänderung und den Knotenverschiebungen zu ermitteln, wenn die Stabkraft S vorher durch *statische* Gesetze bestimmt worden ist. LAND benutzt den Satz der gedachten Verschiebungen *in umgekehrter* Weise, um mit Hilfe *kinematischer* Sätze *statische Beziehungen abzuleiten.* Man wäre jedoch wohl berechtigt, auch die *erste kinematische Darstellung der Einflußlinien von Stabkräften* nicht LAND, sondern MOHR zuzuschreiben. Denn, wie aus den ausführlichen Darlegungen (unter III. **15**), namentlich auch aus den dabei benutzten Fig. 63, 65 und 66 zu erkennen ist, deckt sich MOHRS graphische Darstellung der Biegelinien eines Fachwerks, in welchem *nur ein einziger Stab* elastisch gedacht wird, völlig mit der Darstellung der *Einflußlinie der betreffenden Stabkraft.*

4. *Verschiebungspläne*, in denen die Knotenverschiebungen von einem Pole aus als Strahlen aufgetragen werden, sind *viel weniger genau* als

[1] MÜLLER-*Breslau* gibt den Satz erst 1892 im II. Bande der 2. Aufl. seiner »Graph. Statik der Baukonstruktionen«. Seine Veröffentlichungen in der Schweizerischen Bauzeitung (1887) enthalten den Satz nicht.

Biegelinien. Biegelinien aus Verschiebungsplänen abzuleiten, empfiehlt sich nicht, weil man — auch unter Berücksichtigung der Formänderungen in der Wand — Biegelinien eben so einfach darstellen kann wie jene Pläne. Vgl. die Beispiele in III. **17** und **36**, c. Verschiebungspläne für statisch unbestimmte Fachwerke unmittelbar zu zeichnen, ist ihrer Ungenauigkeit wegen unmöglich, wenn man nicht jede Verschiebung vorher (nach MOHR) berechnet.

Die ersten Verschiebungspläne rühren von WILLIOT[46] her. Sie waren aber praktisch unbrauchbar, weil darin die Stützenbedingungen des Fachwerks nicht berücksichtigt wurden. Wie dies (in einfacher Weise) mit Hilfe von Zerlegen und Zusammensetzen von Verschiebungen geschieht, hat MOHR[50] gezeigt (III. **20**, b).

Über den Versuch einer ungerechten Zueignung des Verfahrens der Darstellung von Verschiebungsplänen an den Franzosen WILLIOT sagt MOHR[1]: »Unter der Überschrift »*Verschiebungspläne nach dem Verfahren von* WILLIOT« beschreibt MÜLLER-*Breslau* auf S. 60 seiner Graphischen Statik Bd. II, 1902 auch jene Zerlegungen und Zusammensetzungen, ohne seine Quelle anzugeben. Seine Leser werden hierdurch zu dem Irrtum geführt, daß alles zum Verfahren von WILLIOT gehöre, während die von MÜLLER-*Breslau* z. B. in den Abb. 37—42 seiner Graphischen Statik vorgeführten Verschiebungspläne nicht nach dem Verfahren von WILLIOT gebildet werden können, sondern zu ihrer Darstellung der von mir angegebenen Hilfsmittel bedürfen.«

5. Weil die *Berechnung der statisch unbestimmten Systeme* ohne vorherige Kenntnis der Formänderungen des von den *überzähligen* Stäben befreiten Hauptsystems nicht erfolgen kann, so ist ersichtlich, wie nach dem Bekanntwerden der grundlegenden Arbeiten MOHRS aus dem Jahre 1874—75 auf diesem schwierigen Gebiete eine völlige Umwälzung eintreten mußte. Dazu kam der *Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen*, dessen allgemeinste Gestalt 1872 von BETTI gegeben worden war, und außerdem das Verfahren zur Darstellung der gefährlichsten Lastlagen und der Grenzwerte von äußern und innern Kräften mit Hilfe der *Einflußlinien*. Eine große Zahl von Fachmännern bemächtigte sich der neuen theoretischen Errungenschaften. Allen voran bemühte sich zuerst WINKLER (1835—1888), als Professor der Ingenieurwissenschaften in Prag, Wien und zuletzt in Berlin, die neuen Lehren durch Wort und Schrift in weiten technischen Kreisen zu verbreiten. WINKLER, ebenso wie auch FRÄNKEL (1841—1895) Professor der Ingenieurwissen-

---

[1] S. 185 der unter **66**, Nr. 60 aufgeführte Schrift.

schaften in Dresden, waren in Deutschland die Ersten, die mit den von MOHR und andern neu geschärften geistigen Waffen die schwierigsten Aufgaben der Festigkeitslehre und Statik zu bewältigen und zu beherrschen suchten. Leider wurden diese beiden ausgezeichneten Männer zu frühe ihrem Wirkungskreise durch den Tod entrissen. Über die Schriften des Nachfolgers von WINKLER — das ist MÜLLER-*Breslau* — ist das Erforderliche schon im ersten Bande (I. **42**) gesagt worden.

65. Besondere Theorien. Die ältesten Theorien befaßten sich mit der Berechnung von *Gewölben* und *Stützmauern*. Darüber vergleiche man die ausführlichen geschichtlichen Rückblicke und die Literatur im zweiten Bande (II. **50—56**). Im 19. Jahrhundert gesellten sich dazu die Theorien über *durchgehende Träger*, *Bogenträger* u. dgl., die nachfolgend kurz besprochen werden.

a. Mehrfach statisch unbestimmte Systeme.

1. *Durchgehende Träger.* Über diese Trägergattung, die um die Mitte des 19. Jahrhunderts noch sehr beliebt war, gibt es zahlreiche literarische Arbeiten. Schon EYTELWEIN (1764—1848), der erste Direktor der Berliner Bauakademie, gab (1808) ein Verfahren zur Berechnung der Stützendrucke eines über mehr als drei Stützen durchgehenden Trägers, später (1826) auch NAVIER[8]. Diese Berechnungen waren aber recht verwickelt und unbequem. Das erste allgemeine, einfache und praktische Verfahren zur analytischen Behandlung durchgehender Träger stammt (1855) vom Ingenieur BERTOT[63]. Die (1857) von CLAPEYRON[63] gegebenen Gleichungen stimmen mit denjenigen von BERTOT überein. Die irrtümlich seitdem allein mit dem Namen CLAPEYRONS belegte »*Gleichung der drei Momente*« (Theorème des trois moments) lautet in allgemeiner Form

$$q_{n-1} \cdot l_{n-1}^3 + q_n \cdot l_n^3 + 4 M_{n-1} \cdot l_{n-1} + 8 M_n (l_{n-1} + l_n) + 4 M_{n+1} \cdot l_n = 0.$$

Darin werden zwei Nachbaröffnungen (l_{n-1} und l_n) auf den Stützen $n-1$, n und $n+1$ betrachtet. Die gesuchten Stützenmomente sind M_{n-1}, M_n, M_{n+1}. Jede der beiden Öffnungen trägt eine beliebig große, gleichmäßig stete Vollbelastung für die Längeneinheit, die in einer Öffnung auch Null sein kann. CLAPEYRON verwendete solche Träger beim Bau großer Eisenbahnbrücken.

In Deutschland wurde das BERTOT-CLAPEYRON-Verfahren durch MOHR[64] veröffentlicht (1860) und auf den Fall ausgedehnt, in welchem die Stützen nicht in gleicher Höhe liegen. MOHR brachte dabei auch den ziffermäßigen Nachweis der Gefährlichkeit zufälliger Stützensenkungen

für überall gleichen und (1862) für veränderlichen Trägerquerschnitt[1]. Er warnte auch vor Überschätzung der Vorteile der durchgehenden Träger und riet, statt ihrer einfache Träger zu bevorzugen. Der Erste, der den Einfluß der Höhelagen der Stützen berücksichtigte um die Momente zu verringern, war (1856) KÖPCKE[62]. Auch SCHEFFLER und GRASHOF (1857) beschäftigten sich mit dieser Frage.

Sehr frühe (1862) lieferte auch WINKLER[65] Beiträge zur Theorie der durchgehenden Träger. Später noch BRESSE[66] (1865), WEYRAUCH[68] (1873), LEVY (1886) u. a.

Die erste graphische Behandlung der Theorie der durchgehenden Träger findet man bei CULMANN. Dessen Schüler RITTER-Zürich[67] hat später (1871 und 1900) die umfassendsten Arbeiten über durchgehende Träger veröffentlicht. Darin werden besonders die von CULMANN und MOHR eingeführten, von WINKLER u. a. erweiterten graphischen Hilfsmittel in sehr anschaulicher Weise vorgeführt (III. § 9). Auf die von RITTER[69] gegebenen Gedanken bauend, hat es der Ingenieur VIANELLO[71] (1904) mit neuen Hilfsmitteln versucht, auch die über *elastisch senkbaren* Stützen durchgehenden Träger graphisch zu behandeln. Es scheint aber, als ob *ein neues allgemeines Verfahren*, bei welchem *gleichmäßig sowohl unverschiebbare als auch elastisch verschiebbare Stützung* in die Rechnung einbezogen werden können, Aussicht auf künftigen Erfolg hat. Dabei wird, wie es (unter III. **59**, **60**) beschrieben worden ist, unmittelbar *der Schlußlinienzug der Momentenfläche* gezeichnet. Die Anfänge des neuen Verfahrens (bei alleiniger Berücksichtigung unverschiebbarer Stützen) stammen von dem englischen Ingenieur CLAXTON FIDLER[70] (1883). Professor OSTENFELD[72]) in Kopenhagen hat es einheitlich auch für elastisch verschiebbare Stützen erweitert. Dem neuen graphischen Verfahren haften allerdings noch einige Unbequemlichkeiten an, die aber, wie zu erwarten steht, bald beseitigt werden dürften, und die namentlich darin bestehen, daß der Schlußlinienzug in manchen Fällen graphisch nur durch *Probieren* gefunden werden kann. Ausführliche Literaturangaben über durchgehende Träger findet man im Handbuch der Ingenieurwissenschaften. 3. Aufl. II. Band. Brückenbau, S. 364 und bei WINKLER[65].

2. *Bogenträger.* Der Bau von größeren Bogenbrücken aus schmiedbarem Eisen hat erst in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts

[1] MÜLLER-*Breslau* benutzte in seiner »Graphischen Statik«, Band II, die Abhandlung MOHRS in ausgiebigster Weise ohne irgendwo seine Quelle anzugeben (vgl. S. 327 der (unter **66**) Nr. 60 aufgeführten Schrift).

angefangen. Anfangs baute man, nach dem Vorbilde der Steinbrücken, Bogen ohne Gelenke, obwohl die ersten Ideen *Gelenke* einzulegen, bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts zurückgehen. Die ersten theoretischen Arbeiten lieferten französische Ingenieure, besonders (1848—1854) BRESSE[73]. Auch die erste Anwendung von Kämpfergelenken (1858) erfolgte in Frankreich[61]. Unter den ältern Bogenbrücken mit Kämpfergelenken ist die (1861—1864) von HARTWICH erbaute Rheinbrücke der Linie Koblenz-Lahnstein besonders hervorzuheben. Sie zeigte *zum ersten Male Fachwerk* zwischen gekrümmten Parallelgurten. Ihre von STERNBERG[75] geleitete theoretische und konstruktive Durchbildung war für die später erbauten Rheinbrücken von maßgebenden Einflusse. Vor STERNBERG — der später Professor an der technischen Hochschule in Karlsruhe war — hatte sich aber mit der analytischen Behandlung der Bogenträger schon WINKLER[74] befaßt. Ihm folgten FRÄNKEL[76], ENGESSER[78], MOHR[79] und WEYRAUCH[81]. Alle diese theoretischen Arbeiten wurden in hohem Maße gefördert durch die geschilderte gleichzeitige Entwicklung der Elastizitätslehre und der graphischen Statik. Die neuen allgemeinen Berechnungsarten der statisch unbestimmten Konstruktionen beseitigten die bisherigen Schwierigkeiten und Unsicherheit der Rechnungen. Man kam nebenbei auf diesem Wege — wenn auch langsam — zur bessern Wertschätzung der statisch unbestimmten Träger. Das bedeutete einen allmähligen Wandel der Anschauungen, der einerseits den Bogenträgern zugute kam, anderseits aber auch den Glauben an die Notwendigkeit von Zwischengelenken (Scheitelgelenken) erschütterten[61].

Die ersten grundlegenden Arbeiten über Bogenträger rühren von WINKLER[77] her. Schon im Jahre 1856 veröffentlichte er[74] eine lehrreiche Schrift über »*Formänderung und Festigkeit gekrümmter Körper, insbesondere der Ringe*«. 1867 folgte seine »Lehre von der Elastizität und Festigkeit«, worin dem Vollwandbogen ohne Gelenke die gründlichste Behandlung zuteil wird. In dem nämlichen Jahre führte FRÄNKEL[76] die »*Kämpferkraftlinie*« ein (III. **46**, **47**). Besonders zu nennen sind dann noch WINKLERS Untersuchungen über den Einfluß der Temperatur (1867) und seine *Einführung der Einflußlinien* (1868), von welcher bereits die Rede war.

Neben WINKLER sind MOHR[79], ENGESSER[78] und WEYRAUCH[81] die fruchtbarsten Forscher in der Theorie der Bogenträger gewesen. MOHR bringt in seiner ersten Arbeit (1870) die *graphische* Berechnung des Bogens mit zwei Kämpfergelenken unter Benutzung von Einflußlinien, und berücksichtigt dabei auch die Änderung der Stützpunktlagen und der Temperatur. Weitere Arbeiten von MOHR auf diesem Gebiete sind

1874 und 1881 erschienen. Zu erwähnen sind hier noch die Arbeiten von KÜBLER[80] (1873), RITTER-Zürich (1886), GUIDI-Turin und FREITAG[83]. Eine vollständige Zusammenstellung der älteren Literatur findet man im Handbuch der Ingenieurwissenschaften. 2. Aufl., 2. Band: Der Brückenbau. 4. Abt. S. 141.

b. Nebenspannungen. Die Ursachen der Nebenspannungen sind (unter III. **56**) im allgemeinen beschrieben worden. In den ersten Entwicklungsstufen der Konstruktion beachtete man Nebenspannungen überhaupt nicht. Der Not gehorchend, richtete man damals die Trägerberechnungen so einfach wie nur möglich ein und legte dabei die Gelenkbolzenknoten der älteren Trägersysteme zugrunde. Als dann diese Systeme sich nicht bewährten, ging man in Europa bald zum Bau der durchweg vernieteten Brücken über, ohne aber die einmal eingeführte bequeme Berechnung (unter Voraussetzung reibungsloser Knotengelenke) aufzugeben[61]. Obwohl viele Konstrukteure sich der Mängel dieser Berechnungsart wohl bewußt waren, so begegnete doch die rechnerische Untersuchung über die dabei begangenen Fehler so großen Schwierigkeiten, daß Jahrzehnte vergingen, ehe die Frage der Ermittelung von Nebenspannungen ihre erste Lösung fand. Fast zu gleicher Zeit veröffentlichten WINKLER, ENGESSER[85], ASIMONT und MANDERLA darüber ihre ersten Arbeiten.

Professor ASIMONT[86] stellte bereits 1877 die Berechnung der Nebenspannungen als Preisaufgabe der Münchener Ingenieurfachschule, worauf (1879) MANDERLA[84] eine vorzügliche Lösung einreichte, in welcher er für die Integrationen die Hyperbelfunktionen anwendete. Die ausführlichsten Untersuchungen findet man bei WINKLER[87], im 2. Teile seiner »Theorie der Brücken«, wobei sowohl Regeln für die Größenbestimmung, als auch Mittel zur Verminderung der Nebenspannungen gegeben werden. Vor MANDERLA hatte ENGESSER bereits ein einfaches Näherungsverfahren zur Ermittelung der Nebenspannungen angegeben.

Graphische Lösungen der schwierigen Aufgabe gaben LANDSBERG[88] (1885—1886) und RITTER[89]-Zürich (1890). Darüber ist unter III. § 10 zu vergleichen. MOHR[90] gab (1891—1893) ein davon abweichendes Verfahren, worin er als Hilfsmittel der Berechnung außer dem *Knotendrehwinkel*, um welchen die in einem Knoten miteinander starr verbundenen Stab*enden* sich bei der Formänderung des Fachwerkes drehen, auch noch den *Stabdrehwinkel* einführt. Das ist derjenige Winkel, um welchen eine ursprünglich gerade Stabachse während der Formänderung sich dreht.

Das Aufdecken und Aufhellen des vordem dunklen Gebietes der Nebenspannungen durch deutsche Männer war von bedeutendem Einflusse auf die Weiterentwicklung der Konstruktionen. Seitdem die dabei gefundenen Wahrheiten im letzten Jahrzent des 19. Jahrhunderts allgemeiner bekannt geworden sind, ist man mehr und mehr bestrebt, durch geeignete Wahl der Stabquerschnitte sowie durch zweckmäßig gestaltete Knotenanschlüsse und Fahrbahnanordnungen sowohl in den Trägerebenen selbst, als auch quer dazu die Nebenspannungen zu ermäßigen. Die dabei benutzten Konstruktionseinzelheiten werden in Verfassers demnächst erscheinenden »*Vorlesungen über Eisenbrückenbau*« behandelt werden.

c. Der Einfluß bewegter Lasten. Im ersten Bande (I. **10**) ist über die *Konstruktionslasten* bereits im allgemeinen gesprochen worden, ebenso auch über die damit im ursächlichen Zusammenhange stehende *Sicherheit der Konstruktion* (I. **12**). Dort wird gesagt, wie es nicht gerechtfertigt erscheint, bei Konstruktionen von großer räumlicher Ausdehnung, die veränderliche oder *bewegliche Lasten* zu tragen haben, für alle Stäbe, ohne Unterschied ihrer Bedeutung oder ihres besondern Zweckes, den gleichen Sicherheitsgrad zu wählen. Es sollten vielmehr die Konstruktionsteile je nach der Art, wie sie die Lasten aufnehmen, in Gruppen gesondert werden, und für jede Gruppe wäre ein eigener Sicherheitsgrad zu wählen. Dann würden diejenigen Querkonstruktionen *am ungünstigsten dastehen*, *die unmittelbar von den beweglichen Lasten berührt*, also auch von deren *dynamischen* Wirkungen *unmittelbar* getroffen werden.

Abgesehen von *Stoß*wirkungen (I. **12**) und besondern Einflüssen, die von der verschiedenen Bauart der Verkehrsfahrzeuge herrühren, darf man deren dynamische Wirkungen wie folgt beschreiben:

1. *Veränderung des von der bewegten Last ausgeübten Druckes infolge der in der Trägerebene eintretenden Krümmung der Bahnlinie*;
2. *Auftreten von Schwingungen im Träger*, *verursacht durch eine mit großer Geschwindigkeit eintretende Belastung.*

Die Frage, welchen Einfluß bewegliche Lasten auf die Größe der Formänderung und infolgedessen auch auf die Größe der Spannungen eines Trägers ausüben, hat schon viele Fachgenossen beschäftigt. Namentlich kam dabei auch die *Geschwindigkeit*, mit welcher die bewegten Massen über den Träger gleiten, in Betracht. Bisher hat man aber diesem Einflusse, wie schon gesagt, mehr oder weniger durch passende

Abwägung des Sicherheitsgrades zu begegnen gesucht, denn seine genauere Berechnung bietet außerordentliche Schwierigkeiten. Schon der einfache Fall eines Trägers auf zwei Stützen, über den eine Einzellast rollt, macht sehr umständliche Rechnungen nötig, wenn die Bahn der bewegten Masse ermittelt werden soll.

Mit der erwähnten Aufgabe hat sich am eingehendsten (1889) zuerst der französische Ingenieur SOULEYRE[91] befaßt. Aber auch dieser gewandte Rechner hat keine befriedigende Lösung erzielen können. Er begründet den Mißerfolg wie folgt wörtlich: »La question est donc loin d'être épuisée; mais tout effort à tenter dans la voie de l'intégration des équations différentielles nous parait d'avance condamné à la stérilité.« Der Erste, der mit Hilfe einer angenäherten Integration zu ziemlich brauchbaren und richtigen Ergebnissen gelangt ist, war (1881) der Ingenieur GLAUSER[92]. Nach ZIMMERMANN[93] ist die Lösung GLAUSERS aber unvollkommen, weil die angewendete Entwicklung nach einer Potenzreihe für einen Teil des Trägers versagt und dazu noch das eigentliche *Bewegungsgesetz* im Dunkeln läßt. ZIMMERMANN kannte das allgemeine Integral der Differentialgleichung der Bahn der bewegten Masse bereits im Jahre 1892. Er unterließ aber dessen Veröffentlichung, um neben der rein mathematischen Lösung des Integrals zugleich auch ein praktisch brauchbares Rechnungsverfahren auszubilden, wozu ein großer Aufwand an Arbeit und Zeit erforderlich war.

Im Jahre 1896 erschien dann die außerordentlich lehrreiche, hervorragende Schrift ZIMMERMANNS[95] über »*Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last*«, worin er eine seit Jahrzehnten schwebende Frage zum ersten Male grundlegend löst. Darin ist die schwierige Integration der Differentialgleichung der Bahn der bewegten Masse, sowie auch deren weitere Untersuchung mit bewundernswertem Scharfsinne durchgeführt. Einzelheiten vergleiche man in der Schrift selbst, und auch in dem Handbuche der Ingenieurwissenschaften, 3. Aufl. 2. Band: Brückenbau, 2. Abteil. S. 39. Dort haben BRIK und LANDSBERG die Fragen der dynamischen Wirkung der Verkehrslasten ausführlich dargelegt. Dort findet man (auf S. 65) auch eine vollständige Übersicht der einschlägigen *Literatur*.

Näheres über die hier nur allgemein und kurz berührten Fragen der dynamischen Lastwirkungen folgt in Verfassers demnächst erscheinenden »*Vorlesungen über Eisenbrückenbau*«.

§ 13. Anhang zu allen drei Bänden.

66. Übersicht der wichtigsten geschichtlichen Literaturquellen. Die den einzelnen Schriften gegebenen Nummern beziehen sich auf die Darlegungen des vorstehenden geschichtlichen Rückblickes.

a. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit.

1) Galilei. Discorsi e dimostrazioni matematiche. Leyden 1638.

2) Hooke. Philosophical tracts and collections. 1678. — Lectures of Springs. Philosoph. Transactions. 1679. London.

3) Oeuvres de Mariotte. Leyden 1717. Übersetzung daraus unter dem Titel »*Grundlehren der Hydrostatik und Hydraulik*« von Dr. Meinig. Leipzig 1723. Darin findet man (S. 400) Untersuchungen über die Biegungsfestigkeit prismatischer Körper.

4) Jacobi Bernoulli Opera. Darin findet sich unter »*Curvatura laminae elasticae etc.*« (S. 576) die erste analytische Darstellung der Gestalt der elastischen Linie. Vgl. 23.

5) Euler. Methodus inveniendi lineas curvas. Lausanne und Genf. 1741—1744. Additamentum: »De curvis elasticis«.

6) Lagrange. Mécanique analytique. Paris 1788.

7) Coulomb. Mémoires de l'Académie des Sciences. 1784. Zuerst 1776 unter dem Titel »Application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'Architecture.

8) Navier. Mémoire sur la flexion des verges élastiques courbes. Am 23. Nov. 1819 der Pariser Akademie überreicht. Dort veröffentlicht VI. 1827. — Resumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des machines. I. Aufl. 1826. II. Aufl. 1833. III. Aufl. durch de Saint-Venant 1863. Deutsch von Westphal. I. Aufl. 1851. II. Aufl. 1879.

9) Poisson. Mémoire de l'Academie des sciences. VIII, 1829. — Journal de l'École polytechnique. 20. Heft. 1831.

10) Cauchy. Exercises de mathématiques. Paris 1827 bis 1828.

11) Lamé. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité. 1. Aufl. 1852. 2. Aufl. 1866.

12) de Saint-Venant. Mémoires des savants étrangers. XIV. 1856. — Historique abrégé des recherches sur la résistance et sur l'élasticité des corps solides. Anhang zur III. Aufl. von Naviers

»Resumé des leçons etc.« Paris 1863. — Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion aussi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général. Paris 1853.

13) Poinsot. Éléments de statique. Paris 1804. 9. Aufl. 1848.

14) Clebsch. Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1862. — Grashof. Festigkeitslehre. 1866. — Winkler. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Prag 1867. — Grashof. Theorie der Elastizität und Festigkeit. 1878. 2. Auflage der Festigkeitslehre von 1866.

15) Clapeyron. Sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes. Mémoires des savants étrangers. IV. 1833.

16) Castigliano. Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques. 1879. — Intorno ad una proprietà dei sistemi elastici. Atti delle Scienze di Torino. 1882.

17) Menabrea. Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques. Comptes rendus. 1858. I.

18) Fränkel. Das Prinzip der kleinsten Arbeit der innern Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben. Zeitschr. des Arch.- und Ingen.-Vereins in Hannover. 1882.

19) Atti della r. Akademia dei Lincei. Anno CCLXXII. Serie 2a. Vol. II. 1874—1879. Roma, coi tipi del Salvincci. 1879. pag. 59 bis 66. — Enthält zwei Schreiben von Menabrea und Castigliano an den Präsidenten der Akademie und den Bericht Cremonas.

20) Mohr. Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes. Civilingenieur 1882. — Derselbe. Über die Verteilung der exzentrischen Druckbelastung eines Mauerwerkkörpers. Zeitschr. des Arch.- und Ing.-Ver. in Hannover. 1883. — Derselbe. Über die Elastizität der Deformationsarbeit. A. a. O. 1886. — Derselbe. Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials. Zeitschr. des Ver. deutsch. Ing. 1900.

b. Die graphische Statik.

21) Stevin. Beghinselen der Waagkonst. 1585. — Hypomnemata mathematica. 1608.

22) Varignon. Nouvelle mécanique ou statique. Paris 1725. I. S. 193 bis 199. — Vgl. auch Nr. 23.

23) Rühlmann. Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik usw. Leipzig 1885. S. 472—474.

24) Poncelet. Cours de Mécanique industrielle. (Umdruck der Vorträge.) Professé de 1828—1826. II. Teil. Metz 1829. — Mémorial de l'officier du génie. 1835. Nr. 12 (Voûtes) und 1840. Nr. 13 (Poussée de la buttée des terres). — Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Band 35. 2. Nov. 1852.

25) Cousinery. Le Calcul de trait. Paris 1838.

26) Brix. Lehrbuch der Statik fester Körper. 1831. 2. Aufl. 1849, S. 422.

27) Culmann. Graphische Statik. 1866. 2. Aufl. 1875.

28) Mohr. Die graphische Statik und das graphische Rechnen. Civilingenieur. 1875. — Derselbe. Über die Zusammensetzung der Kräfte im Raume. Civilingenieur 1876. — Derselbe. Technische Mechanik. Herausgegeben vom Ing.-Ver. am Polytechnikum Stuttgart. 1877. — Derselbe. Eine Aufgabe der graphischen Statik. Civilingenieur 1886. 32. Band. S. 535.

29) Levy. La statique graphique et ses applications aux constructions. Paris 1874. 2. Aufl. 1886—1888.

30) Saviotti. La statica grafica. 2. Teil. 1888, S. 26.

31) Clerk Maxwell. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. — On reciprocal figures and diagrams of forces. Philosoph. Magazine. Band 27. 1864. — On Bows method of drawing diagrams in graphical statics with illustrations from Peaucelliers linkage. Niven. The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. Band II. 1890. S. 492. — Betti. Teoria della elasticità. Il nuovo Cimento. Serie 2ª. Band VII—VIII, S. 89.

32) Fleming Jenkin. On the practical application of reciprocal figures to the calculation of strains in framework. Trans. of the Royal Society of Edinburgh. 1869. S. 441. — Bow, Economies of construction in relation to framed structures. London 1873.

33) Cremona. Le figure reciproche nella Statica Grafica. Milano 1872. 3. Aufl. mit einer Einführung von Jung. 1879. — Derselbe. Les figures réciproques en statique graphique, ouvrage précéde d'une introduction de G. Jung et suivi d'un appendice extrait des mémoires des Cours de statique graphique de Ch. Saviotti. Traduit par L. Bossut. Paris 1885.

34) Mohr. Über die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen. Civilingenieur 1887. 33. Band, S. 43.

35) Bauschinger. Elemente der graphischen Statik. München 1871.

36) Mohr. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Zeitschr. des Arch.- und Ing.-Vereins in Hannover. 1868. S. 19 (elastische Linie). S. 36 u. f. (durchgehende Träger und Einführung der Einflußlinien).

37) Winkler. Vortrag über die Berechnung von Bogenbrücken. Mitteilungen des Arch.- und Ing.-Vereins für Böhmen. 1868, S. 6. — 1869, S. 1. — Derselbe. Theorie der Brücken. 1. Heft. Äußere Kräfte der Balkenträger. 1886. 3. Aufl. S. 28.

38) Fränkel. Über die ungünstigste Einstellung eines Systemes von Einzellasten auf Fachwerkträgern mit Hilfe von Influenzkurven. Civilingenieur. 1876.

39) Henneberg. Die graphische Statik der starren Körper. Sonderabdruck aus Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. IV. 1. Heft 3. 1903.

c. Theorie des Fachwerkes.

40) Culmann. Der Bau der hölzernen Brücken in den Vereinigten Staaten von Nordamerika. Allgemeine Bauzeitung 1851. — Derselbe. Der Bau der eisernen Brücken in England und Amerika. A. a. O. 1852.

41) Schwedler. Theorie der Brückenbalkensysteme. Zeitschr. für Bauwesen 1851. — Derselbe. Über Brückenbalkensysteme von 200 bis 400 Fuß Spannweite. A. a. O. 1863.

42) A. Ritter. Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen. 1863. 5. Aufl. 1894.

43) Mohr. Beitrag zur Theorie des Fachwerks. Zeitschr. des Arch.- und Ing.-Vereins in Hannover. 1870. 1874. 1875. 1877. — Civilingenieur. 1885.

44) Winkler. Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken. 1873—1884.

45) Fränkel. Anwendung der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes auf die Bestimmung der Formänderung von Fachwerken usw. Civilingenieur 1875.

46) Williot. Notions pratiques sur la statique graphique. Bibliothèque des sciences industrielles et agricoles. 2. Série: Arts et Métiers. 1877. — Auch Génie Civil. Oktober 1877.

47) Föppl. Theorie des Fachwerks. Leipzig 1880.

48) Müller-Breslau. Die graphische Statik der Baukonstruktionen. 1. Aufl. (Elemente) 1881. 4. Aufl. des 1. Bandes 1905.

49) Henneberg. Statik der starren Systeme. Darmstadt 1886.

50) Mohr. Über Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne. Civilingenieur 1887.

51) Land. Die Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen usw. Wochenblatt für Baukunde. Januar 1887, S. 14. — Derselbe. Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger. Schweizerische Bauzeitung. 1887. 10. Band. S. 157. — Derselbe. Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger. Zeitschr. des österr. Ing.- und Arch.-Vereins 1888, S. 11.

52) Land. Beitrag zur Ermittelung der Biegungslinien ebener und elastischer Stabwerke. Civilingenieur 1889. Band 35. S. 375. Desgl. Zeitschr. d. österr. Ing.- und Arch.-Vereins 1889. Heft 4.

53) Müller-Breslau. Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerkes. Schweizerische Bauzeitung 1887. 9. Band. S. 121. — 10. Band. S. 126.

54) Lang. Zur Entwicklungsgeschichte der Spannwerke des Bauwesens. Ein Anhang zu den Lehrbüchern über allgemeine Baukunde und Brückenbau. 1890.

55) Ritter. Anwendungen der graphischen Statik. II. Teil. Das Fachwerk. 1890.

56) Föppl. Das Fachwerk im Raume. Leipzig 1892. — Graphische Statik. 2. Aufl. 1903.

57) Zimmermann. Über Raumfachwerke. 1901.

58) Landsberg. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Zentralblatt der Bauverwaltung. 1898 und 1903.

59) Mohr. Zur Berechnung der Raumfachwerke. Zentralbl. der Bauverw. 1902 und 1903.

60) Mohr. Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Berlin 1905.

61) Mehrtens. Der deutsche Brückenbau im 19. Jahrhundert. Denkschrift, bei Gelegenheit der Weltausstellung des Jahres 1900 in Paris im Auftrage deutscher Brückenbaufirmen herausgegeben. Berlin 1900. — Derselbe. Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre. 1. Band: Einführung in die Grundlagen. 1903. — 2. Band: Statisch bestimmte Träger. 1904. — 3. Band: Formänderungen und statisch unbestimmte Träger. 1905. Leipzig.

d. Besondere Theorien.[1]

1. *Durchgehende Träger.*

62) Köpcke. Über die Dimensionen von Balkenlagen. Zeitschr. des Architekten- und Ingenieur-Ver. in Hannover. 1856.

[1] Die Theorie des Erddruckes vgl. Band II.

63) Bertot. Comptes rendus de la Société des Ingénieurs civils. 1855. S. 278. — Clapeyron. Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés. Comptes rendus. Band 45. S. 1076. 1857.

64) Mohr. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Zeitschr. des Arch.- und Ingen.-Vereins in Hannover 1860 und 1862.

65) Winkler. Beiträge zur Theorie der kontinuierlichen Brückenträger. Zivilingenieur 1862. — Derselbe. Theorie der kontinuierlichen Träger. Mitt. d. Arch.- und Ing.-Verein in Böhmen. 1872. — Derselbe. Theorie der Brücken I. 1886.

66) Bresse. Cours de Mécanique appliquée. 3. Teil. 1865.

67) Ritter. Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den kontinuierlichen Balken. 1871. 2. Aufl. 1883.

68) Weyrauch. Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.

69) Ritter. Anwendungen der graphischen Statik (nach CULMANN). 3. Teil. Der kontinuierliche Balken. 1900.

70) Claxton-Fidler. A practical treatise on brigde-construction. London. 1. Aufl. 1887. 3. Aufl. 1901.

71) Vianello. Der durchgehende Träger auf elastisch senkbaren Stützen. Berlin 1904.

72) Ostenfeld. Graphische Behandlung der kontinuierlichen Träger mit festen, elastisch senkbaren oder drehbaren und elastisch senk- und drehbaren Stützen. Zeitschr. für Architektur- und Ingenieurwesen. 1905.

2. *Bogenträger.*[1]

73) Bresse. Études théoriques sur la résistance des arcs etc. Annales des ponts et chauss. 1848. — Derselbe. Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes. Paris 1854. — Derselbe. Cours de mécanique appliquée etc. Paris 1859. 2. Aufl. 1866.

74) Winkler. Formänderung und Festigkeit gekrümmter Körper, insbesondere der Ringe. Civilingenieur 1856.

75) Sternberg. Theorie der Bogen mit zwei Gelenken (1861). Zeitschr. f. Bauwesen 1864. S. 538.

76) Fränkel. Berechnung eiserner Bogenbrücken. Civilingenieur 1867. — Derselbe. Über die ungünstigste Belastung von Bogenträgern mit zwei Gelenken usw. A. o. O. 1875.

[1] Theorie und Berechnung der Gewölbe vgl. Band II.

77) Winkler. Über den Einfluß der Temperatur bei Bogenbrücken. Civilingenieur 1867. — Derselbe. Vortrag über die Berechnung der Bogenbrücken (Einführung der Einflußlinien). Vgl. Nr. 37. — Derselbe. Berechnung der eisernen Bogenbrücken. Mitt. des Arch.- u. Ing.-Ver. f. Böhmen 1869. — Derselbe. Theorie der Bogenträger usw. Zeitschr. des Österr. Arch.- u. Ing.-Ver. 1872. — Derselbe. Beitrag zur Theorie der elastischen Bogenträger. Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. in Hannover 1879.

78) Engesser. Bogenträger mit zwei Gelenken. Jahrbuch des polyt. Ver. Karlsruhe. 1869. — Derselbe. Theorie und Berechnung der Bogenfachwerkträger ohne Scheitelgelenk. Berlin 1880.

79) Mohr. Beitrag zur Theorie der elastischen Bogenträger. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. in Hannover 1870. — Derselbe. Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger. A. o. O. 1874. — Derselbe. Beitrag zur Theorie des Bogenfachwerks. A. o. O. 1881.

80) Kübler. Theorie der eisernen Bogenbrücken. Zeitschr. des Vereins deutsch. Ing. 1873.

81) Weyrauch. Theorie der elastischen Bogenträger. Zeitschr. f. Baukunde 1878.

82) Müller-Breslau. Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken. Teil I. Die stabförmigen Bogen. Berlin 1880. Teil II nicht erschienen.

83) Ritter-Zürich. Der elastische Bogen berechnet mit Hilfe der graphischen Statik. 1886. — Guidi. L'arco elastico senza cerniere. Accademia reale delle scienze di Torino. 1903. — Derselbe. Una proprietà degli archi elastici. 1905. — Derselbe. Lezioni sulla scienza delle costruzioni. 4. Aufl. Teil I—III. 1904. Teil IV. 1905. — Ludwig Freitag. Gesetzmäßigkeiten in der Trägertheorie. Von der technischen Hochschule in München genehmigte Dissertation. Berlin 1904. S. 17—45.

3. *Nebenspannungen.*

84) Manderlas Lösung der Preisaufgabe: »Welche Spannungen entstehen in den Stäben eines Fachwerkträgers dadurch, daß die Winkel der Fachwerkdreiecke durch die Belastung eine Änderung erleiden?« Jahresbericht der Münchener Techn. Hochschule. 1878—79. S. 18. — Derselbe. Die Berechnung der Sekundärspannungen im einfachen Fachwerk infolge starrer Knotenverbindungen. Allg. Bauzeitung 1880.

85) Engesser. Über die Durchbiegung von Fachwerkträgern und die hierbei auftretenden zusätzlichen Spannungen. Zeitschr. für Baukunde 1879. — Derselbe. Über die Biegungsspannungen der Fachwerke. Zeitschr. des Ver. deutsch. Ing. 1888. — Derselbe. Die Zusätzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken. Berlin 1892—1893.

86) Asimont. Hauptspannung und Sekundärspannung. Zeitschr. für Baukunde 1880.

87) Winkler. Die Sekundärspannungen in Eisenkonstruktionen. Deutsche Bauzeitung 1881.

88) Landsberg. Beitrag zur Theorie des Fachwerkes. Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. in Hannover 1885 und 1886. — Müller-Breslau. Theorie der Biegungsspannungen in Fachwerkträgern. A. o. O. 1886.

89) Ritter-Zürich. Anwendungen der graphischen Statik. II. Teil: Das Fachwerk. 1900.

90) Mohr. Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen. Civilingenieur 1891 und 1892.

4. *Einfluß bewegter Lasten.*

91) Souleyre. Action dynamique des charges roulantes. Annal. des ponts et chaussées. 1889. II.

92) Glauser. Dynamische Wirkungen bewegter Lasten auf eiserne Brücken. GLASERS Annalen für Gewerbe u. Bauw. 1891 und 1892.

93) Zimmermann. Die Wirkungen bewegter Lasten auf Brücken. GLASER, a. o. O. 1891 und 1892.

94) Melan. Über die dynamische Wirkung bewegter Lasten auf eiserne Brücken. GLASER, a. o. O. 1894.

95) Zimmermann. Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Berlin 1896.

Alphabetische Inhaltsübersicht.

a. Sachverzeichnis.

b. Namenverzeichnis.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig

